Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ОПОП
д-р техн. наук, профессор
_____ А.В. Замятин
«_29_» _мая_ 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

ИССЛЕДОВАНИЕ ТАНДЕМНЫХ СИСТЕМ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика,
направленность (профиль) «Интеллектуальный анализ больших данных»

Морозова Мария Алексеевна

Научный руководитель ВКР
д-р физ.-мат. наук
_____ С.В. Пауль
«_29_» _мая_ 2023 г.

Автор работы
студент группы №_932128_
_____ М.А. Морозова
«_29_» _мая_ 2023 г.

Томск – 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ОПОП
д-р техн. наук, профессор
_____ А.В. Замятин
подпись
«09» ноября 2022 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы бакалавра обучающемуся
Морозовой Марии Алексеевне
Фамилия Имя Отчество обучающегося
по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика,
направленность (профиль) «Интеллектуальный анализ больших данных»

1 Тема выпускной квалификационной работы
Исследование тандемных систем с повторными вызовами

2 Срок сдачи обучающимся выполненной выпускной квалификационной работы:
а) в учебный офис / деканат – 29.05.2023 б) в ГЭК – 07.06.2023

3 Исходные данные к работе:
Объект исследования – тандемные системы с возможностью повторного обслуживания.
Предмет исследования – распределение вероятностей числа заявок на орбитах.
Цель исследования – построение математических моделей телекоммуникационных систем связи и нахождение распределения вероятностей числа заявок на орбитах в предложенных моделях.

Задачи:
Построить математические модели телекоммуникационных систем связи в виде тандемных систем с повторными вызовами.
Исследовать предложенные математические модели асимптотическими методами в условии большой задержки заявок на орбите.
Получить выражения для стационарных асимптотических распределений вероятностей состояний систем.
Спроектировать и реализовать дополнительные модули имитационной модели исследуемых систем.
Оценить применимость полученных асимптотических решений.

Методы исследования:
Методы теории вероятностей и случайных процессов, метод асимптотического анализа, метод асимптотически диффузионного анализа, метод имитационного моделирования.

Организация или отрасль, по тематике которой выполняется работа, –
Национальный исследовательский Томский государственный университет, кафедра теории вероятностей и математической статистики.

4 Краткое содержание работы

Исследование математических моделей тандемных систем с повторными вызовами с целью нахождения асимптотического распределения вероятностей числа заявок на орбитах.

Руководитель выпускной квалификационной работы
д-р физ.-мат. наук, доцент _____ / С.В. Пауль
должность, место работы *подпись* *И.О. Фамилия*

Задание принял к исполнению
студент группы №932128 _____ / М.А. Морозова
должность, место работы *подпись* *И.О. Фамилия*

АННОТАЦИЯ

Тема выпускной квалификационной работы «Исследование тандемных систем с повторными вызовами».

Ключевые слова: система массового обслуживания, тандемная система с повторными вызовами, метод асимптотического анализа, метод асимптотически диффузионного анализа, метод имитационного моделирования

Объект исследования – тандемные системы с возможностью повторного обслуживания.

Цель работы – построение математических моделей телекоммуникационных систем связи в виде тандемных систем с повторными вызовами и нахождение распределения вероятностей числа заявок на орбите в предложенных моделях.

Методы исследования – методы теории вероятностей и случайных процессов, метод асимптотического анализа, метод асимптотически диффузионного анализа, метод имитационного моделирования.

Работа содержит 5 глав, 129 страниц, 26 рисунков, 4 таблицы, 88 источников.

В первой главе описана техническая система как реальный пример объекта исследования и базовая математическая модель. Вторая глава содержит исследование тандемной системы методом асимптотически диффузионного анализа. В третьей главе показано исследование тандемной системы с MMPP входящим потоком методом асимптотически диффузионного анализа. В четвертой главе содержится исследование тандемной системы с произвольным обслуживанием на первом приборе методом асимптотически диффузионного анализа. Пятая глава работы посвящена исследованию тандемной системы с двумя источниками повторных вызовов методом асимптотического анализа.

Результат работы – получены асимптотические распределения вероятностей числа заявок на орбитах в исследуемых системах при условии

их большой задержки на орбите; спроектированы и реализованы дополнительные модули имитационной модели: MMPP поток и произвольное обслуживание; проанализирована область применимости асимптотических результатов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4

1 Построение базовой математической модели 9

2 Исследование тандемной системы с общей орбитой и простейшим входящим потоком 12

2.1 Система дифференциальных уравнений Колмогорова 12

2.2 Первый этап асимптотического анализа 20

2.3 Второй этап асимптотического анализа 23

2.4 Метод асимптотически диффузионного анализа 31

2.5 Анализ области применимости асимптотического результата 35

3 Исследование тандемной RQ-системы с общей орбитой и входящим MMPP-потоком 40

3.1 Описание математической модели и постановка задачи 40

3.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова 41

3.3 Условие существования стационарного режима 45

3.4 Имитационная модель исследуемой системы 48

3.5 Анализ области применимости асимптотического результата 54

4 Исследование тандемной системы с повторными вызовами, общей орбитой и произвольным обслуживанием на первом приборе 59

4.1 Математическая модель и постановка задачи 59

4.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова 60

4.3 Первый этап асимптотического анализа 63

4.4 Второй этап асимптотического анализа 69

4.5 Имитационная модель исследуемой системы 90

4.6 Анализ области применимости асимптотического результата 92

5 Исследование тандемной системы с повторными вызовами и двумя орбитами 97
5.1 Математическая модель и постановка задачи 97
5.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова 99
5.3 Асимптотика первого порядка 104
5.4 Асимптотика второго порядка 107
5.5 Численные примеры 115
Заключение 119
Список использованных источников и литературы 121

ВВЕДЕНИЕ

Теория массового обслуживания [1] является очень востребованной областью знаний, что связано с постоянным увеличением числа обслуживающих систем в современном мире. Первоначально исследователей занимали задачи, связанные с обслуживанием абонентов телефонии [2, 3, 4]. Свое продолжение они нашли в колл-центрах [5, 6], сотовой связи [7, 8].

Сейчас модели теории массового обслуживания также используются в социально-экономических [9, 10, 11], вычислительных [12, 13, 14], телекоммуникационных [15, 16, 17, 18], производственных систем управления запасами [19, 20], транспортными потоками [21, 22]. Исследуемые математические модели являются абстракциями современных систем, и тем не менее, они отражают наиболее важные аспекты их функционирования [23]. Следовательно, задачи построения и исследования моделей, в частности, инфотелекоммуникационных, являются актуальными и современными.

В современной теории массового обслуживания особым интересом пользуется класс систем с источниками повторных вызовов (орбитами) [24, 28, 24]. Они применяются для моделирования телефонного трафика [25], управления очередью маршрутизаторов [26], инвентаризации [29], самоорганизующихся одноранговых сетей [30], систем Ethernet [31]. В системах массового обслуживания с повторными вызовами заявка (или клиент, требование, пакет), заставшая обслуживающий прибор занятым, уходит на орбиту, откуда спустя некоторое время предпринимает повторную попытку попасть на обслуживание. При неудаче заявка возвращается в источник повторных вызовов для осуществления еще одной задержки. Данное поведение характерно для всех заявок. Поэтому, как следствие, поток повторных обращений имеет интенсивность, зависящую от числа заявок на орбите. Время задержки чаще всего моделируется как случайная величина.

Исследованию систем с повторными вызовами посвящены работы [32, 33], в которых рассматриваются применимые к ним методы исследования.

Тандемные системы массового обслуживания появились как модели двухэтапных производственных процессов в 50-х. Ранние исследования были посвящены получению аналитических результатов для транспортных узлов [34, 35], многофазных производственных линий [36, 37].

Первые работы по исследованию телекоммуникационных систем с помощью двухфазных тандемных моделей появились в 80-х [38, 39, 40], позже, в первом десятилетии текущего века, они нашли применение в процессах передачи данных в беспроводных сетях [41, 42].

Также потребность в многоэтапной обработке возникает в колл-центрах [43, 44], многоагентных робототехнических системах [45], при передаче мультимедийной информации [46]. В работе [47] с помощью тандемной модели системы массового обслуживания определяется качество передачи трафика, в [48] вычисляется временная задержка пакетов на каждом узле обработки, в [49] рассматривается оптимизация сети по критерию минимизации числа отброшенных пакетов.

Есть исследования при условии наличия буфера конечной размерности, например, в [50, 51] заявки теряются, если он заполнен.

Данная выпускная работа посвящена тандемным систем с повторными вызовами, которые рассмотрены существенно меньше, что объясняется двумя причинами: относительная новизна и повышенная сложность, требующая разработки новых аналитических методов.

В качестве существующих примеров можно привести публикацию [52], в которой объектом исследования является система без промежуточного буфера для ожидания. Если прибор занят, то происходит коллизия, из-за которой прибывшая и обслуживающаяся заявки уходят на орбиту. В [53] представлен асимптотический анализ тандемной системы массового обслуживания с постоянной интенсивностью повторных вызовов.

Авторы работ [54, 55] рассматривают системы с орбитами на первой фазе для телефонных систем с переключателем, в которых заявка, перешедшая на второй прибор, блокирует первый до момента окончания второй фазы обслуживания.

Для коммуникационных системах в статье [56] первая фаза выступает в качестве базовой станции в соте, а вторая – системой удаленных серверов. Похожая структура для колл-центров используется в работе [57].

Довольно много исследований посвящено тандемным системам с потерями на второй фазе [58, 59, 60, 61].

В попытках приблизить математические модели систем массового обслуживания к реальным они усложняются, что затрудняет их аналитическое исследование вплоть до того, что оно становится невозможным. По этой причине часто прибегают к численным [62, 63], асимптотическим (приближенным) [64, 65] методам решения и методу имитационного моделирования [67, 68].

В частности, для тандемных систем с источниками повторных вызовов получение аналитического решения доступно только для нескольких частных случаев [69].

Простейшим потоком, который может поступать в систему, называют пуассоновский входящий поток [70]. Его характеризуют следующие свойства: вероятность появления одного или нескольких заявок зависит только от величины наблюдаемого интервала времени и не зависит от конкретного момента времени (стационарность), заявки появляются независимо друг от друга (отсутствие последействия) [71] и поодиночке (ординарность). Развитие теории массового обслуживания многим обусловлено появлением новых систем: появилась необходимость создания новых моделей. Так в 90-х годах прошлого века было придумано и уточнено понятие марковского потока однородных событий (Markovian Arrival Process или MAP-поток) [72, 73], необходимого для приближение к реальным коррелированным потокам в современных информационно-вычислительных

системах [74]. Частным случаем MAP-потока является марковский модулированных поток (MMPP-поток).

Целью данной выпускной квалификационной работы магистра является построение математических моделей телекоммуникационных систем связи в виде тандемных систем с повторными вызовами и нахождение распределения вероятностей числа заявок на орбите в предложенных моделях.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1) построить математические модели телекоммуникационных систем связи в виде тандемных систем с повторными вызовами;

2) исследовать предложенные математические модели асимптотическими методами при условии большой задержки на орбитах;

3) получить выражения для стационарных асимптотических распределений вероятностей состояний систем;

4) спроектировать и реализовать дополнительные модули имитационной модели исследуемых систем;

5) оценить применимость полученных асимптотических результатов.

Первая глава посвящена описанию технической системы как реальному примеру объекта исследования и строится базовая математическая модель. Вторая глава содержит исследование тандемной системы с общей орбитой, простейшим потоком и экспоненциальным обслуживанием методом асимптотически диффузионного анализа. В третьей главе показано исследование тандемной системы с общей орбитой, MMPP входящим потоком и экспоненциальным обслуживанием методом асимптотически диффузионного анализа. В четвертой главе содержится исследование тандемной системы с общей орбитой, простейшим входящим потоком и произвольным обслуживанием на первом приборе методом асимптотически диффузионного анализа. Пятая глава работы посвящена исследованию

тандемной системы с двумя орбитами, простейшим входящим потоком и экспоненциальным обслуживанием методом асимптотического анализа.

Результаты работы были представлены на X научных конференциях Международного уровня:

1) XXVI Международная конференция по методам и приложениям аналитического и стохастического моделирования (Цукуба, Япония, 13 – 14 декабря 2021 г.),

2) IX Международная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, Россия, 26 – 28 мая 2022 г.),

3) XXV Международная конференция по распределенным компьютерным и телекоммуникационным сетям: управление, вычисление, связь (Москва, Россия, 26 – 30 сентября 2022 г.),

4) XX Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Томск, Россия, 1 – 5 декабря 2021 г.),

5) XXI Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Карши, Узбекистан, 25 – 29 октября 2022 г.).

1 Построение базовой математической модели

Любые реальные системы работают в условиях ограниченных ресурсов. Удовлетворение требований качества результатов их работы возможны за счёт оптимизации тех или иных показателей.

Рассмотрим робототехническую систему, состоящую из беспилотного летательного аппарата (БЛА) и базовой станции (БС), которая выполняет задачу слежения за наземной обстановкой (рисунок 1). БЛА преобразует входной поток информации в унифицированные пакеты, предусмотренных протоколом обмена данных с БС (CMR, NMEA, RINEX и другие [75]), на которой происходит их дальнейшая обработка. Однако на практике данные далеко не всегда беспрепятственно проходят всю цепочку обработки. Поэтому БЛА имеет специальное хранилище, в котором скапливаются ожидающие обработки данные. Объем хранилища является ограниченным ресурсом, соответственно, возникает задача на нахождение его оптимальной размерности, чтобы минимизировать потери, искажения информации. Для сигнализации о переполнении часто используют различные вариации алгоритма RED (Random Early Detection) [76], реализация которого предполагает повторную отсылку пакетов на базовую станцию, что оказывает дополнительную нагрузку на БЛА.

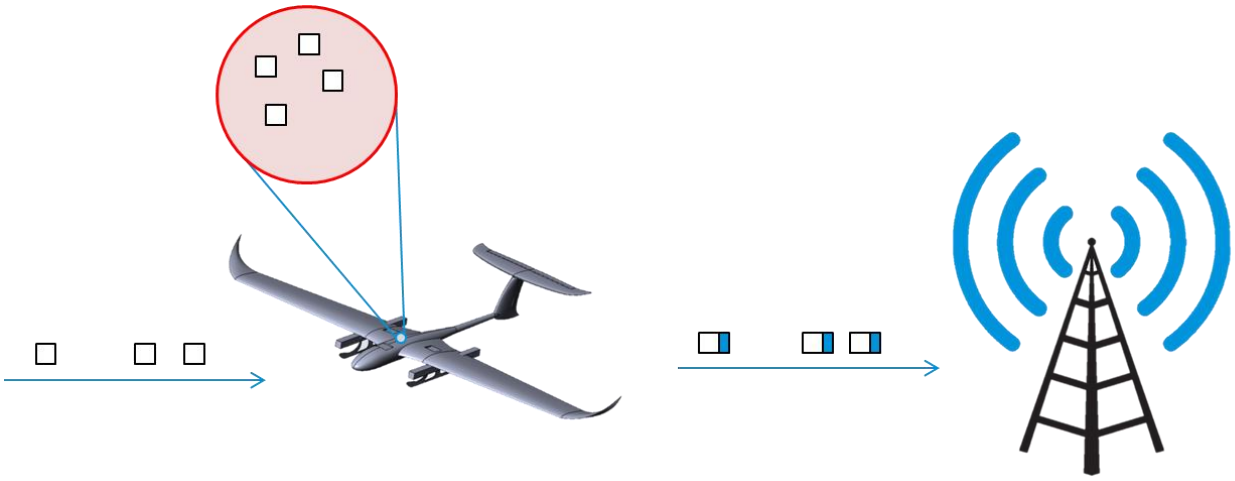


Рисунок 1 – Робототехническая система с беспилотным летательным аппаратом и базовой станцией

Опишем предложенную робототехническую систему в терминах теории массового обслуживания. Данные, поступающие на вход системы и требующие обработки будем называть заявками. За их поступление в систему отвечает специальный объект – входящий поток. Обработкой заявок занимаются обслуживающие приборы, которых в описанной системе два: БЛА, где данные преобразуются в пакеты, и БС, занимающаяся дальнейшей обработкой. При первом приборе имеется специальное хранилище, где задерживаются данные, которые не смогли пройти цепочку обслуживания. Его представим как источник повторных вызовов (орбита), откуда спустя случайное время задержки каждая заявка предпринимает очередную попытку последовательной обработки на двух приборах.

Таким образом, сформулируем базовую математическую модель (рисунок 2). На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Если заявка входящего потока обнаруживает первый прибор свободным, то она встает на него и обслуживается в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром μ_1, после чего обращается ко второму прибору. Если второй прибор свободен, заявка встает на него и обслуживается в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром μ_2. Если заявка входящего потока застает первый прибор занятым, она мгновенно отправляется на орбиту, где после случайной экспоненциально-распределенной задержки с параметром σ снова пытается встать на первый прибор для обслуживания. Если после обслуживания на первом приборе заявка застает второй прибор занятым, она мгновенно отправляется на орбиту, где после случайной экспоненциально-распределенной задержки с параметром σ снова пытается попасть на обслуживание первым прибором.

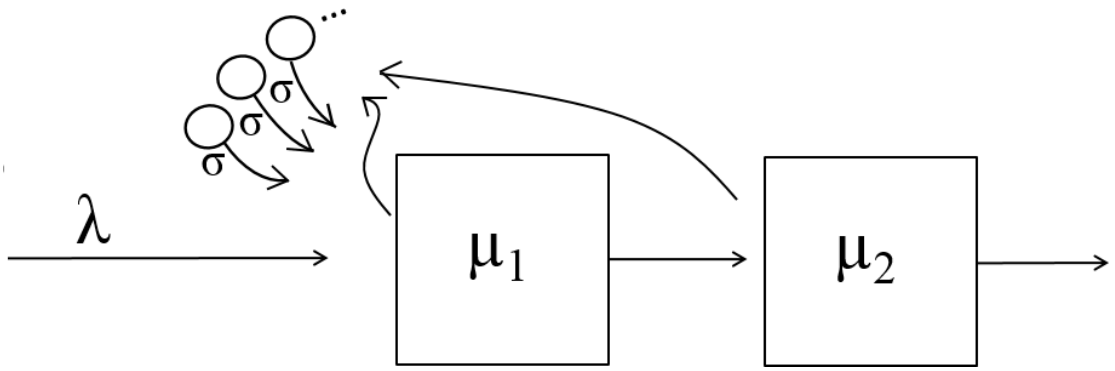


Рисунок 2 – Тандемная система с повторными вызовами и простейшим входящим потоком

Для предложенной математической модели была поставлена задача нахождения распределения вероятностей числа заявок $i(t)$ на орбите. Найдя его, можно определить оптимальную размерность хранилища при БЛА, основываясь на математическом ожидании и дисперсии случайной величины при заданных параметрах.

Данная задача была решена ранее с помощью метода асимптотического анализа при условии большой задержки заявок на орбите [77]. В рамках магистерской выпускной работы рассмотрим описанную математическую модель другим методом – методом асимптотически диффузионного анализа.

2 Исследование тандемной системы с общей орбитой и простейшим входящим потоком

Для системы, описанной в первой главе, введем следующие обозначения: процесс $n_1(t)$ – состояние первого прибора в момент времени t (0, если прибор свободен; 1, если занят); процесс $n_2(t)$ – состояние второго прибора в момент времени t (0, если прибор свободен; 1, если занят); процесс $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t.

Целью исследования является нахождение распределений вероятностей числа заявок на орбите и состояний приборов в рассматриваемой системе.

2.1 Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Обозначим вероятности

$$P_{n_1 n_2}(i,t) = P\{n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, i(t) = i\};\ n_1 = 0, 1;\ n_2 = 0, 1. \qquad (1)$$

Трехмерный случайный процесс $\{n_1(t),\ n_2(t),\ i(t)\}$, $n_1 = 0, 1$, $n_2 = 0, 1$ является марковским. Для распределения вероятностей (1) составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

Запишем равенства

$$P_{00}(i,t+\Delta t) = P_{00}(i,t)(1-\lambda\Delta t)(1-i\sigma\Delta t) + P_{01}(i,t)\mu_2\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_{10}(i,t+\Delta t) = P_{00}(i,t)\lambda\Delta t + P_{00}(i+1,t)(i+1)\sigma\Delta t +$$

$$+P_{10}(i,t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu_1\Delta t) + P_{10}(i-1,t)\lambda\Delta t + P_{11}(i,t)\mu_2\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_{01}(i,t+\Delta t) = P_{10}(i,t)\mu_1\Delta t + P_{01}(i,t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu_2\Delta t)(1-i\sigma\Delta t) +$$

$$+P_{11}(i-1,t)\mu_1\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_{11}(i,t+\Delta t) = P_{01}(i,t)\lambda\Delta t + P_{01}(i+1,t)(i+1)\sigma\Delta t +$$

$$+P_{11}(i,t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu_1\Delta t)(1-\mu_2\Delta t) + P_{11}(i-1,t)\lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

Имеем:

$$P_{00}(i,t+\Delta t)=(1-(\lambda+i\sigma)\Delta t)P_{00}(i,t)+\mu_2\Delta tP_{01}(i,t)+o(\Delta t),$$

$$P_{10}(i,t+\Delta t)=\lambda\Delta tP_{00}(i,t)+(i+1)\sigma\Delta tP_{00}(i+1,t)+$$

$$+(1-(\lambda+\mu_1)\Delta t)P_{10}(i,t)+\lambda\Delta tP_{10}(i-1,t)+\mu_2\Delta tP_{11}(i,t)+o(\Delta t),$$

$$P_{01}(i,t+\Delta t)=\mu_1\Delta tP_{10}(i,t)+(1-(\lambda+i\sigma+\mu_2)\Delta t)P_{01}(i,t)+$$

$$+\mu_1\Delta tP_{11}(i-1,t)+o(\Delta t),$$

$$P_{11}(i,t+\Delta t)=\lambda\Delta tP_{01}(i,t)+(i+1)\sigma\Delta tP_{01}(i+1,t)+$$

$$+(1-(\lambda+\mu_1+\mu_2)\Delta t)P_{11}(i,t)+\lambda\Delta tP_{11}(i-1,t)+o(\Delta t).$$

Перенесем в левую сторону слагаемые без множителя Δt:

$$P_{00}(i,t+\Delta t)-P_{00}(i,t)=-(\lambda+i\sigma)\Delta tP_{00}(i,t)+\mu_2\Delta tP_{01}(i,t)+o(\Delta t),$$

$$P_{10}(i,t+\Delta t)-P_{10}(i,t)=\lambda\Delta tP_{00}(i,t)+(i+1)\sigma\Delta tP_{00}(i+1,t)-$$

$$-(\lambda+\mu_1)\Delta tP_{10}(i,t)+\lambda\Delta tP_{10}(i-1,t)+\mu_2\Delta tP_{11}(i,t)+o(\Delta t),$$

$$P_{01}(i,t+\Delta t)-P_{01}(i,t)=\mu_1\Delta tP_{10}(i,t)-(\lambda+i\sigma+\mu_2)P_{01}(i,t)+$$

$$+\mu_1\Delta tP_{11}(i-1,t)+o(\Delta t),$$

$$P_{11}(i,t+\Delta t)-P_{11}(i,t)=\lambda\Delta tP_{01}(i,t)+(i+1)\sigma\Delta tP_{01}(i+1,t)-$$

$$-(\lambda+\mu_1+\mu_2)\Delta tP_{11}(i,t)+\lambda\Delta tP_{11}(i-1,t)+o(\Delta t).$$

Разделим уравнения системы на Δt:

$$\frac{P_{00}(i,t+\Delta t)-P_{00}(i,t)}{\Delta t}=-(\lambda+i\sigma)P_{00}(i,t)+\mu_2P_{01}(i,t)+o(\Delta t),$$

$$\frac{P_{10}(i,t+\Delta t)-P_{10}(i,t)}{\Delta t}=\lambda P_{00}(i,t)+(i+1)\sigma P_{00}(i+1,t)-$$

$$-(\lambda+\mu_1)P_{10}(i,t)+\lambda P_{10}(i-1,t)+\mu_2P_{11}(i,t)+o(\Delta t),$$

$$\frac{P_{01}(i,t+\Delta t)-P_{01}(i,t)}{\Delta t}=\mu_1P_{10}(i,t)-(\lambda+i\sigma+\mu_2)P_{01}(i,t)+\mu_1P_{11}(i-1,t)+o(\Delta t),$$

$$\frac{P_{11}(i,t+\Delta t)-P_{11}(i,t)}{\Delta t}=\lambda P_{01}(i,t)+(i+1)\sigma P_{01}(i+1,t)-$$

$$-(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{11}(i,t)+\lambda P_{11}(i-1,t)+o(\Delta t). \qquad (2)$$

Устремив $\Delta t \to 0$ в системе (2), получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P_{00}(i,t)}{\partial t}=-(\lambda+i\sigma)P_{00}(i,t)+\mu_2 P_{01}(i,t),$$

$$\frac{\partial P_{10}(i,t)}{\partial t}=\lambda P_{00}(i,t)+(i+1)\sigma P_{00}(i+1,t)-(\lambda+\mu_1)P_{10}(i,t)+$$

$$+\lambda P_{10}(i-1,t)+\mu_2 P_{11}(i,t),$$

$$\frac{\partial P_{01}(i,t)}{\partial t}=\mu_1 P_{10}(i,t)-(\lambda+i\sigma+\mu_2)P_{01}(i,t)+\mu_1 P_{11}(i-1,t),$$

$$\frac{\partial P_{11}(i,t)}{\partial t}=\lambda P_{01}(i,t)+(i+1)\sigma P_{01}(i+1,t)-(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{11}(i,t)+$$

$$+\lambda P_{11}(i-1,t). \qquad (3)$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j=\sqrt{-1}$

$$H_{n_1n_2}(u,t)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P_{n_1n_2}(i,t). \qquad (4)$$

Домножим уравнения системы (3) на e^{jui}, просуммируем каждое уравнение по i и получим систему

$$\frac{\partial H_{00}(u,t)}{\partial t}=-\lambda\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P_{00}(i,t)-\sigma\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}iP_{00}(i,t)+\mu_2\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P_{01}(i,t),$$

$$\frac{H_{10}(i,t)}{\partial t}=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}e^{jui}P_{00}(i,t)+\sigma\sum_{i=1}^{\infty}e^{jui}(i+1)P_{00}(i+1,t)-$$

$$-(\lambda+\mu_1)\sum_{i=1}^{\infty}e^{jui}P_{10}(i,t)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}e^{jui}P_{10}(i-1,t)+\mu_2\sum_{i=1}^{\infty}e^{jui}P_{11}(i,t),$$

$$\frac{\partial H_{01}(u,t)}{\partial t} = \mu_1 \sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} P_{10}(i,t) - (\lambda + \mu_2) \sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} P_{01}(i,t) -$$

$$-\sigma \sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} i P_{01}(i,t) + \mu_1 \sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} P_{11}(i-1,t),$$

$$\frac{H_{11}(i,t)}{\partial t} = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} P_{01}(i,t) + \sigma \sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} (i+1) P_{01}(i+1,t) -$$

$$-(\lambda + \mu_1 + \mu_2) \sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} P_{11}(i,t) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} P_{11}(i-1,t).$$

Имеем:

$$\frac{H_{00}(i,t)}{\partial t} = -\lambda \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_{00}(i,t) - \sigma \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} i P_{00}(i,t) + \mu_2 \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_{01}(i,t),$$

$$\frac{\partial H_{10}(i,t)}{\partial t} = \lambda \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} P_{00}(i,t) + P_{00}(0,t) - P_{00}(0,t) \right) +$$

$$\frac{\sigma}{e^{ju} j} \sum_{i=1}^{\infty} e^{ju(i+1)} j(i+1) P_{00}(i+1,t) - (\lambda + \mu_1) \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} P_{10}(i,t) + P_{10}(0,t) - P_{10}(0,t) \right) +$$

$$+\lambda e^{ju} \sum_{i=1}^{\infty} e^{ju(i-1)} P_{10}(i-1,t) + \mu_2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} P_{11}(i,t) + P_{11}(0,t) - P_{11}(0,t) \right),$$

$$\frac{\partial H_{01}(i,t)}{\partial t} = \mu_1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} P_{10}(i,t) + P_{10}(0,t) - P_{10}(0,t) \right) -$$

$$-(\lambda + \mu_2) \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} P_{01}(i,t) + P_{01}(0,t) - P_{01}(0,t) \right) -$$

$$-\frac{1}{j} \sigma \sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} j i P_{01}(i,t) + \mu_1 e^{ju} \sum_{i=1}^{\infty} e^{ju(i-1)} P_{11}(i-1,t),$$

$$\frac{\partial H_{11}(i,t)}{\partial t} = \lambda \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} P_{01}(i,t) + P_{01}(0,t) - P_{01}(0,t) \right) +$$

$$+\frac{\sigma}{e^{ju} j} \sum_{i=1}^{\infty} e^{ju(i+1)} j(i+1) P_{01}(i+1,t) - (\lambda + \mu_1 + \mu_2) \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} P_{11}(i,t) + P_{11}(0,t) - P_{11}(0,t) \right) +$$

$$+\lambda e^{ju}\sum_{i=1}^{\infty}e^{ju(i-1)}P_{11}(i-1,t). \qquad (5)$$

Учитывая обозначение (4), систему (5) перепишем в виде

$$\frac{\partial H_{00}(u,t)}{\partial t}=-\lambda H_{00}(u,t)-\sigma\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}iP_{00}(i,t)+\mu_2 H_{01}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_{10}(u,t)}{\partial t}=\lambda\left(H_{00}(u,t)-P_{00}(0,t)\right)-$$

$$-\frac{\sigma j}{e^{ju}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}e^{ju(i+1)}j(i+1)P_{00}(i+1,t)+P_{00}(0,t)+P_{00}(1,t)e^{ju}-P_{00}(0,t)-P_{00}(1,t)e^{ju}\right)-$$

$$-(\lambda+\mu_1)\left(H_{10}(u,t)-P_{10}(0,t)\right)+\lambda e^{ju}H_{10}(u,t)+\mu_2\left(H_{11}(0,t)-P_{11}(0,t)\right),$$

$$\frac{\partial H_{01}(u,t)}{\partial t}=\mu_1\left(H_{10}(u,t)-P_{10}(0,t)\right)-$$

$$-(\lambda+\mu_2)\left(H_{01}(u,t)-P_{01}(0,t)\right)-\frac{1}{j}\sigma\sum_{i=1}^{\infty}\left(e^{jui}\right)_u{}'P_{01}(i,t)+\mu_1 e^{ju}H_{11}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_{11}(u,t)}{\partial t}=\lambda\left(H_{01}(u,t)-P_{01}(0,t)\right)-$$

$$-\frac{\sigma j}{e^{ju}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}e^{ju(i+1)}j(i+1)P_{01}(i+1,t)+P_{01}(0,t)+P_{01}(1,t)e^{ju}-P_{01}(0,t)-P_{01}(1,t)e^{ju}\right)-$$

$$-(\lambda+\mu_1+\mu_2)\left(H_{11}(u,t)-P_{11}(0,t)\right)+\lambda e^{ju}H_{11}(u,t).$$

Преобразуем некоторые слагаемые

$$\frac{\partial H_{00}(u,t)}{\partial t}=-\lambda H_{00}(u,t)+j\sigma\frac{\partial H_{00}(u,t)}{\partial u}+\mu_2 H_{01}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_{10}(u,t)}{\partial t}=\lambda\left(H_{00}(u,t)-P_{00}(0,t)\right)-j\frac{\sigma}{e^{ju}}\frac{\partial\left(H_{00}(u,t)-P_{00}(0,t)-P_{00}(1,t)e^{ju}\right)}{\partial u}-$$

$$-(\lambda+\mu_1)\left(H_{10}(u,t)-P_{10}(0,t)\right)+\lambda e^{ju}H_{10}(u,t)+\mu_2\left(H_{11}(0,t)-P_{11}(0,t)\right),$$

$$\frac{\partial H_{01}(u,t)}{\partial t} = \mu_1\left(H_{10}(u,t) - P_{10}(0,t)\right) -$$

$$-(\lambda+\mu_2)\left(H_{01}(u,t) - P_{01}(0,t)\right) - \frac{1}{j}\sigma\left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} P_{01}(i,t)\right)' + \mu_1 e^{ju} H_{11}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_{11}(u,t)}{\partial t} = \lambda\left(H_{01}(u,t) - P_{01}(0,t)\right) - j\frac{\sigma}{e^{ju}}\frac{\partial\left(H_{01}(u,t) - P_{01}(0,t) - P_{01}(1,t)e^{ju}\right)}{\partial u} -$$

$$-(\lambda+\mu_1+\mu_2)\left(H_{11}(u,t) - P_{11}(0,t)\right) + \lambda e^{ju} H_{11}(u,t).$$

Возьмем производные в слагаемых со множителем $j\sigma e^{-ju}$

$$\frac{\partial H_{00}(u,t)}{\partial t} = -\lambda H_{00}(u,t) + j\sigma\frac{\partial H_{00}(u,t)}{\partial u} + \mu_2 H_{01}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_{10}(u,t)}{\partial t} = \lambda\left(H_{00}(u,t) - P_{00}(0,t)\right) - j\sigma e^{-ju}\left(\frac{\partial H_{00}(u,t)}{\partial u} - P_{00}(1,t)e^{ju} j\right) -$$

$$-(\lambda+\mu_1)\left(H_{10}(u,t) - P_{10}(0,t)\right) + \lambda e^{ju} H_{10}(u,t) + \mu_2\left(H_{11}(0,t) - P_{11}(0,t)\right),$$

$$\frac{\partial H_{01}(u,t)}{\partial t} = \mu_1\left(H_{10}(u,t) - P_{10}(0,t)\right) -$$

$$-(\lambda+\mu_2)\left(H_{01}(u,t) - P_{01}(0,t)\right) - \frac{1}{j}\sigma\left(H_{01}(u,t) - P_{01}(i,t)\right)_u' + \mu_1 e^{ju} H_{11}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_{11}(u,t)}{\partial t} = \lambda\left(H_{01}(u,t) - P_{01}(0,t)\right) - j\sigma e^{-ju}\left(\frac{\partial H_{01}(u,t)}{\partial u} - P_{01}(1,t)e^{ju} j\right) -$$

$$-(\lambda+\mu_1+\mu_2)\left(H_{11}(u,t) - P_{11}(0,t)\right) + \lambda e^{ju} H_{11}(u,t).$$

Раскроем скобки

$$\frac{\partial H_{00}(u,t)}{\partial t} = -\lambda H_{00}(u,t) + j\sigma\frac{\partial H_{00}(u,t)}{\partial u} + \mu_2 H_{01}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_{10}(u,t)}{\partial t} = \lambda H_{00}(u,t) - \lambda P_{00}(0,t) - j\sigma e^{-ju}\frac{dH_{00}(u,t)}{du} - \sigma P_{00}(1,t) -$$

$$-(\lambda+\mu_1)H_{10}(u,t) + (\lambda+\mu_1)P_{10}(0,t) + \lambda e^{ju} H_{10}(u,t) + \mu_2 H_{11}(0,t) - \mu_2 P_{11}(0,t),$$

$$\frac{\partial H_{01}(u,t)}{\partial t} = \mu_1 H_{10}(u,t) - \mu_1 P_{10}(0,t) -$$

$$-(\lambda+\mu_2)H_{01}(u,t) + (\lambda+\mu_2)P_{01}(0,t) + j\sigma\frac{\partial H_{01}(u,t)}{\partial u} + \mu_1 e^{ju} H_{11}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_{11}(u,t)}{\partial t} = \lambda H_{01}(u,t) - \lambda P_{01}(0,t) - j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_{01}(u,t)}{\partial u} - \sigma P_{01}(1,t) -$$

$$-(\lambda+\mu_1+\mu_2)H_{11}(u,t) + (\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{11}(0,t) + \lambda e^{ju} H_{11}(u,t). \qquad (6)$$

Выпишем систему (4) для $i = 0$

$$\frac{\partial P_{00}(0,t)}{\partial t} = -\lambda P_{00}(0,t) + \mu_2 P_{01}(0,t),$$

$$\frac{\partial P_{10}(0,t)}{\partial t} = \lambda P_{00}(0,t) + \sigma P_{00}(1,t) - (\lambda+\mu_1)P_{10}(0,t) + \mu_2 P_{11}(0,t),$$

$$\frac{\partial P_{01}(0,t)}{\partial t} = \mu_1 P_{10}(0,t) - (\lambda+\mu_2)P_{01}(0,t),$$

$$\frac{\partial P_{11}(0,t)}{\partial t} = \lambda P_{01}(0,t) + \sigma P_{01}(1,t) - (\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{11}(0,t).$$

Тогда систему уравнений (6) окончательно перепишем для функций $H_{n_1 n_2}(u,t)$, $n_1 = 0, 1$, $n_2 = 0, 1$

$$\frac{\partial H_{00}(u,t)}{\partial t} = -\lambda H_{00}(u,t) + j\sigma\frac{\partial H_{00}(u,t)}{\partial u} + \mu_2 H_{01}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_{10}(u,t)}{\partial t} = \lambda H_{00}(u,t) - j\sigma e^{-ju}\frac{dH_{00}(u,t)}{du} - (\lambda+\mu_1-\lambda e^{ju})H_{10}(u,t) +$$

$$+\mu_2 H_{11}(0,t),$$

$$\frac{\partial H_{01}(u,t)}{\partial t} = \mu_1 H_{10}(u,t) - (\lambda+\mu_2)H_{01}(u,t) + j\sigma\frac{\partial H_{01}(u,t)}{\partial u} + \mu_1 e^{ju} H_{11}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_{11}(u,t)}{\partial t} = \lambda H_{01}(u,t) - j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_{01}(u,t)}{\partial u} -$$

$$-(\lambda+\mu_1+\mu_2-\lambda e^{ju})H_{11}(u,t).$$

Введем матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda+\mu_1) & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -(\lambda+\mu_2) & \lambda \\ 0 & \mu_2 & 0 & -(\lambda+\mu_1+\mu_2) \end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_0=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{I}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и запишем систему в матричном виде

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t}=\mathbf{H}(u,t)\left\{\mathbf{A}+e^{ju}\mathbf{B}\right\}+j\sigma\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u}\left\{\mathbf{I}_0-e^{-ju}\mathbf{I}_1\right\}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{H}(u,t)=\left\{H_{00}(u,t),H_{10}(u,t),H_{01}(u,t),H_{11}(u,t)\right\}$.

Запишем уравнение, которое получим из (7) путем умножения на единичный вектор столбец **e**

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t}\mathbf{e}=\mathbf{H}(u,t)\left\{\mathbf{A}+e^{ju}\mathbf{B}\right\}\mathbf{e}+j\sigma\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u}\left\{\mathbf{I}_0-e^{-ju}\mathbf{I}_1\right\}\mathbf{e}.$$

Т.к. $\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)\mathbf{e}=0$ и $\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)\mathbf{e}=0$, то $\mathbf{Ae}=-\mathbf{Be}$ и $\mathbf{I}_0\mathbf{e}=\mathbf{I}_1\mathbf{e}$, сделаем соответствующие замены

$$\mathbf{H}(u,t)\left\{-\mathbf{Be}+e^{ju}\mathbf{Be}\right\}+j\sigma\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u}\left\{\mathbf{I}_1\mathbf{e}-e^{-ju}\mathbf{I}_1\mathbf{e}\right\}=\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t}\mathbf{e}$$

и получим скалярное уравнение

$$\mathbf{H}(u,t)\left(e^{ju}-1\right)\mathbf{B}\mathbf{e}+j\sigma e^{-ju}\frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial u}\left(e^{ju}-1\right)\mathbf{I}_1\mathbf{e}=\frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial t}\mathbf{e}.$$

Матричное уравнение (7) и полученное скалярное уравнение запишем в виде системы:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial t}&=\mathbf{H}(u,t)\left\{\mathbf{A}+e^{ju}\mathbf{B}\right\}+j\sigma\frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial u}\left\{\mathbf{I}_0-e^{-ju}\mathbf{I}_1\right\},\\ \frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial t}\mathbf{e}&=\left(e^{ju}-1\right)\left\{\mathbf{H}(u,t)\mathbf{B}+j\sigma e^{-ju}\frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial u}\mathbf{I}_1\right\}\mathbf{e}.\end{aligned}\qquad(8)$$

Данная система уравнений является основной в дальнейших исследованиях. Будем решать ее методом асимптотически диффузионного анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \to 0$).

2.2 Первый этап асимптотического анализа

Обозначив $\sigma = \varepsilon$ и выполнив в системе (8) замены

$$\tau = t\varepsilon,\ u = \varepsilon w,\ \mathbf{H}(u,\ t) = \mathbf{F}(w,\ \tau,\ \varepsilon),$$

перепишем ее в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon\frac{\partial\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}&=\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)\left(\mathbf{A}+e^{j\varepsilon w}\mathbf{B}\right)+j\frac{\partial\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}\left(\mathbf{I}_0-e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I}_1\right),\\ \varepsilon\frac{\partial\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}\mathbf{e}&=\left(e^{j\varepsilon w}-1\right)\left\{\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)\mathbf{B}+je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e}.\end{aligned}\qquad(9)$$

Обозначим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)=\mathbf{F}(w,\tau)\,,\ \mathbf{F}(0,\tau)=\mathbf{r}\,.$$

Вектор-строка **r** определяет двумерное распределение вероятностей состояний (n_1, n_2) приборов. Ниже будет показано, что вектор **r**, удовлетворяющий условию нормировки **re** = 1, является решением матричного уравнения

$$\mathbf{r}\left\{\mathbf{A}+\mathbf{B}-x\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)\right\}=0,$$

коэффициенты которого зависят от некоторой переменной x, поэтому решение **r** будет зависеть от ее значений x, что обозначим как **r** = **r**(x). Решая систему (2) в предельном условии $\varepsilon \to 0$ ($\sigma \to 0$) докажем следующее утверждение.

Теорема 1. В предельном условии $\sigma \to 0$ выполняется равенство

$$\lim_{\sigma\to 0} Me^{jw\sigma i\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)}=e^{jwx(\tau)} \qquad (10)$$

где скалярная функция $x = x(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$x'\left(\tau\right)=\mathbf{r}(x)\left(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0\right)\mathbf{e}\,, \qquad (11)$$

здесь вектор **r**(x) удовлетворяет условию нормировки

$$\mathbf{r}\left(x\right)\mathbf{e}=1, \qquad (12)$$

и является решением матричного уравнения

$$\mathbf{r}(x)\left\{\mathbf{A}+\mathbf{B}-x\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)\right\}=0. \qquad (13)$$

Доказательство. В системе (9) устремим $\varepsilon \to 0$ и, обозначив $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)=\mathbf{F}(w,\tau)$, получим

$$\mathbf{F}(w,\tau)\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)+j\frac{\partial\mathbf{F}(w,\tau)}{\partial w}\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)=0,$$

$$\frac{\partial\mathbf{F}(w,\tau)}{\partial\tau}\mathbf{e}=jw\left\{\mathbf{F}(w,\tau)\mathbf{B}+j\frac{\partial\mathbf{F}(w,\tau)}{\partial w}\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e}. \qquad (14)$$

Решение системы (14) будем искать в виде произведения

$$\mathbf{F}(w,\tau)=\mathbf{r}(x)e^{jwx(\tau)}. \qquad (15)$$

Здесь $x = x(\tau)$ – скалярная функция аргумента τ, которая определяет при $\varepsilon \to 0$, нормированное величиной $\varepsilon = \sigma$, среднее значение $\sigma i(\tau/\sigma)$ числа заявок на орбите. Подставим произведение (15) в систему (14) и получим

$$\mathbf{r}(x)\left\{\mathbf{A}+\mathbf{B}-x\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)\right\}=0, \qquad (16)$$

$$x'\left(\tau\right)=\mathbf{r}(x)\left(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0\right)\mathbf{e}. \qquad (17)$$

В силу того, что скалярная функция $x(\tau)$ аргумента τ, является предельным при $\varepsilon \to 0$, нормированным величиной $\varepsilon = \sigma$, средним значением $\sigma i(\tau/\sigma)$ числа заявок на орбите, то выполняется равенство (10). **Теорема доказана.**

Найдя решение $\mathbf{r}(x)$ системы (16), и подставив его в скалярное уравнение (17), получим решение, которое обозначим как

$$a(x) = \mathbf{r}(x)\left(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0\right)\mathbf{e}. \tag{18}$$

При исследовании RQ-систем методом асимптотически диффузионного анализа, функция $a(x)$ играет важную роль. В доказанной теореме 1 показано, что $a\left(x\right) = x'\left(\tau\right)$, поэтому функция $a(x)$ определяет динамику процесса $x(\tau)$, предельного при $\sigma \to 0$ для нормированного числа $\sigma i(\tau/\sigma)$ заявок на орбите.

Ниже будет показано, что эта функция $a(x)$ имеет смысл коэффициента переноса некоторого диффузионного процесса, определяющего асимптотическое распределение вероятностей $i(t)$ числа заявок на орбите рассматриваемой RQ-системы. Применяя функцию $a(x)$, получим необходимое условие существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе.

2.3 Второй этап асимптотического анализа

В исходной системе уравнений (8) сделаем следующие замены

$$\mathbf{H}(u,t) = e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)}\mathbf{H}^{(1)}(u,t), \tag{19}$$

для векторной функции $\mathbf{H}^{(1)}(u, t)$ получим систему

$$\frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)\mathbf{H}^{(1)}(u,t) = \mathbf{H}^{(1)}(u,t)\left(\mathbf{A} + e^{ju}\mathbf{B}\right) +$$

$$+ j\sigma\left[\frac{j}{\sigma}x(\sigma t)\mathbf{H}^{(1)}(u,t) + \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u,t)}{\partial u}\right]\left(\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1\right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u,t)}{\partial t}\mathbf{e} + jux'(\sigma t)\mathbf{H}^{(1)}(u,t)\mathbf{e} = \left(e^{ju} - 1\right)\times$$

$$\times\left\{\mathbf{H}^{(1)}(u,t)\mathbf{B} + j\sigma e^{-ju}\frac{j}{\sigma}x(\sigma t)\mathbf{H}^{(1)}(u,t)\mathbf{I}_0 + j\sigma e^{-ju}\frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u,t)}{\partial u}\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e}.$$

Учитывая обозначение (18) перепишем систему в виде

$$\frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u,t)}{\partial t} + jua(x)\mathbf{H}^{(1)}(u,t) = \mathbf{H}^{(1)}(u,t)\left(\mathbf{A} + e^{ju}\mathbf{B} - x\left(\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1\right)\right) +$$

$$+ j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u,t)}{\partial u}\left(\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1\right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u,t)}{\partial t}\mathbf{e} + jua(x)\mathbf{H}^{(1)}(u,t)\mathbf{e} = \left(e^{ju} - 1\right)\times$$

$$\times\left\{\mathbf{H}^{(1)}(u,t)\left(\mathbf{B} - e^{-ju}x\mathbf{I}_0\right) + j\sigma e^{-ju}\frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u,t)}{\partial u}\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e}. \qquad (20)$$

Замена выполняется с целью асимптотического центрирования случайного процесса $i(t)$, так как $\mathbf{H}^{(1)}(u,t)$ является векторной характеристической функцией центрированного случайного процесса $i(t) - \frac{1}{\sigma}x(\sigma t)$, в котором функция $x(\tau)$ получена на первом этапе асимптотического анализа.

Обозначив $\sigma = \varepsilon^2$ в системе (20) и выполнив замены

$$\tau = t\varepsilon^2,\ u = \varepsilon w,\ \mathbf{H}^{(1)}(u,\ t) = \mathbf{F}^{(1)}(w,\ \tau,\ \varepsilon),$$

перепишем ее в виде

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x)\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) = \mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)\left(\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w}\mathbf{B} - x\left(\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I}_1\right)\right) +$$

$$+ j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}\left(\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I}_1\right),$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}\mathbf{e} + j\varepsilon w a(x)\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)\mathbf{e} =$$

$$= \left(e^{j\varepsilon w} - 1\right)\left(\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)\left(\mathbf{B} - e^{-ju}x\mathbf{I}_0\right) + e^{-j\varepsilon w} j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}\mathbf{I}_0 \right)\mathbf{e}. \qquad (21)$$

Обозначим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) = \mathbf{F}^{(1)}(w,\tau), \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = \frac{\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau)}{\partial\tau},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} = \frac{\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau)}{\partial w}$$

и докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Функция $\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau)$ имеет вид

$$\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau) = \Phi\left(w,\tau\right)\mathbf{r}(x),$$

где вектор-строка **r**(*x*), зависящий от значений параметра *x*, определен в Теореме 1 своими векторными компонентами $\mathbf{r}_{n_1 n_2}(x)$, а скалярная функция $\Phi\left(w,\tau\right)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} = a'(x)w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w} + b(x)\frac{\left(jw\right)^2}{2}\Phi(w,\tau). \qquad (22)$$

Здесь функция *a*(*x*) определяется равенством (18), а скалярная функция *b*(*x*) имеет вид

$$b(x) = a(x) + 2\mathbf{g}(x)\left(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0\right)\mathbf{e} + 2x\mathbf{r}(x)\mathbf{e}, \qquad (23)$$

где вектор **g**(*x*) определяется системой уравнений

$$\mathbf{g}(x)\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}+x\left(\mathbf{I}_1-\mathbf{I}_0\right)\right)=a(x)\mathbf{r}(x)+\mathbf{r}(x)\left(x\mathbf{I}_0-\mathbf{B}\right),$$

$$\mathbf{g}(x)\mathbf{e}=0. \qquad (24)$$

Доказательство. Запишем первое уравнение системы (21) с точностью до $O\left(\varepsilon^2\right)$

$$j\varepsilon w a(x)\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)=\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}+j\varepsilon w\mathbf{B}-x\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1+j\varepsilon w\mathbf{I}_1\right)\right)+$$

$$+j\varepsilon\frac{\partial\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)+O\left(\varepsilon^2\right).$$

Решение этого уравнения запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)=\Phi\left(w,\tau\right)\left\{\mathbf{r}(x)+j\varepsilon w\mathbf{f}(x)\right\}+O\left(\varepsilon^2\right), \qquad (25)$$

где $\Phi(w,\tau)$ – некоторая скалярная функция, вид которой определим ниже. Получим

$$j\varepsilon w a(x)\Phi\left(w,\tau\right)\left\{\mathbf{r}(x)+j\varepsilon w\mathbf{f}(x)\right\}=$$

$$=\Phi\left(w,\tau\right)\left\{\mathbf{r}(x)+j\varepsilon w\mathbf{f}(x)\right\}\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}+j\varepsilon w\mathbf{B}-x\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1+j\varepsilon w\mathbf{I}_1\right)\right)+$$

$$+j\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi\left(w,\tau\right)}{\partial w}\left\{\mathbf{r}(x)+j\varepsilon w\mathbf{f}(x)\right\}+\Phi\left(w,\tau\right)j\varepsilon\mathbf{f}(x)\right)\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)+O\left(\varepsilon^2\right),$$

тогда

$$j\varepsilon w a(x)\Phi\left(w,\tau\right)\mathbf{r}(x)=\Phi\left(w,\tau\right)\left\{\mathbf{r}(x)\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}-x\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)\right)+\right.$$

$$\left.+j\varepsilon w\left[\mathbf{f}(x)\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}-x\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)\right)+\mathbf{r}(x)\left(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0\right)\right]\right\}+$$

$$+ j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w} \mathbf{r}(x)\left(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1\right) + O\left(\varepsilon^2\right).$$

Принимая во внимание равенство (18), разделим последнее уравнение на $j\varepsilon$ и устремим $\varepsilon \to 0$, получим

$$a(x)\mathbf{r}(x) =$$

$$= \mathbf{f}(x)\left(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x\left(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1\right)\right) + \mathbf{r}(x)\left(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0\right) + \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)} \mathbf{r}(x)\left(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1\right).$$

Последнее равенство перепишем в виде неоднородного уравнения

$$\mathbf{f}(x)\left(\mathbf{A} + \mathbf{B} + x\left(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0\right)\right) =$$

$$= a(x)\mathbf{r}(x) - \mathbf{r}(x)\left(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0\right) + \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)} \mathbf{r}(x)\left(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0\right). \qquad (26)$$

Применяя принцип суперпозиции для неоднородных систем, решение $\mathbf{f}(x)$ этого уравнения запишем в виде суммы

$$\mathbf{f}(x) = C\mathbf{r}(x) + \mathbf{g}(x) - \boldsymbol{\varphi}(x) \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}, \qquad (27)$$

которое подставим в (26), получим уравнения

$$\boldsymbol{\varphi}(x)\left(\mathbf{A} + \mathbf{B} + x\left(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0\right)\right) = \mathbf{r}(x)\left(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1\right), \qquad (28)$$

$$\mathbf{g}(x)\left(\mathbf{A} + \mathbf{B} + x\left(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0\right)\right) = a(x)\mathbf{r}(x) + \mathbf{r}(x)\left(x\mathbf{I}_0 - \mathbf{B}\right). \qquad (29)$$

Отметим, что уравнение (29), определяющее вектор $\mathbf{g}(x)$, совпадает с первым уравнением (24), следовательно, утверждение (24) формулировки теоремы верно. Теперь рассмотрим уравнение (26). Продифференцируем его по x, получим равенство

$$\frac{\partial \mathbf{r}(x)}{\partial x}\left\{\mathbf{A}+\mathbf{B}-x\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)\right\}+\mathbf{r}(x)\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)=0.$$

Учитывая последнее уравнение и уравнение (28) для $\boldsymbol{\varphi}(x)$, запишем важное равенство

$$\boldsymbol{\varphi}(x)=\frac{\partial \mathbf{r}(x)}{\partial x}, \tag{30}$$

В силу условия нормировки (12), для вектора $\boldsymbol{\varphi}(x)$ выполняется дополнительное условие $\boldsymbol{\varphi}(x)\mathbf{e} = 0$.

В силу (29) вектор $\mathbf{g}(x)$ является частным решением неоднородной системы, поэтому он удовлетворяет некоторому дополнительному условию, которое будем выбирать в виде $\mathbf{g}(x)\mathbf{e} = 0$, тогда решение $\mathbf{g}(x)$ системы (29), определяется однозначно системой (24).

Теперь рассмотрим второе скалярное уравнение системы (21), в которое подставим разложение (25) и перепишем с точностью до $O\left(\varepsilon^3\right)$

$$\varepsilon^2\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau}+j\varepsilon w a(x)\Phi\left(w,\tau\right)\left\{1+j\varepsilon w\mathbf{f}(x)\mathbf{e}\right\}=$$

$$=\left(j\varepsilon w+\frac{\left(j\varepsilon w\right)^2}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\Phi\left(w,\tau\right)\left\{\mathbf{r}(x)+j\varepsilon w\mathbf{f}(x)\right\}\left(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0+j\varepsilon w x\mathbf{I}_0\right)+\right.$$

$$+ j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w} \mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0 \mathbf{e} \Big) + O\left(\varepsilon^3\right).$$

Имеем

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) \Phi\left(w,\tau\right) + \left(j\varepsilon w\right)^2 a(x) \Phi\left(w,\tau\right) \mathbf{f}(x)\mathbf{e} =$$

$$= \Phi\left(w,\tau\right) \Big\{ \left(j\varepsilon w\right)^2 \mathbf{f}(x)\left(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0\right) + \left(j\varepsilon w\right)^2 \mathbf{r}(x) x\mathbf{I}_0 +$$

$$+ \frac{\left(j\varepsilon w\right)^2}{2} \mathbf{r}(x)\left(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0\right) + \left(j\varepsilon w\right)^2 \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w} \mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0 \Big\} \mathbf{e} + O\left(\varepsilon^3\right).$$

Тогда, применяя равенство (18), получим

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} + \left(j\varepsilon w\right)^2 a(x) \Phi\left(w,\tau\right) \mathbf{f}(x)\mathbf{e} =$$

$$= \Phi\left(w,\tau\right) \Big\{ \left(j\varepsilon w\right)^2 \mathbf{f}(x)\left(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0\right) + \left(j\varepsilon w\right)^2 \mathbf{r}(x) x\mathbf{I}_0 +$$

$$+ \frac{\left(j\varepsilon w\right)^2}{2} a(x) + \left(j\varepsilon w\right)^2 \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w} \mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0 \Big\} \mathbf{e} + O\left(\varepsilon^3\right).$$

Разделив последнее уравнение на ε^2, при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} = \Phi\left(w,\tau\right) \Big\{ \left(jw\right)^2 \mathbf{f}(x)\left(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0\right) + \left(jw\right)^2 \mathbf{r}(x) x\mathbf{I}_0 + \frac{\left(jw\right)^2}{2} a(x) -$$

$$- \left(jw\right)^2 a(x)\mathbf{f}(x) + \left(jw\right)^2 \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w} \mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0 \Big\} \mathbf{e},$$

получим уравнение

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial\tau}{\Phi(w,\tau)}=\frac{(jw)^2}{2}\Big\{2\mathbf{f}(x)\big(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0\big)+2\mathbf{r}(x)x\mathbf{I}_0+a(x)-$$

$$-2a(x)\mathbf{f}(x)+\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w}\mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0\Big\}\mathbf{e},$$

в которое подставим разложение (27)

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial\tau}{\Phi(w,\tau)}=\frac{(jw)^2}{2}\Big\{2\mathbf{g}(x)\big(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0\big)\mathbf{e}+2\mathbf{r}(x)x\mathbf{I}_0\mathbf{e}+a(x)\Big\}-$$

$$+w\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)}\big(\boldsymbol{\varphi}(x)\big(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0\big)-\mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0\big)\mathbf{e}.$$

Обозначив

$$b(x)=2\mathbf{g}(x)\big(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0\big)\mathbf{e}+2x\mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0+a(x),$$

уравнение (27) перепишем в виде

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}=w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}\big(\boldsymbol{\varphi}(x)\big(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0\big)\mathbf{e}-\mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0\mathbf{e}\big)+\frac{(jw)^2}{2}b(x)\Phi(w,\tau). \quad (31)$$

Рассмотрим отдельно выражение

$$\boldsymbol{\varphi}(x)\big(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0\big)\mathbf{e}-\mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0\mathbf{e}.$$

Применяя (30) к последнему равенству, имеем

$$\frac{\partial\mathbf{r}(x)}{\partial x}\big(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0\big)\mathbf{e}-\mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0\mathbf{e}. \quad (32)$$

Из (18) рассмотрим выражение

$$a(x) = \mathbf{r}(x)\left(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0\right)\mathbf{e}.$$

Продифференцируем $a(x)$ по x, и принимая во внимание, что вектор $\mathbf{r}(x)$ как решение системы (11), зависит от x, получим

$$a'(x) = \frac{\partial \mathbf{r}(x)}{\partial x}\left(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0\right)\mathbf{e} - \mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0.$$

Сравнивая последнее равенство и равенство (32), уравнение (31) перепишем в виде

$$\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} = a'(x)w\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w} + b(x)\frac{\left(jw\right)^2}{2}\Phi(w,\tau),$$

которое совпадает с (22). **Теорема доказана.**

Ниже будет показано, что функция $b(x)$ имеет смысл коэффициента диффузии того диффузионного процесса, для которого коэффициентом переноса является функция $a(x)$, определяемая равенством (18).

Таким образом, определены функции $a(x)$ равенством (18) и $b(x)$ равенством (23). Ниже будет показано их применение в методе асимптотически-диффузионного анализа предложенной системы.

2.4 Метод асимптотически диффузионного анализа

В этом разделе рассмотрим реализацию метода асимптотически диффузионного анализа для нахождения распределения вероятностей значений предельного при $\sigma \to 0$ процесса для числа $i(t)$ заявок на орбите рассматриваемой системы с общей орбитой.

Лемма 1. Предельный при $\sigma \to 0$ случайный процесс

$$y(\tau) = \lim_{\sigma \to 0} \sqrt{\sigma} \left\{ i(\tau) - \frac{1}{\sigma} x(\tau) \right\}$$

является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dy(\tau) = a'(x) y d\tau + \sqrt{b(x)} dw(\tau), \tag{33}$$

зависящего от значений непрерывного параметра x.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (22) из Теоремы 2

$$\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} = a'(x) w \frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w} + b(x) \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w,\tau),$$

для которого равенствами (18) и (23) найдены функции $a(x)$ и $b(x)$.

Решение $\Phi(w, \tau)$ этого уравнения определяет предельную при $\sigma \to 0$ характеристическую функцию центрированного и нормированного процесса $\sqrt{\sigma} \left\{ i(\tau) - \frac{1}{\sigma} x(\tau) \right\}$ числа $i(t)$ заявок на орбите, для плотности распределения вероятностей рассматриваемой RQ-системы.

Выполнив в этом уравнении обратное преобразование Фурье по переменной w, для плотности распределения вероятностей $p(y,\tau)$ предельного процесса $y(\tau)$ получим уравнение

$$\frac{\partial p(y,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y} \{ a'(x) y p(y,\tau) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ b(x) p(y,\tau) \},$$

которое является уравнением Фоккера-Планка для плотности распределения вероятностей $p(y, \tau)$ значений центрированного и нормированного числа заявок на орбите, а предельный случайный процесс $y(\tau)$ является диффузионным с коэффициентом переноса $a'(x)y$ и коэффициентом диффузии $b(x)$. Следовательно, диффузионный процесс $y(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения, совпадающего с (33). **Лемма доказана.**

Как указано выше, $\varepsilon = \sqrt{\sigma}$. Рассмотрим случайный процесс

$$z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau),$$

который является суммой нормированного среднего и нормированного и центрированного числа заявок на орбите. Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. Случайный процесс $z(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dz(\tau) = a(z)d\tau + \sqrt{\sigma b(z)}dw(\tau) \qquad (34)$$

с точностью до бесконечно малых $O(\varepsilon^2)$.

Доказательство. Так как $x(\tau)$ является решением дифференциального уравнения $dx(\tau) = a(x)d\tau$, процесс $y(\tau)$ удовлетворяет уравнению (33), то выполняется равенство

$$dz(\tau) = d\left(x(\tau) + \varepsilon y(\tau)\right) = \left(a(x) + \varepsilon y a'(x)\right)d\tau + \varepsilon\sqrt{b(x)}dw(\tau). \qquad (35)$$

Сомножители при дифференциалах в этом равенстве запишем в виде

$$a(x) + \varepsilon y a'(x) = a(x + \varepsilon y) + O\left(\varepsilon^2\right) = a(z) + O\left(\varepsilon^2\right),$$

$$\varepsilon\sqrt{b(x)} = \varepsilon\sqrt{b(x+\varepsilon y)+O(\varepsilon)} = \varepsilon\left(\sqrt{b(z)}+O(\varepsilon)\right) = \sqrt{\sigma b(z)}+O\left(\varepsilon^2\right),$$

а равенство (35)

$$dz(\tau) = a(z)d\tau + \sqrt{\sigma b(z)}dw(\tau) + O\left(\varepsilon^2\right)$$

с точностью до бесконечно малых порядка $O\left(\varepsilon^2\right)$, которое совпадает с (34).

Лемма доказана.

Рассмотрим стационарную плотность распределения вероятностей для процесса $z(\tau)$, т.е. будем полагать, что система функционирует в стационарном режиме, тогда

$$s(z,\tau) = s(z) = \frac{\partial P\{z(\tau) < z\}}{\partial z}.$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Стационарная плотность распределения вероятностей $s(z)$ случайного процесса $z(\tau)$ имеет вид:

$$s(z) = \frac{C}{b(z)}\exp\left\{\frac{2}{\sigma}\int_0^z \frac{a(x)}{b(x)}dx\right\},$$

где C – нормирующая константа.

Доказательство. Так как $z(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения (34), следовательно, этот процесс является диффузионным с коэффициентом переноса $a(z)$ и коэффициентом диффузии $b(z)$, поэтому его стационарная плотность распределения вероятностей $s(z)$ является решением уравнения Фоккера-Планка

$$-\frac{\partial}{\partial z}\{a(z)s(z)\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\sigma b(z)s(z)\}=0,$$

которое является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\left(-a(z)s(z)\right)'+\frac{\sigma}{2}\left(b(z)s(z)\right)''=0,$$

$$-a(z)s(z)+\frac{\sigma}{2}\left(b(z)s(z)\right)'=0.$$

Решая это дифференциальное уравнение, учитывая условие нормировки для плотности и краевое условие $s(\infty)=0$, получим плотность распределения вероятностей $s(z)$ нормированного числа заявок на орбите в виде

$$s(z)=\frac{C}{b(z)}\exp\left\{\frac{2}{\sigma}\int_0^z\frac{a(x)}{b(x)}dx\right\}. \qquad (36)$$

Теорема доказана.

2.5 Анализ области применимости асимптотического результата

При исследовании ставилась задача нахождения аппроксимации дискретного распределения вероятностей $P(i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой тандемной системы с повторными вызовами. Для построения аппроксимации дискретного распределения $P(i)$ вернемся к плотности $s(z)$ случайного процесса $z(\tau)$. Переход от плотности распределения $s(z)$ непрерывного случайного процесса $z(\tau)$ к дискретному распределению $P(i)$ дискретного случайного процесса $i(\tau)$ можно

осуществить разными способами. Укажем один из них. В силу равенства (36), запишем неотрицательную функцию $G(i)$ дискретного аргумента i в виде

$$G(i) = \frac{C}{b(\sigma i)} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^{\sigma i} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}.$$

Принимая во внимание условие нормировки, запишем следующее дискретное распределение вероятностей

$$P_1(i) = G(i) \Big/ \sum_{i=0}^{\infty} G(i).$$

Предложенное дискретное распределение вероятностей $P_1(i)$ будем применять для аппроксимации распределения вероятностей $P(i) = P\{i(t) = i\}$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой тандемной системы.

Ранее было получено распределение вероятностей числа заявок на орбите в рассматриваемой системе [77] с помощью метода асимптотического анализа. Обозначим его как $P_2(i)$.

Точность аппроксимации определим с помощью расстояния Колмогорова [78], рассчитываемого по формуле

$$\Delta_{v=1,2} = \max_{k \geq 0} \left| \sum_{i=0}^{k} \left(P_v(i) - P(i) \right) \right|,$$

где $P(i)$ – распределение вероятностей числа заявок на орбите, полученное с помощью метода имитационного моделирования.

В таблице 1 содержатся расстояния Колмогорова при $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 2$ для различных значений σ и ρ, загрузки системы, определяемой формулой

$$\rho = \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2}.$$

В качестве «удовлетворительного» значения расстояния Колмогорова приняли значение 0,05 [79].

Таблица 1 – Расстояние Колмогорова между асимптотическим и эмпирическим распределениями вероятностей при различных загрузках системы

σ	ρ = 0.5	ρ = 0.6	ρ = 0.7	ρ = 0.8	ρ = 0.9	
2	0.061	0.041	0.021	0.006	0.009	Δ_1
	0.094	0.158	0.191	0.256	0.363	Δ_2
1.3	0.049	0.025	0.007	0.017	0.018	Δ_1
	0.101	0.134	0.176	0.224	0.305	Δ_2
0.5	0.011	0.027	0.032	0.030	0.021	Δ_1
	0.142	0.125	0.112	0.146	0.198	Δ_2
0.1	0.033	0.023	0.014	0.012	0.008	Δ_1
	0.071	0.049	0.055	0.071	0.097	Δ_2
0.05	0.019	0.012	0.008	0.035	0.003	Δ_1
	0.034	0.039	0.040	0.036	0.074	Δ_2
0.02	0.013	0.009	0.002	0.011	0.004	Δ_1
	0.022	0.024	0.026	0.031	0.049	Δ_2

На рисунках 2 – 4 показаны плотности распределений вероятностей числа заявок на орбите. Сплошной линией показано распределение, полученное с помощью имитационного моделирования, пунктирной – аппроксимация, полученная методом асимптотически диффузионного анализа (P1), точечной – аппроксимация, полученная методом асимптотического анализа (P2).

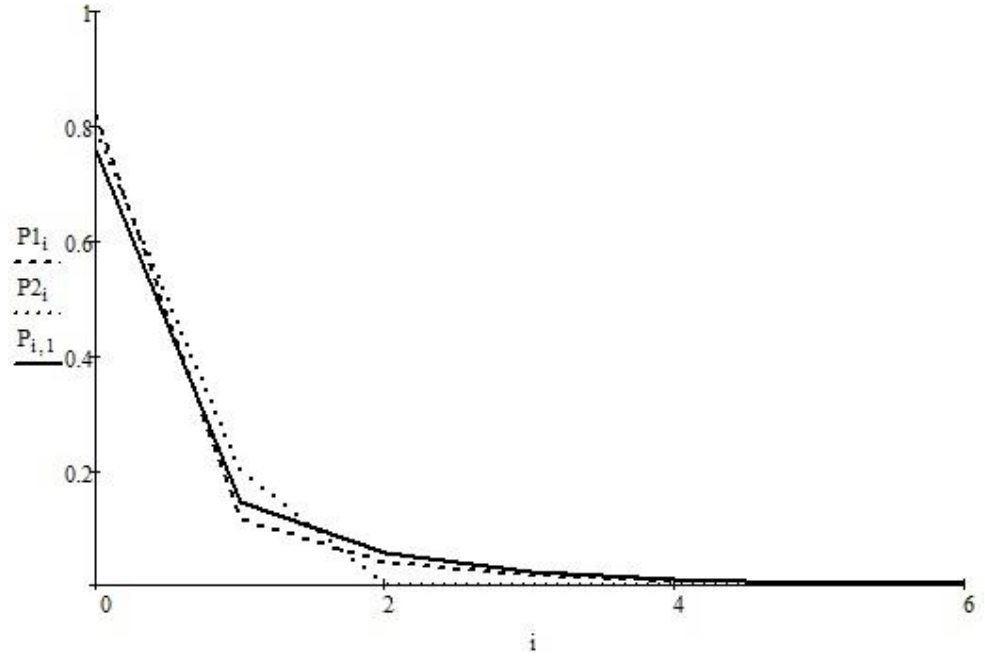


Рисунок 3 – Распределения вероятностей числа заявок на орбите при ρ = 0.5, σ = 2

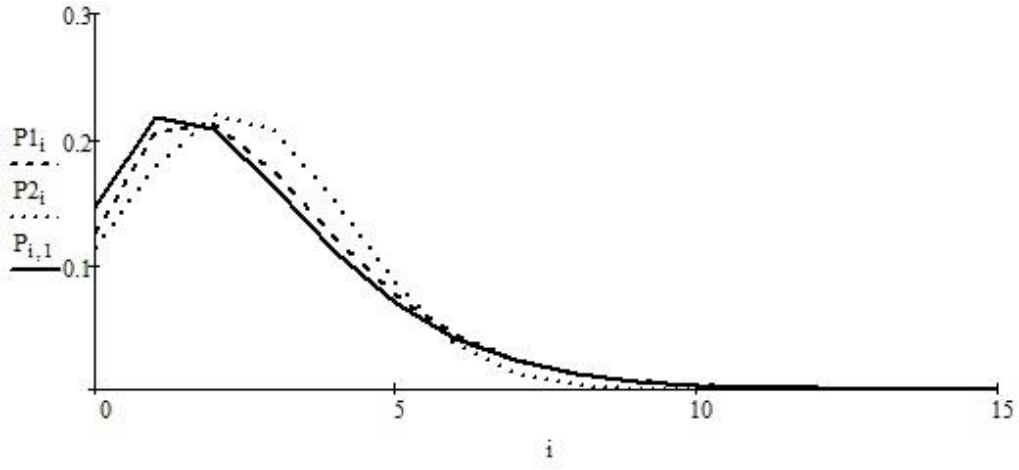


Рисунок 4 – Распределения вероятностей числа заявок на орбите при ρ = 0.5, σ = 0.1

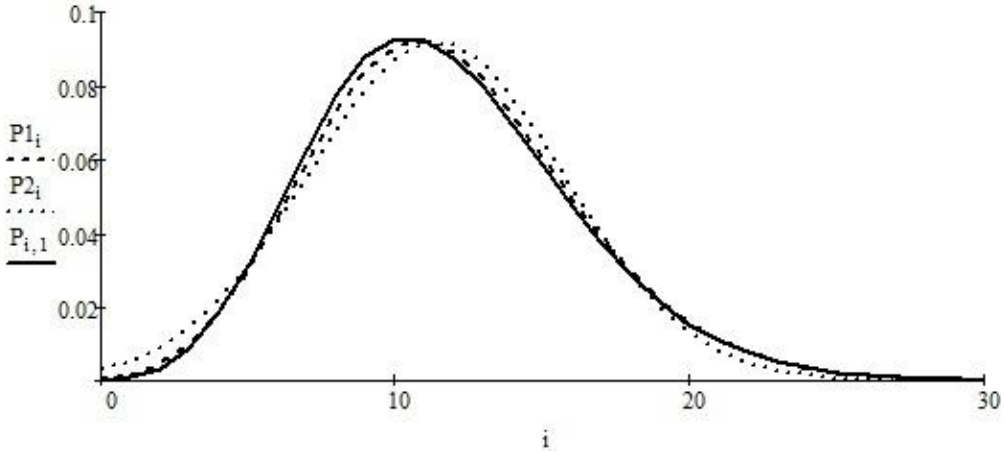


Рисунок 5 – Распределения вероятностей числа заявок на орбите при ρ = 0.5, σ = 0.02

Как можно заметить, что точность аппроксимаций возрастает с уменьшением значений ρ и σ. Аппроксимация $P_1(i)$ применима для значений $\sigma < 1.3$, при которых расстояние Колмогорова не превышает 0.05, а $P_2(i)$ – $\sigma < 0.02$, что примерно в 7,5 раз меньше. Следовательно, метод асимптотически диффузионного анализа, используемый в данной работе, является более точным.

Таким образом, во второй главе рассмотрена тандемная система массового обслуживания с повторными вызовами, общей орбитой и простейшим входящим потоком. Используя метод асимптотического диффузионного анализа при условии большой задержки заявок на орбите, получены параметры диффузионного процесса. Распределение вероятности этого процесса позволило построить аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на орбите в рассматриваемой системе.

Также определена область применимости аналитических результатов, полученных методом асимптотического диффузионного анализа и методом асимптотического анализа на основе метода имитационного моделирования. Метод асимптотического диффузионного анализа показал более точные результаты.

Результаты исследования были представлены на XXVI Международной конференции по методам и приложениям аналитического и стохастического моделирования (Цукуба, Япония, 13 – 14 декабря 2021 г.), по итогом которой вышла публикация [80].

3 Исследование тандемной RQ-системы с общей орбитой и входящим MMPP-потоком

3.1 Описание математической модели и постановка задачи

В следующем исследовании базовая математическая модель системы, описанная в первой главе, была усложнена: на вход системы поступает MMPP поток (рисунок 6). Если заявка входящего потока обнаруживает первый прибор свободным, то она встает на прибор и обслуживается в течении экспоненциально-распределенного времени с параметром μ_1, после чего обращается ко второму прибору. Если второй прибор свободен, заявка встает на него и обслуживается в течении экспоненциально-распределенного времени с параметром μ_2. Если заявка входящего потока застает первый прибор занятым, она мгновенно отправляется на орбиту, где после случайной экспоненциально-распределенной задержки с параметром σ снова пытается встать на обслуживание на первый прибор. Если заявка после обслуживания на первом приборе застает второй прибор занятым, она мгновенно отправляется на ту же орбиту, где после случайной экспоненциально-распределенной задержки с параметром σ снова пытается встать на обслуживание на первый прибор.

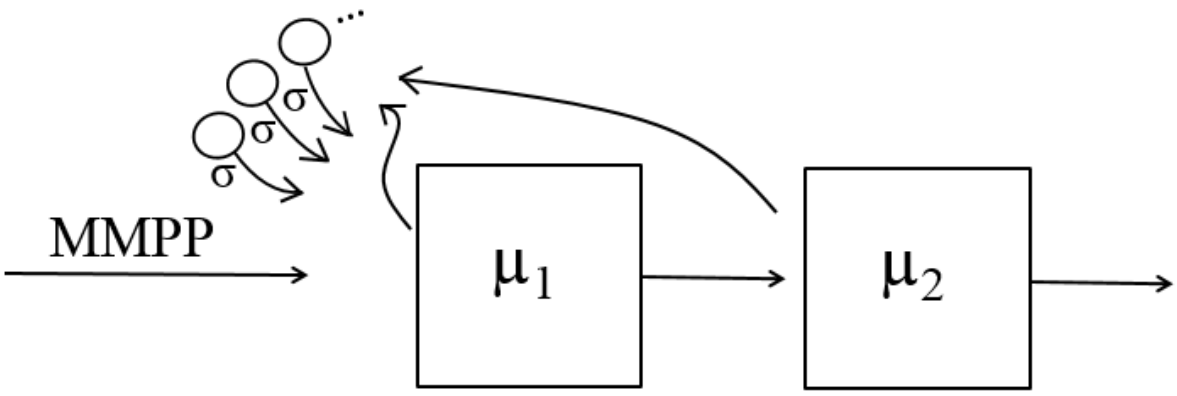


Рисунок 6 – Тандемная система с повторными вызовами и входящим MMPP потоком

Введем обозначения: процесс $k(t)$ – цепь Маркова, управляющая MMPP-потоком, заданная матрицей инфинитезимальных характеристик **Q** с элементами q_{vk}, $v,k=\overline{1,K}$; набор неотрицательных величин $\lambda_k \geq 0$; процесс $n_1(t)$ – состояние первого прибора в момент времени t: 0, если прибор свободен; 1, если прибор занят; процесс $n_2(t)$ – состояние второго прибора в момент времени t: 0, если прибор свободен; 1, если прибор занят; процесс $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t.

В исследовании также ставится задача нахождения распределений вероятностей числа заявок $i(t)$ на орбите и состояний приборов в рассматриваемой системе.

3.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Обозначим вероятности

$$P_{n_1 n_2}(k,i,t) = P\{n_1(t)=n_1, n_2(t)=n_2, k(t)=k, i(t)=i\};\ n_1 = 0, 1;\ n_2 = 0, 1. \qquad (37)$$

Случайный процесс $\{n_1(t),\ n_2(t),\ k(t),\ i(t)\}$ является марковским. Для распределения вероятностей (37) (37) составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова, запишем равенства

$$P_{00}(k,i,t+\Delta t) = P_{00}(k,i,t)(1-\lambda_k \Delta t)(1-i\sigma\Delta t)(1+q_{kk}\Delta t) +$$
$$+P_{01}(k,i,t)\mu_2 \Delta t + \sum_{v\neq k} P_{00}(v,i,t) q_{vk}\Delta t + o(\Delta t),$$
$$P_{10}(k,i,t+\Delta t) =$$
$$= P_{10}(k,i,t)(1-\lambda_k \Delta t)(1-\mu_1 \Delta t)(1+q_{kk}\Delta t) + P_{10}(k,i-1,t)\lambda_k \Delta t +$$
$$+P_{00}(k,i,t)\lambda_k \Delta t + P_{00}(k,i+1,t)(i+1)\sigma\Delta t +$$
$$+\sum_{v\neq k} P_{10}(v,i,t) q_{vk}\Delta t + P_{11}(k,i,t)\mu_2 \Delta t + o(\Delta t),$$
$$P_{01}(k,i,t+\Delta t) = P_{01}(k,i,t)(1-\lambda_k \Delta t)(1-\mu_2 \Delta t)(1-i\sigma\Delta t)(1+q_{kk}\Delta t) +$$

$$+P_{10}(k,i,t)\mu_1\Delta t + P_{11}(k,i-1,t)\mu_1\Delta t + \sum_{v\neq k} P_{10}(v,i,t)q_{vk}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_{11}(k,i,t+\Delta t) = P_{11}(k,i,t)(1-\lambda_k\Delta t)(1-\mu_1\Delta t)(1-\mu_2\Delta t)(1+q_{kk}\Delta t) +$$

$$+P_{11}(k,i-1,t)\lambda_k\Delta t + \sum_{v\neq k} P_{11}(v,i,t)q_{vk}\Delta t + o(\Delta t).$$

Имеем

$$\frac{\partial P_{00}(k,i,t)}{\partial t} = -(\lambda_k + i\sigma)P_{00}(k,i,t) + \mu_2 P_{01}(k,i,t)\mu_2 + \sum_v P_{00}(v,i,t)q_{vk},$$

$$\frac{\partial P_{10}(k,i,t)}{\partial t} = -(\lambda_k + \mu_1)P_{10}(k,i,t) + \lambda_k P_{10}(k,i-1,t) +$$

$$+\lambda_k P_{00}(k,i,t) + (i+1)\sigma P_{00}(k,i+1,t) + \mu_2 P_{11}(k,i,t) + \sum_v P_{10}(v,i,t)q_{vk},$$

$$\frac{\partial P_{01}(k,i,t)}{\partial t} = -(\lambda_k + \mu_2 + i\sigma)P_{01}(k,i,t) +$$

$$+\mu_1 P_{10}(k,i,t) + \mu_1 P_{11}(k,i-1,t) + \sum_v P_{10}(v,i,t)q_{vk},$$

$$\frac{\partial P_{11}(k,i,t)}{\partial t} = -(\lambda_k + \mu_1 + \mu_2 + i\sigma)P_{11}(k,i,t) +$$

$$+\lambda_k P_{11}(k,i-1,t) + \sum_v P_{11}(v,i,t)q_{vk}.$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$

$$H_{n_1 n_2}(k,u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_{n_1 n_2}(k,i,t)$$

и перепишем систему в следующем виде:

$$\frac{\partial H_{00}(k,u,t)}{\partial t} = -\lambda_k H_{00}(k,u,t) + \mu_2 H_{01}(k,u,t) + \sum_v H_{00}(v,u,t)q_{vk} +$$

$$+ j\sigma \frac{\partial H_{00}(k,u,t)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial H_{10}(k,u,t)}{\partial t} = \left(\lambda_k \left(e^{ju} - 1\right) - \mu_1\right) H_{10}(k,u,t) +$$

$$+\lambda_k H_{00}(k,u,t) + \mu_2 H_{11}(k,u,t) + \sum_v H_{10}(v,u,t) q_{vk} - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_{00}(k,u,t)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial H_{01}(k,u,t)}{\partial t} = -(\lambda_k + \mu_2) H_{01}(k,u,t) +$$

$$+\mu_1 H_{10}(k,u,t) + \mu_1 e^{ju} H_{11}(k,u,t) + \sum_v H_{10}(v,u,t) q_{vk} + j\sigma \frac{\partial H_{01}(k,u,t)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial H_{11}(k,u,t)}{\partial t} = \left(\lambda_k \left(e^{ju} - 1\right) - \mu_1 - \mu_2\right) H_{11}(k,u,t) +$$

$$+\sum_v H_{11}(v,u,t) q_{vk} + j\sigma \frac{\partial H_{11}(k,u,t)}{\partial u}. \qquad (38)$$

Для компактности дальнейших выкладок определим вектор-строки

$$\mathbf{H}_{n_1 n_2}(u,t) = \left\{H_{n_1 n_2}(1,u,t), H_{n_1 n_2}(2,u,t), ..., H_{n_1 n_2}(K,u,t)\right\},\ k = \overline{1,K},$$

вектор строку

$$\mathbf{H}(u, t) = \{\mathbf{H}_{00}(u, t), \mathbf{H}_{10}(u, t), \mathbf{H}_{01}(u, t), \mathbf{H}_{11}(u, t)\}$$

и блочные матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} & \mathbf{\Lambda} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q} - (\mathbf{\Lambda} + \mu_1 \mathbf{I}) & \mu_1 \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mu_2 \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{Q} - (\mathbf{\Lambda} + \mu_2 \mathbf{I}) & \mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{O} & \mu_2 \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{Q} - (\mathbf{\Lambda} + \mu_1 \mathbf{I} + \mu_2 \mathbf{I}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{\Lambda}&\mathbf{O}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{O}&\mu_1\mathbf{I}&\mathbf{\Lambda}\end{bmatrix}\quad \mathbf{I}_0=\begin{bmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{I}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{O}\end{bmatrix}\quad \mathbf{I}_1=\begin{bmatrix}\mathbf{O}&\mathbf{I}&\mathbf{O}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{O}\\ \mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{I}\\ \mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{O}\end{bmatrix}.$$

Все блоки матриц имеют размерность $K\times K$, а **O** – нулевой блок размерности $K\times K$. Используя указанные матрицы систему уравнений (38) для вектор-строки $\mathbf{H}(u, t)$ перепишем в компактном виде:

$$\frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial t}=\mathbf{H}(u,t)\left\{\mathbf{A}+e^{ju}\mathbf{B}\right\}+j\sigma\frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial u}\left\{\mathbf{I}_0-e^{-ju}\mathbf{I}_1\right\}. \qquad (39)$$

Просуммируем все уравнения системы (39) домножением на единичный вектор столбец **e**, размерности $4K$:

$$\frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial t}\mathbf{e}=\mathbf{H}(u,t)\left\{\mathbf{A}+e^{ju}\mathbf{B}\right\}\mathbf{e}+j\sigma\frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial u}\left\{\mathbf{I}_0-e^{-ju}\mathbf{I}_1\right\}\mathbf{e}.$$

Учитывая $\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)\mathbf{e}=0$ и $\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)\mathbf{e}=0$, получим скалярное равенство:

$$\frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial t}\mathbf{e}=\left(e^{ju}-1\right)\left\{\mathbf{H}(u,t)\mathbf{B}+j\sigma e^{-ju}\frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial u}\mathbf{I}_1\right\}\mathbf{e}.$$

Матричное уравнение (39) и полученное скалярное уравнение имеют вид:

$$\frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial t}=\mathbf{H}(u,t)\left\{\mathbf{A}+e^{ju}\mathbf{B}\right\}+j\sigma\frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial u}\left\{\mathbf{I}_0-e^{-ju}\mathbf{I}_1\right\},$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial t}\mathbf{e}=\left(e^{ju}-1\right)\left\{\mathbf{H}(u,t)\mathbf{B}+j\sigma e^{-ju}\frac{\partial\mathbf{H}(u,t)}{\partial u}\mathbf{I}_1\right\}\mathbf{e}. \qquad (40)$$

Эта система уравнений является основной в дальнейших исследованиях и имеет схожий вид с системой (8). Отличается только вид матриц и вектор-строк. Ее решение найдено методом асимптотически диффузионного анализа в предельном условии $\sigma \to 0$ в предыдущей главе, поэтому в этой опущены первый и второй этапы асимптотического анализа, а также метод диффузионного анализа.

3.3 Условие существования стационарного режима

Для существования стационарного режима в исследуемой системе необходимо выполнение неравенства $\lim\limits_{x\to\infty} a(x) < 0$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 4. Необходимым условием существования стационарного режима в рассматриваемой системе является неравенство:

$$\mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}_1 < \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Здесь вектор $\mathbf{r}_1$ – вектор стационарных вероятностей значений управляющего процесса $k(t)$, для которого $\mathbf{r}_1\mathbf{Q} = 0$, $\mathbf{r}_1\mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица с элементами λ_k, $k = \overline{1, K}$, единичный вектор-столбец $\mathbf{e}_1$ имеет размерность K.

Доказательство. Так как для существования стационарного режима необходимо выполнение неравенства $\lim\limits_{x\to\infty} a(x) < 0$, то найдем предельное при $x \to \infty$ значение функции $a(x)$. В силу (18), функция $a(x)$ определяется равенством $a(x) = \mathbf{r}(x)\left(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0\right)\mathbf{e}$. Перепишем данное равенство для компонент $r(n_1, n_2, x)$ в виде:

$$a(x) = -\left(\mathbf{r}_{00}(x) + \mathbf{r}_{01}(x)\right)x\mathbf{e}_1 + \left(\mathbf{r}_{10}(x) + \mathbf{r}_{11}(x)\right)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}_1 + \mathbf{r}_{11}(x)\mu_1\mathbf{e}_1.$$

Для того, чтобы найти предельное значение $\lim\limits_{x\to\infty} a(x)$, определим векторные компоненты $\mathbf{r}_{n_1 n_2}(x)$ вектора $\mathbf{r}(x) = \{\mathbf{r}_{00}(x), \mathbf{r}_{10}(x), \mathbf{r}_{01}(x), \mathbf{r}_{11}(x)\}$ определяемые равенствами (12) и (13).

$$\mathbf{r}_{00}(x)\left(\mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda}-x\mathbf{I}\right)+\mu_2\mathbf{r}_{01}(x)\mathbf{I}=0,$$

$$\mathbf{r}_{00}(x)\left(\mathbf{\Lambda}+x\mathbf{I}\right)+\mathbf{r}_{10}(x)\left(\mathbf{Q}-\mu_1\mathbf{I}\right)+\mu_2\mathbf{r}_{11}(x)\mathbf{I}=0,$$

$$\mu_1\mathbf{r}_{10}(x)+\mathbf{r}_{01}(x)\left(\mathbf{Q}-(\mathbf{\Lambda}+\mu_2\mathbf{I}+x\mathbf{I})\right)+\mu_1\mathbf{r}_{11}(x)=0,$$

$$\mathbf{r}_{01}(x)\left(\mathbf{\Lambda}+x\mathbf{I}\right)+\mathbf{r}_{11}(x)\left(\mathbf{Q}-\mu_1\mathbf{I}-\mu_2\mathbf{I}\right)=0,$$

$$\mathbf{r}_{00}(x)+\mathbf{r}_{10}(x)+\mathbf{r}_{01}(x)+\mathbf{r}_{11}(x)=\mathbf{r}_1.$$

Здесь вектор $\mathbf{r}_1$ – вектор стационарных вероятностей значений управляющего процесса $k(t)$, $k=\overline{1,K}$. Решение этой системы имеет вид:

$$\mathbf{r}_{01}(x)=\frac{1}{\mu_2}\mathbf{r}_{00}(x)\left(\mathbf{\Lambda}+x\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)=\frac{x}{\mu_2}\mathbf{r}_{00}(x)\left(\mathbf{I}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

$$\mathbf{r}_{10}(x)=\frac{x^2}{\mu_2}\mathbf{r}_{00}(x)\left(\frac{1}{\mu_1}\mathbf{I}-\left(\mu_1\mathbf{I}+\mu_2\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}\right)\left(\mathbf{I}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

$$\mathbf{r}_{11}(x)=\frac{x^2}{\mu_2}\mathbf{r}_{00}(x)\left(\mu_1\mathbf{I}+\mu_2\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}\left(\mathbf{I}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\mathbf{r}_{00}(x)+\mathbf{r}_{10}(x)+\mathbf{r}_{01}(x)+\mathbf{r}_{11}(x)=\mathbf{r}_1=\frac{x^2}{\mu_1\mu_2}\mathbf{r}_{00}(x)\left(\mathbf{I}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Из последнего уравнения системы получим равенство

$$x^2\mathbf{r}_{00}(x)=\mu_1\mu_2\mathbf{r}_1\left(\mathbf{I}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right). \qquad (41)$$

Вернемся к функции $a(x)$. Найдем предельное при $x \to \infty$ значение функции $a(x)$, определяемой равенством (18):

$$a(x) = \left\{ \left(\mathbf{r}_{10}(x) + \mathbf{r}_{11}(x) \right) \mathbf{\Lambda} + \mathbf{r}_{11}(x)\mu_1 - \left(\mathbf{r}_{00}(x) + \mathbf{r}_{01}(x) \right) x \right\} \mathbf{e}_1 =$$

$$= \frac{x^2}{\mu_2} \mathbf{r}_{00}(x) \left\{ \frac{1}{\mu_1} \mathbf{\Lambda} + \mu_1 \left(\mu_1 \mathbf{I} + \mu_2 \mathbf{I} - \mathbf{Q} \right)^{-1} - \mathbf{I} \right\} \mathbf{e}_1 \left(1 + O\left(\frac{1}{x} \right) \right).$$

Рассмотрим отдельно выражение

$$\mu_1 \left(\mu_1 \mathbf{I} + \mu_2 \mathbf{I} - \mathbf{Q} \right)^{-1} \mathbf{e}_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{Q} \right)^{-1} \mathbf{e}_1 .$$

Обозначим $\left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{Q} \right)^{-1} \mathbf{e}_1 = \mathbf{v}$, и в последнем равенстве умножим левую и правую часть на матрицу $\left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{Q} \right)$:

$$\mathbf{e}_1 = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{Q} \right) \mathbf{v},$$

Очевидно, что $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$. Тогда выражение для $a(x)$ перепишем в виде:

$$a(x) = \frac{x^2}{\mu_2} \mathbf{r}_{00}(x) \left\{ \frac{1}{\mu_1} \mathbf{\Lambda} - \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{I} \right\} \mathbf{e}_1 \left(1 + O\left(\frac{1}{x} \right) \right),$$

в которое подставим выражение (41):

$$a(x) = \left\{ \mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}_1 - \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{x} \right) \right).$$

Неравенство $\lim_{x \to \infty} a(x) < 0$, определяющее необходимое условие существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе выполняется при выполнении равенства

$$\mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}_1 < \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Теорема доказана.

3.4 Имитационная модель исследуемой системы

В основу метода имитационного моделирования был положен дискретно-событийный подход [81], который активно применяется для моделей массового обслуживания. В процессе функционирования в системе происходят события, которые переводят ее в разные состояния, и дискретно-событийный подход позволяет обойти моделирование интервалов времени, в которые состояние системы остается неизменным. Это способствует ускорению получения результатов, что очень немаловажно для проведения исследований.

К событиям в исследуемой системе относятся:

а) поступление заявки из входящего потока;

б) переключение между простейшими потоками во входящем MMPP потоке;

в) завершение обслуживания заявки на первом приборе,

г) завершение обслуживания заявки на втором приборе;

д) обращение заявки с орбиты к первому прибору.

Таким образом, в процессе моделирования модельное время постоянно корректируется, сдвигаясь после каждого события к моменту следующего. Т.е., если обозначить

T_1 – момент времени поступления заявки из входящего потока,

T_2 – момент времени переключения между простейшими потоками во входящем MMPP потоке,

T_3 – момент времени завершения на первом приборе,

T_4 – момент времени завершения на втором приборе,

T_5 – момент времени обращения заявки с орбиты к первому прибору,

T – модельное время,

то

$$T = \min(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5).$$

Каждое из перечисленных событий предполагает выполнение определенных действий, каждое из которых заложено в программу:

а) поступление заявки из входящего потока: система пытается отправить заявку на обслуживание первым прибором. Если он свободен, то забирает данную заявку и определяет время события T_3; если прибор занят, то он возвращает предложенную заявку, которую система направляет на орбиту, определяющую событие T_5 для этой заявки.

б) переключение между простейшими потоками в MMPP потоке: система переключается с одного простейшего потока на другой и переопределяет момент времени T_1.

в) завершение обслуживания заявки на первом приборе: система пытается отправить заявку на обслуживание вторым прибором. Если он свободен, то забирает данную заявку и определяет время события T_4; если прибор занят, то он возвращает предложенную заявку, которую система направляет на орбиту, определяющую событие T_5 для этой заявки.

г) завершение обслуживания заявки на втором приборе: заявка покидает систему;

д) обращение заявки с орбиты к первому прибору: аналогично пункту а.

е) Проектирование имитационной модели осуществлено на основе объектно-ориентированного подхода [82] с помощью языка моделирования UML [83]. Основные структурные элементы программы изображены на диаграмме классов (рисунок 7).

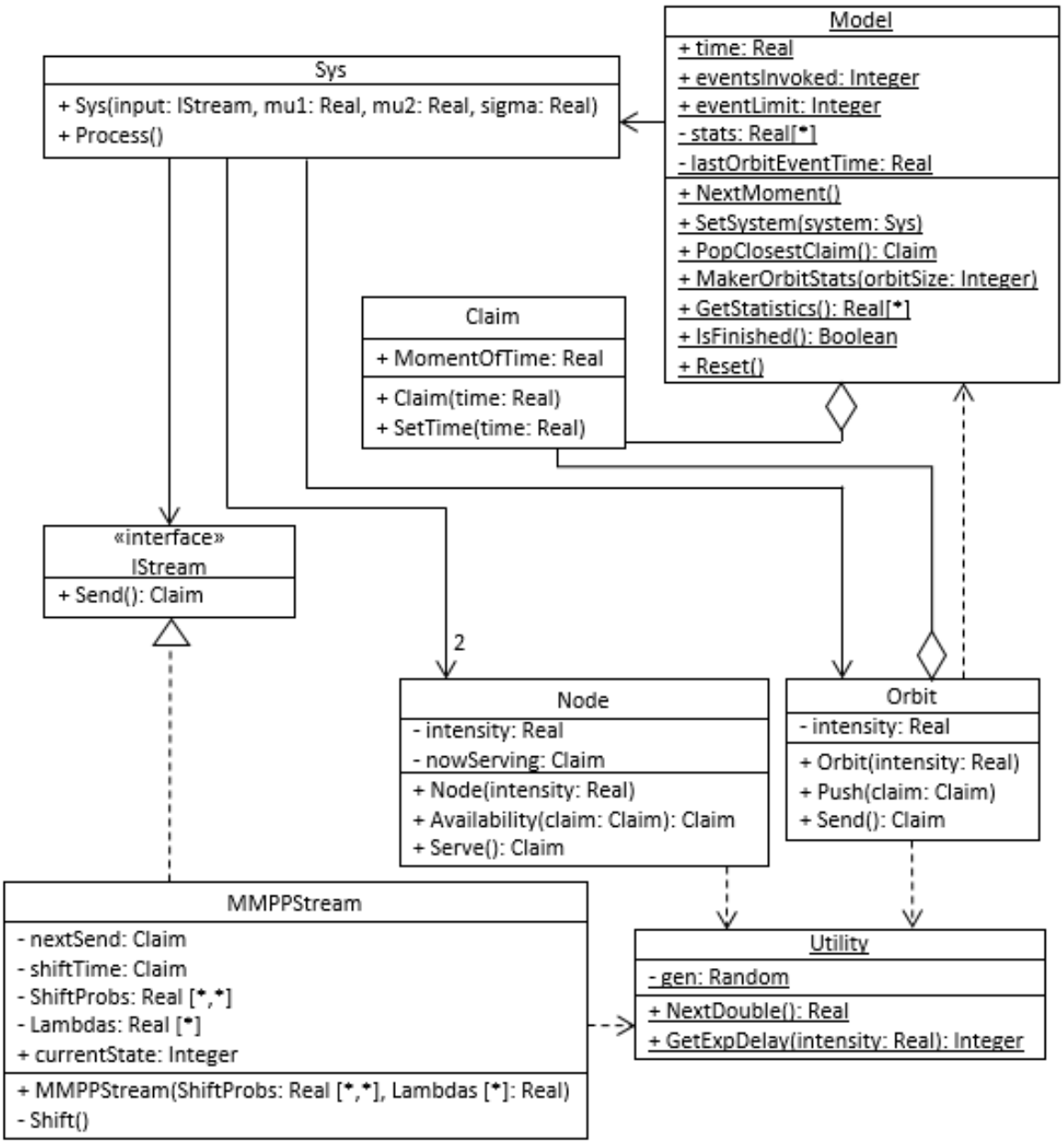


Рисунок 7 – Объектно-ориентированная модель базовых элементов автономного модуля для исследуемой системы

Класс заявки (Claim) имеет единственные атрибут (MomentOfTime), который содержит момент времени, в который с этой заявкой должно произойти одно из событий T_1, T_2, T_3, T_4, T_5.

Поскольку в исследованиях рассматриваются различные входящие потоки, было решено реализовать интерфейс IStream с методом (Send()), который занимается созданием следующей заявки, которая поступит в систему, что характерно для любого потока.

У MMPP потока (MMPPStream) параметром конструктора являются матрица инфинитезимальных характеристик (ShiftProbs), которая определяет время переключения между потоками (shiftTime), и набор интенсивностей простейших потоков (Lambdas), на основе интенсивностей которых создается заявка, которая должна будет следующей поступить в систему (nextSend). Аналогичные генерации следующей заявки происходят в методе Send() после каждого фактического поступления заявки из потока. Текущий входящий простейший поток MMPP запоминается в переменной currentState.

Статический класс Utility предназначен для моделирования случайной величины по экспоненциальному закону.

Подробнее об остальных классах рассказано в более ранней работе [79].

Работа модуля происходит согласно следующему алгоритму:

1) Создание объекта типа MMPP поток: определение начального простейшего потока случайным образом, определение времени прибытия следующей заявка и времени переключения простейшего потока.

2) При наступлении времени прибытия заявки передать ее системе, сгенерировать время прибытия следующей заявки.

3) При наступлении времени переключения простейшего потока определить новый, ведущий, поток, определить время следующего переключения и перегенерировать время прибытия следующей заявки.

Процесс моделирования завершается, когда сумма числа поступлений заявок на орбиту и ухода с нее достигнет заданного пользователем предела.

Имитационная модель реализована как десктопное приложение на языке программирования C# с пользовательским интерфейсом Windows Forms. На рисунке 8 показано главное окно программы.

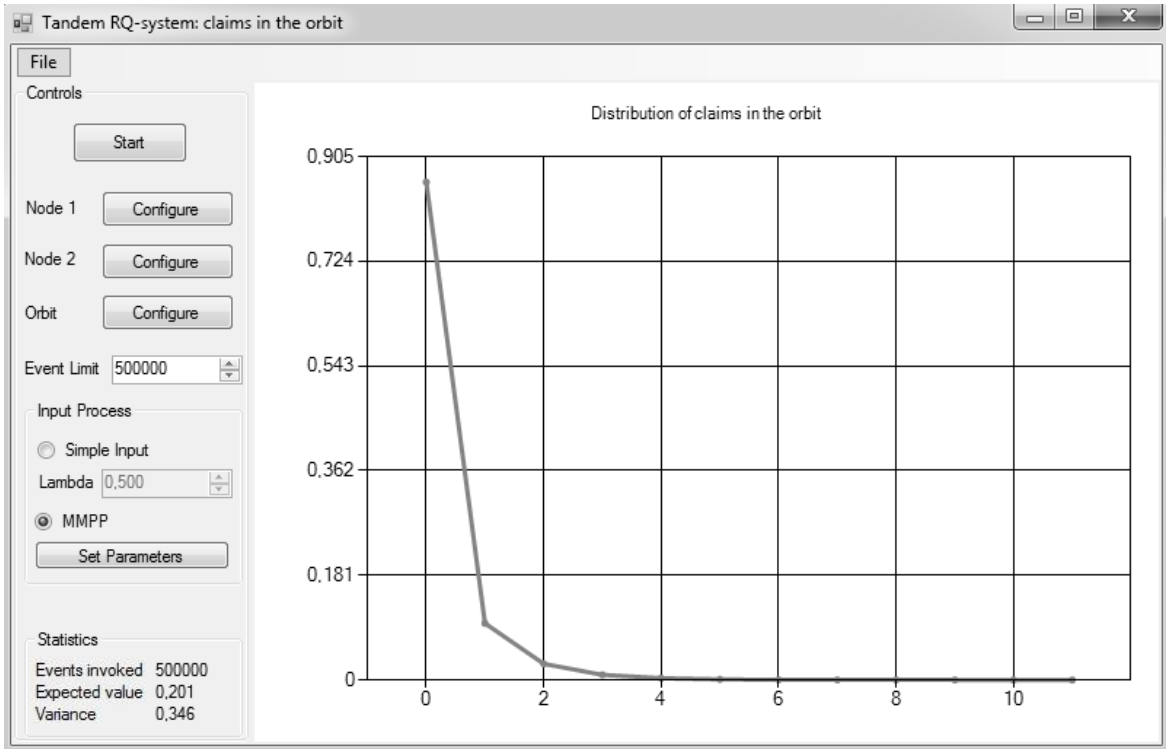


Рисунок 8 – Интерфейс приложения

Пользователь может задать параметры системы в специальных окнах (рисунок 9): интенсивность экспоненциального обслуживания приборов (Node1 и Node2), интенсивность экспоненциального обращения заявок с орбиты (Orbit).

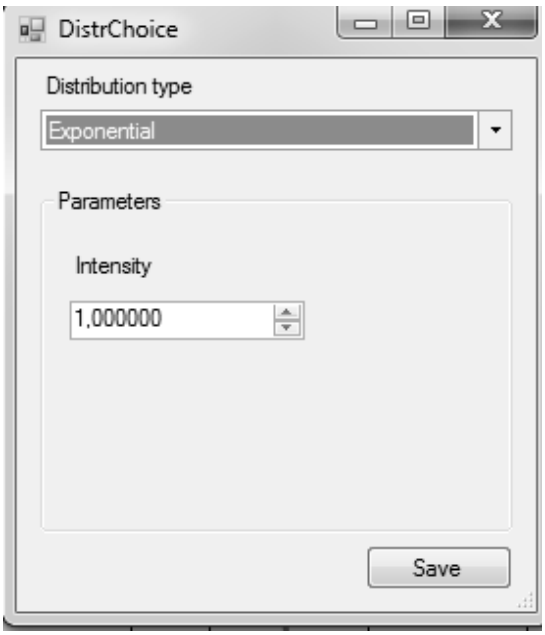


Рисунок 9 – Окно для задания параметра экспоненциального распределения

Также пользователь может выбрать тип входящего потока. Параметры для MMPP потока задаются в отдельном окне (рисунок 10).

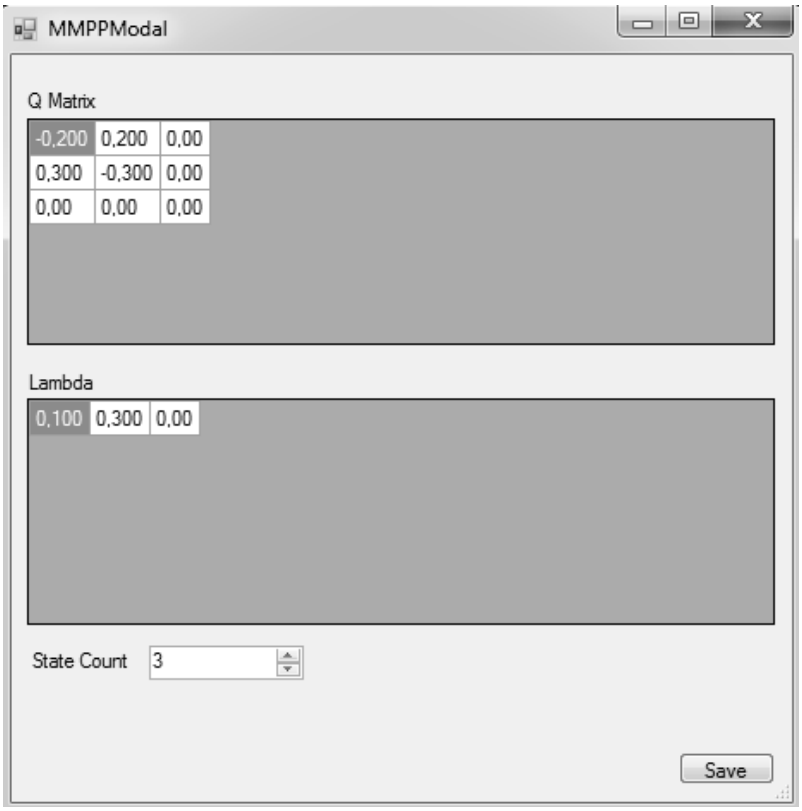


Рисунок 10 – Окно для задания параметров MMPP потока

Также пользователю предлагается задать число изменения количества заявок на орбите, при достижении которого процесс моделирования завершится (Event Limit).

При нажатии кнопки Start запускается процесс моделирования и показывается соответствующее окно (рисунок 11). Процесс можно прервать, нажав кнопку Cancel.

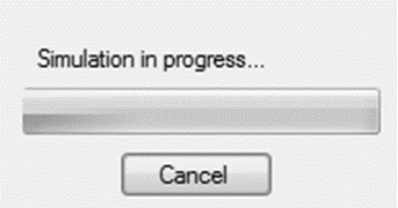


Рисунок 11 – Окно, свидетельствующее о процессе моделирования

Результатом работы программы является график распределения вероятностей числа заявок на орбите, а также в левом нижнем углу дополнительно посчитано математическое ожидание (Expected value) и дисперсия (Dispersion) для полученного распределения (рисунок 8).

Также в программе предусмотрено сохранение полученного распределения в файл формата .csv. Для этого в верхней части главного окна нужно нажать на кнопку File, где будет предложено сохранить полученный результат файл.

3.5 Анализ области применимости асимптотического результата

В работе ставится задача нахождения аппроксимации дискретного распределения вероятностей $P(i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой тандемной системы с повторными вызовами. Для построения аппроксимации дискретного распределения $P(i)$ вернемся к плотности $s(z)$ случайного процесса $z(\tau)$. Переход от плотности распределения $s(z)$ непрерывного случайного процесса $z(\tau)$ к дискретному распределению $P(i)$ дискретного случайного процесса $i(\tau)$ можно

осуществить разными способами. Укажем один из них. В силу равенства (36), запишем неотрицательную функцию $G(i)$ дискретного аргумента i в виде

$$G(i) = \frac{C}{b(\sigma i)} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^{\sigma i} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}.$$

Принимая во внимание условие нормировки, запишем следующее дискретное распределение вероятностей

$$Pdif_i = G(i) \Big/ \sum_{i=0}^{\infty} G(i).$$

Предложенное дискретное распределение вероятностей $Pdif_i$ будем применять для аппроксимации распределения вероятностей $P(i) = P\{i(t) = i\}$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой тандемной системы.

Точность $Pdif_i$ определим с помощью расстояния Колмогорова, описываемого формулой

$$d = \max_{0 \le i \le \infty} \left| \sum_{v=0}^{i} \left(Pdif_i - P_i \right) \right|, \ i = 0,1,...,$$

где P_i – распределение вероятностей числа заявок на орбите, полученное методом имитационного моделирования.

В качестве «удовлетворительного» значения расстояния Колмогорова мы выбрали значение 0.05, которое является приемлемым при точности имитационной модели в 0.005 [79].

Рассмотрим численные примеры, для этого определим матрицы

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0.3 & 0.7 \\ 0.1 & -0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & -0.7 \end{pmatrix}, \ \mathbf{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим ρ ($0 < \rho < 1$) загрузку системы, а значение условных интенсивностей входящего потока – элементов матрицы $\mathbf{\Lambda}$, учитывая условие существования стационарного режима $\mathbf{r}_1\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}_1 < \dfrac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$, определим равенством

$$\mathbf{\Lambda} = \rho \cdot \frac{\mathbf{\Lambda}_1}{\mathbf{r}_1\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{e}_1} \cdot \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Для экспериментов положим параметры μ_1 и μ_2 равными 1 и 2 соответственно, $\rho = 0.5$. Результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Расстояние Колмогорова между асимптотическим и эмпирическим распределениями вероятностей

$\sigma = 2$	$\sigma = 1.5$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.01$
0.057	0.049	0.033	0.011	0.033	0.019	0.007

На рисунках 12 – 14 показаны плотности распределений вероятностей числа заявок на орбите. Сплошной линией показано распределение, полученное с помощью имитационного моделирования (P_i), пунктирной – аппроксимация, полученная методом асимптотически диффузионного анализа ($Pdif_i$).

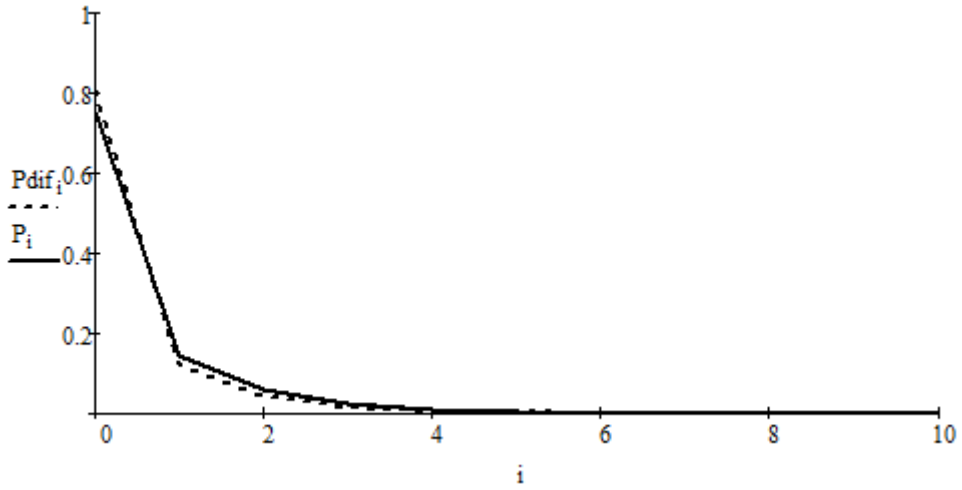


Рисунок 12 – Распределения вероятностей числа заявок на орбите при σ = 2

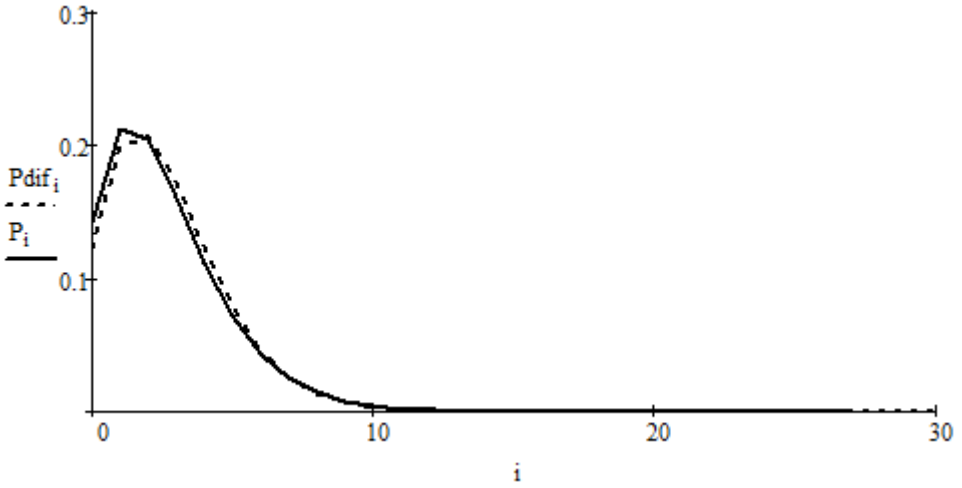


Рисунок 13 – Распределения вероятностей числа заявок на орбите при σ = 0.1

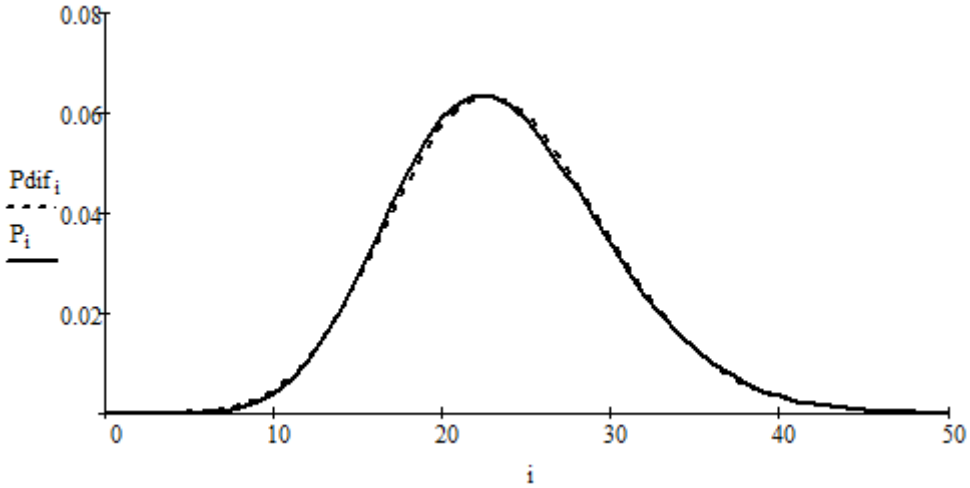


Рисунок 14 – Распределения вероятностей числа заявок на орбите при σ = 0.01

Как можно увидеть, точность аппроксимации преимущественно растет с уменьшением параметра σ, что соответствует асимптотическому условию. Аппроксимация, полученная аналитически, применима для $\sigma < 1.5$, когда расстояние Колмогорова не превышает 0.05.

В третьей главе данной работы приведено исследование тандемной системы массового обслуживания с повторными вызовами, общей орбитой и MMPP входящим потоком. Используя метод асимптотического диффузионного анализа при условии большой задержки заявок на орбите, получены параметры диффузионного процесса. Распределение вероятности этого процесса позволило построить аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на орбите. Помимо этого, были найдены распределение вероятностей состояний приборов и условие существования стационарного режима системы.

Также спроектирован и реализован дополнительный программный модуль имитационной модели исследуемой системы, определена область применимости аналитических результатов, полученных методом асимптотического диффузионного анализа на основе результатов имитационного моделирования.

Результаты исследования были представлены на IX Международной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, Россия, 26 – 28 мая 2022 г.) и на XXV Международной конференции по распределенным компьютерным и телекоммуникационным сетям: управление, вычисление, связь (Москва, Россия, 26 – 30 сентября 2022 г.) по итогом которой вышли публикации [85] и [84] соответственно.

4 Исследование тандемной системы с повторными вызовами, общей орбитой и произвольным обслуживанием на первом приборе

4.1 Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим систему с повторными вызовами и двумя последовательно обслуживающими приборами, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ (рисунок 15). Если заявка входящего потока обнаруживает первый прибор свободным, то она встает на прибор и обслуживается в течении случайного времени с функцией распределения B(x), после чего обращается ко второму прибору. Если второй прибор свободен, заявка встает на него и обслуживается в течении экспоненциально-распределенного времени с параметром μ. Если заявка входящего потока застает первый прибор занятым, она мгновенно отправляется на орбиту, где после случайной экспоненциально-распределенной задержки с параметром σ снова пытается встать на обслуживание на первый прибор. Если заявка после обслуживания на первом приборе застает второй прибор занятым, она мгновенно отправляется на орбиту, где после случайной экспоненциально-распределенной задержки с параметром σ снова пытается встать на обслуживание на первый прибор.

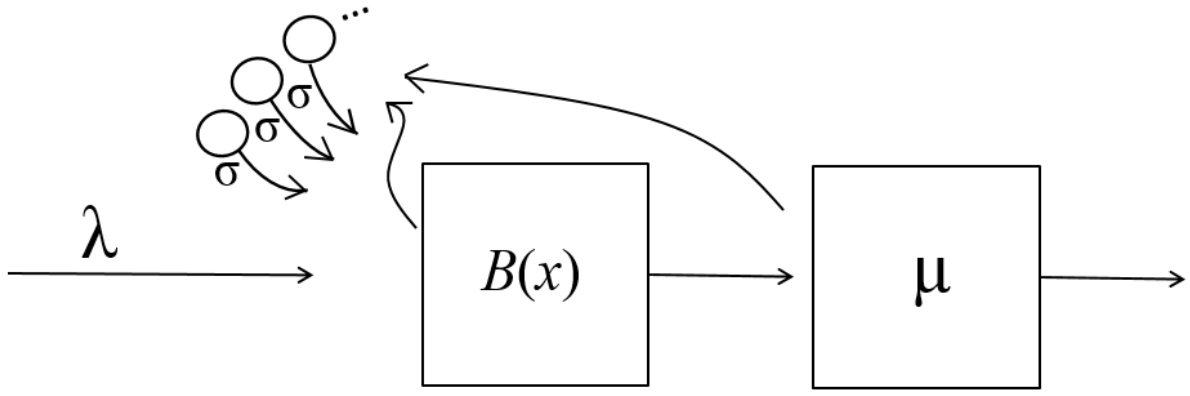


Рисунок 15 – Тандемная система с повторными вызовами и произвольным обслуживанием на первом приборе

Введем обозначения:

процесс $k(t)$ – состояние приборов в момент времени t:

0, если оба прибора свободны;

1, если первый прибор занят, второй свободен;

2, если первый прибор свободен, второй занят;

3, если оба прибора заняты;

процесс $i(t)$ – число заявок, находящихся на орбите в момент времени t.

Целью исследования является нахождение распределений вероятностей числа заявок $i(t)$ на орбите и состояний приборов в рассматриваемой системе.

4.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Обозначим вероятности

$$P_v(i,t) = P\{k(t) = v, i(t) = i\}, \quad v = 0, 2,$$
$$P_v(i,z,t) = P\{k(t) = v, i(t) = i, z(t) < z\}, \quad v = 1, 3. \tag{42}$$

Случайный процесс $\{k(t), i(t)\}$, $v = 0, 2$, $\{k(t), i(t), z(t)\}$, $v = 1, 3$, является марковским. Для распределения вероятностей (42) составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

Запишем равенства

$$P_0(i,t+\Delta t) = P_0(i,t)(1-\lambda\Delta t)(1-i\sigma\Delta t) + P_2(i,t)\mu\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_1(i,z-\Delta t,t+\Delta t) =$$

$$= [P_1(i,z,t) - P_1(i,\Delta t,t)](1-\lambda\Delta t) + P_0(i+1,t)(i+1)\sigma\Delta t B(z) +$$
$$+ P_1(i-1,z,t)\lambda\Delta t + P_0(i,t)\lambda\Delta t B(z) + P_3(i,z,t)\mu\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_2(i,t+\Delta t) = P_2(i,t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)(1-i\sigma\Delta t) +$$

$$+ P_1(i,\Delta t,t) + P_3(i-1,\Delta t,t) + o(\Delta t),$$

$$P_3(i,z-\Delta t,t+\Delta t) = [P_3(i,z,t) - P_3(i,\Delta t,t)](1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) +$$

$$+ P_3(i-1,z,t)\lambda\Delta t + P_2(i,t)\lambda\Delta t B(z) + P_2(i+1,t)(i+1)\sigma\Delta t B(z) + o(\Delta t).$$

Имеем

$$\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -\left(\lambda + i\sigma\right) P_0(i,t) + \mu P_2(i,t),$$

$$\frac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(i,0,t)}{\partial z} - \lambda P_1(i,z,t) + (i+1)\sigma B(z) P_0(i+1,t) +$$

$$+\lambda P_1(i-1,z,t) + \lambda B(z) P_0(i,t) + P_3(i,z,t)\mu,$$

$$\frac{\partial P_2(i,t)}{\partial t} = \frac{\partial P_1(i,0,t)}{\partial z} + \frac{\partial P_3(i-1,0,t)}{\partial z} - \left(\lambda + \mu + i\sigma\right) P_2(i,t),$$

$$\frac{\partial P_3(i,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P_3(i,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P_3(i,0,t)}{\partial z} - \left(\lambda + \mu\right) P_3(i,z,t) +$$

$$+\lambda P_3(i-1,z,t) + \lambda B(z) P_2(i,t) + (i+1)\sigma B(z) P_2(i+1,t). \qquad (43)$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$

$$H_v(u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_v(i,t), \quad v = 0, 2. \; H_v(u,z,t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_v(i,z,t), \quad v = 1, 3.$$

Тогда систему уравнений (43) окончательно перепишем для функций $H_v(u, t)$, $v = 0, 2$, $H_v(u, z, t)$, $v = 1, 3$:

$$\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial t} = -\lambda H_0(u,t) + j\sigma \frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u} + \mu H_2(u,t),$$

$$\frac{\partial H_1(u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H_1(u,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(u,0,t)}{\partial z} - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u} B(z) +$$

$$+\lambda\left(e^{ju} - 1\right) H_1(u,z,t) + \lambda B(z) H_0(u,t) + \mu H_3(u,z,t),$$

$$\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial t} = \frac{\partial H_1(u,0,t)}{\partial z} + e^{ju} \frac{\partial H_3(u,0,t)}{\partial z} + j\sigma \frac{\partial H_2(u,t)}{\partial u} - \left(\lambda + \mu\right) H_2(u,t),$$

$$\frac{\partial H_3(u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H_3(u,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial H_3(u,0,t)}{\partial z} - j\sigma e^{-ju} B(z) \frac{\partial H_2(u,t)}{\partial u} +$$

$$+\left(\lambda\left(e^{ju}-1\right)-\mu\right)H_3(u,z,t)+\lambda B(z)H_2(u,t).$$

Просуммируем все уравнения полученной системы, устремив $z\to\infty$, и получим уравнение:

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t}=\left(e^{ju}-1\right)\times$$

$$\times\left\{j\sigma e^{-ju}\left(\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial u}\right)+\lambda\left(H_1(u,t)+H_3(u,t)\right)+\frac{\partial H_3(u,0,t)}{\partial z}\right\}.$$

Запишем дополненную систему уравнений:

$$\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial t}=-\lambda H_0(u,t)+j\sigma\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}+\mu H_2(u,t),$$

$$\frac{\partial H_1(u,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial H_1(u,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial H_1(u,0,t)}{\partial z}-j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}B(z)+$$

$$+\lambda\left(e^{ju}-1\right)H_1(u,z,t)+\lambda B(z)H_0(u,t)+\mu H_3(u,z,t),$$

$$\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial t}=\frac{\partial H_1(u,0,t)}{\partial z}+e^{ju}\frac{\partial H_3(u,0,t)}{\partial z}+j\sigma\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial u}-\left(\lambda+\mu\right)H_2(u,t),$$

$$\frac{\partial H_3(u,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial H_3(u,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial H_3(u,0,t)}{\partial z}-j\sigma e^{-ju}B(z)\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial u}+$$

$$+\left(\lambda\left(e^{ju}-1\right)-\mu\right)H_3(u,z,t)+\lambda B(z)H_2(u,t),$$

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t}=\left(e^{ju}-1\right)\times$$

$$\times\left\{j\sigma e^{-ju}\left(\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial u}\right)+\lambda\left(H_1(u,t)+H_3(u,t)\right)+\frac{\partial H_3(u,0,t)}{\partial z}\right\}, \quad (44)$$

которая будет основной. в дальнейшем исследовании. Будем решать ее методом асимптотически диффузионного анализа в предельном условии $\sigma\to 0$.

4.3 Первый этап асимптотического анализа

Обозначив σ = ε и выполнив в системе (44) замены

$$\tau = t\varepsilon, \qquad u = \varepsilon w, \qquad H_v(u, t) = F_v(w, \tau, \varepsilon), \qquad H_v(u, z, t) = F_v(w, z, \tau, \varepsilon),$$

систему (44) перепишем в виде:

$$\varepsilon\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = -\lambda F_0(w,\tau,\varepsilon) + j\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \mu F_2(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon\frac{\partial F_1(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = \frac{\partial F_1(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - je^{-j w\varepsilon}\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}B(z) +$$

$$+\lambda\left(e^{j\varepsilon w}-1\right)F_1(w,z,\tau,\varepsilon) + \lambda B(z)F_0(w,\tau,\varepsilon) + \mu F_3(w,z,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon\frac{\partial F_2(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} =$$

$$= \frac{\partial F_1(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + e^{j\varepsilon w}\frac{\partial F_3(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + j\frac{\partial F_2(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} - \left(\lambda+\mu\right)F_2(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon\frac{\partial F_3(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = \frac{\partial F_3(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_3(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - je^{-j\varepsilon w}B(z)\frac{\partial F_2(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} +$$

$$+\left(\lambda\left(e^{j\varepsilon w}-1\right)-\mu\right)F_3(w,z,\tau,\varepsilon) + \lambda B(z)F_2(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon\frac{\partial F(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = \left(e^{j\varepsilon w}-1\right)\left\{ je^{-j\varepsilon w}\left(\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \frac{\partial F_2(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}\right) + \right.$$

$$\left. +\lambda\left(F_1(w,\tau,\varepsilon) + F_3(w,\tau,\varepsilon)\right) + \frac{\partial F_3(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\right\}. \qquad (45)$$

Обозначим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F_v(w,\tau,\varepsilon) = F_v(w,\tau), \quad v=0,2, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}F_v(w,z,\tau,\varepsilon) = F_v(w,z,\tau), \quad v=1,3.$$

Теорема 5. В предельном условии σ → 0 выполняется равенство

$$\lim_{\sigma\to 0} Me^{jw\sigma i\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)} = e^{jwx(\tau)},$$

где скалярная функция $x = x(\tau)$ является решением дифференциального уравнения

$$x'(\tau) = \left(1 + b_1(\lambda + x)\right)^{-1}\left(\lambda b_1(\lambda + x) - x + B^*(\mu)\frac{(\lambda + x)^2}{\mu + \lambda + x}\right), \qquad (46)$$

где величины $r_v(x)$ $v = \overline{0,3}$ определяются равенствами

$$r_0(x) = \frac{\mu}{\mu + \lambda + x}\left(1 + b_1(\lambda + x)\right)^{-1},$$

$$r_1(x) = \left(1 + b_1(\lambda + x)\right)^{-1}(\lambda + x)\left(b_1 - \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\lambda + x}{\mu + \lambda + x}\left(1 - B^*(\mu)\right)\right),$$

$$r_2(x) = \frac{\lambda + x}{\mu + \lambda + x}\left(1 + b_1(\lambda + x)\right)^{-1},$$

$$r_3(x) = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{(\lambda + x)^2}{\mu + \lambda + x}\left(1 - B^*(\mu)\right)\left(1 + b_1(\lambda + x)\right)^{-1}. \qquad (47)$$

Доказательство. В системе (45) устремим $\varepsilon \to 0$, получим

$$-\lambda F_0(w,\tau) + j\frac{\partial F_0(w,\tau)}{\partial w} + \mu F_2(w,\tau) = 0,$$

$$\frac{\partial F_1(w,z,\tau)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w,0,\tau)}{\partial z} -$$

$$-jB(z)\frac{\partial F_0(w,\tau)}{\partial w} + \lambda B(z)F_0(w,\tau) + \mu F_3(w,z,\tau) = 0,$$

$$\frac{\partial F_1(w,0,\tau)}{\partial z} + \frac{\partial F_3(w,0,\tau)}{\partial z} + j\frac{\partial F_2(w,\tau)}{\partial w} - (\lambda + \mu)F_2(w,\tau) = 0,$$

$$\frac{\partial F_3(w,z,\tau)}{\partial z} - \frac{\partial F_3(w,0,\tau)}{\partial z} -$$

$$- jB(z)\frac{\partial F_2(w,\tau)}{\partial w} - \mu F_3(w,z,\tau) + \lambda B(z) F_2(w,\tau) = 0,$$

$$\frac{\partial F(w,\tau)}{\partial \tau} = jw\left\{ j\left(\frac{\partial F_0(w,\tau)}{\partial w} + \frac{\partial F_2(w,\tau)}{\partial w} \right) + \right.$$

$$\left. + \lambda\left(F_1(w,\tau) + F_3(w,\tau) \right) + \frac{\partial F_3(w,0,\tau)}{\partial z} \right\}. \qquad (48)$$

Решение системы (48) будем искать в виде произведения

$$F_v(w,\tau) = r(x)e^{jwx(\tau)},\ v = 0, 2,\ F_v(w,z,\tau) = r(z,x)e^{jwx(\tau)},\ v = 1, 3. \qquad (49)$$

Здесь $x = x(\tau)$ – скалярная функция аргумента τ, которая определяет при $\varepsilon \to 0$, нормированное величиной $\varepsilon = \sigma$, среднее значение $\sigma i(\tau/\sigma)$ числа заявок на орбите. Подставим произведения (49) в систему (48), получим

$$-(\lambda + x) r_0(x) + \mu r_2(x) = 0,$$

$$\frac{\partial r_1(z,x)}{\partial z} - \frac{\partial r_1(0,x)}{\partial z} + (\lambda + x) B(z) r_0(x) + \mu r_3(z,x) = 0,$$

$$\frac{\partial r_1(0,x)}{\partial z} + \frac{\partial r_3(0,x)}{\partial z} - (\lambda + \mu + x) r_2(x) = 0,$$

$$\frac{\partial r_3(z,x)}{\partial z} - \frac{\partial r_3(0,x)}{\partial z} - \mu r_3(z,x) + (\lambda + x) B(z) r_2(x) = 0, \qquad (50)$$

$$x'(\tau) = \lambda\left(r_1(x) + r_3(x) \right) - x\left(r_0(x) + r_2(x) \right) + \frac{\partial r_3(0,x)}{\partial z}. \qquad (51)$$

Обозначим $r_v'(z,x) = \frac{\partial r_v(z,x)}{\partial z},\ r_v'(0,x) = \frac{\partial r_v(0,x)}{\partial z},\ v = 1,3,$ систему (50)-(51) перепишем в виде:

$$-(\lambda+x)r_0(x)+\mu r_2(x)=0,$$

$$r_1'(z,x)-r_1'(0,x)+(\lambda+x)B(z)r_0(x)+\mu r_3(z,x)=0,$$

$$r_1'(0,x)+r_3'(0,x)-(\lambda+\mu+x)r_2(x)=0,$$

$$r_3'(z,x)-r_3'(0,x)-\mu r_3(z,x)+(\lambda+x)B(z)r_2(x)=0, \qquad (52)$$

$$x'(\tau)=\lambda\big(r_1(x)+r_3(x)\big)-x\big(r_0(x)+r_2(x)\big)+r_3'(0,x). \qquad (53)$$

Просуммируем первое уравнение системы (52) с третьим и второе уравнение с четвертым:

$$r_1'(0,x)+r_3'(0,x)=(\lambda+x)\big(r_0(x)+r_2(x)\big), \qquad (54)$$

$$r_3'(z,x)-r_3'(0,x)+r_1'(z,x)-r_1'(0,x)+(\lambda+x)B(z)\big(r_0(x)+r_2(x)\big)=0.$$

Тогда получим уравнение

$$r_3'(z,x)+r_1'(z,x)=(\lambda+x)\big(1-B(z)\big)\big(r_0(x)+r_2(x)\big).$$

Введем преобразование Лапласа-Стилтьеса

$$r_v^*(\alpha,x)=\int_0^\infty e^{-\alpha z}d_z r_v(z,x),\ \ v=1,3,\ \ B^*(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dB(x).$$

Учитывая, что

$$\int_0^\infty e^{-\alpha z}d_z r_v'(z,x)=r_v'(z,x)e^{-\alpha z}\Big|_{z=0}^{\infty}-\int_0^\infty r_v'(z,x)d_z e^{-\alpha z}=$$

$$= -r_v'(0,x) + \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha z} d_z r_v(z,x) = -r_v'(0,x) + \alpha r_v^*(\alpha,x),$$

получим уравнение

$$-r_3'(0,x) + \alpha r_3^*(\alpha,x) - r_1'(0,x) + \alpha r_1^*(\alpha,x) =$$
$$= (\lambda + x)\big(1 - B^*(\alpha)\big)\big(r_0(x) + r_2(x)\big),$$

которое с учетом равенства (54) перепишем в виде:

$$\alpha r_3^*(\alpha,x) + \alpha r_1^*(\alpha,x) = (\lambda + x)\big(2 - B^*(\alpha)\big)\big(r_0(x) + r_2(x)\big).$$

Продифференцируем по α в нуле последнее уравнение:

$$r_3^*(\alpha,x) + r_1^*(\alpha,x) + \alpha r_3^{*\prime}(\alpha,x) + \alpha r_1^{*\prime}(\alpha,x) =$$
$$-(\lambda + x) B^{*\prime}(\alpha)\big(r_0(x) + r_2(x)\big).$$

Тогда имеем

$$r_3(x) + r_1(x) = b_1(\lambda + x)\big(r_0(x) + r_2(x)\big).$$

Здесь b_1 – первый начальный момент функции распределения $B(x)$.

К четвертому уравнению системы (53) применим преобразование Лапласа-Стилтьеса.

$$(\alpha - \mu) r_3^*(\alpha,x) - r_3'(0,x) + (\lambda + x) B^*(\alpha) r_2(x) = 0, \qquad (55)$$

в котором положим α = μ и получим выражение:

$$r_3'(0,x) = (\lambda + x) B^*(\mu) r_2(x).$$

Теперь положим в уравнении (55) α = 0, в которое подставим последнее равенство и получим уравнение для $r_3(x)$:

$$r_3(x) = \frac{1}{\mu}(\lambda + x)\left(1 - B^*(\mu)\right) r_2(x).$$

Получим систему

$$r_2(x) = \frac{\lambda + x}{\mu} r_0(x),$$

$$r_3(x) = \frac{1}{\mu}(\lambda + x)\left(1 - B^*(\mu)\right) r_2(x)$$

$$r_3(x) + r_1(x) = b_1(\lambda + x)\left(r_0(x) + r_2(x)\right),$$

$$r_0(x) + r_1(x) + r_2(x) + r_3(x) = 1,$$

решение которой запишем в виде:

$$r_0(x) = \frac{\mu}{\mu + \lambda + x}\left(1 + b_1(\lambda + x)\right)^{-1},$$

$$r_1(x) = \left(1 + b_1(\lambda + x)\right)^{-1}(\lambda + x)\left(b_1 - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\lambda + x}{\mu + \lambda + x}\left(1 - B^*(\mu)\right)\right),$$

$$r_2(x) = \frac{\lambda + x}{\mu + \lambda + x}\left(1 + b_1(\lambda + x)\right)^{-1},$$

$$r_3(x) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{(\lambda + x)^2}{\mu + \lambda + x}\left(1 - B^*(\mu)\right)\left(1 + b_1(\lambda + x)\right)^{-1}. \qquad (56)$$

Данная система совпадает с системой (47). Найдя решения $r_v(x)$ $v=\overline{0,3}$, подставив их в уравнение (53), получим равенство

$$x'(\tau)=\left(1+b_1\left(\lambda+x\right)\right)^{-1}\left(\lambda b_1\left(\lambda+x\right)-x+B^*(\mu)\frac{\left(\lambda+x\right)^2}{\mu+\lambda+x}\right), \qquad (57)$$

которое совпадает с (46). **Теорема доказана.**

Обозначим

$$a(x)=x'(\tau)=\left(1+b_1\left(\lambda+x\right)\right)^{-1}\left(\lambda b_1\left(\lambda+x\right)-x+B^*(\mu)\frac{\left(\lambda+x\right)^2}{\mu+\lambda+x}\right). \qquad (58)$$

Таким образом, было получено равенство, определяющее сходимость при $\sigma\to 0$ характеристической функции нормированного случайного процесса $\sigma i(\tau/\sigma)$ к детерминированной функции $x(\tau)$. Для более детального исследования числа $i(t)$ заявок на орбите реализуем второй этап асимптотического анализа.

4.4 Второй этап асимптотического анализа

В исходной системе уравнений (44) сделаем следующие замены

$$H_v(u,t)=e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)}H_v^{(1)}(u,t),\ v=0,2,$$

$$H_v(u,z,t)=e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)}H_v^{(1)}(u,z,t),\ v=1,3. \qquad (59)$$

Для функций $H_v^{(1)}(u,t)$ и $H_v^{(1)}(u,z,t)$, $v=\overline{0,3}$ получим систему

$$\frac{\partial H_0^{(1)}(u,t)}{\partial t} =$$

$$= -\left(\lambda + jux'(\sigma t) + x(\sigma t)\right) H_0^{(1)}(u,t) + j\sigma \frac{\partial H_0^{(1)}(u,t)}{\partial u} + \mu H_2^{(1)}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_1^{(1)}(u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H_1^{(1)}(u,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial H_1^{(1)}(u,0,t)}{\partial z} - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0^{(1)}(u,t)}{\partial u} B(z) +$$

$$+\left(\lambda\left(e^{ju} - 1\right) - jux'(\sigma t)\right) H_1^{(1)}(u,z,t) +$$

$$+\left(\lambda + x(\sigma t)e^{-ju}\right) B(z) H_0^{(1)}(u,t) + \mu H_3^{(1)}(u,z,t),$$

$$\frac{\partial H_2^{(1)}(u,t)}{\partial t} = \frac{\partial H_1^{(1)}(u,0,t)}{\partial z} + e^{ju} \frac{\partial H_3^{(1)}(u,0,t)}{\partial z} + j\sigma \frac{\partial H_2^{(1)}(u,t)}{\partial u} -$$

$$-\left(\lambda + \mu + jux'(\sigma t) + x(\sigma t)\right) H_2^{(1)}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_3^{(1)}(u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H_3^{(1)}(u,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial H_3^{(1)}(u,0,t)}{\partial z} - j\sigma e^{-ju} B(z) \frac{\partial H_2^{(1)}(u,t)}{\partial u} +$$

$$+\left(\lambda\left(e^{ju} - 1\right) - \mu - jux'(\sigma t)\right) H_3^{(1)}(u,z,t) + \left(\lambda + x(\sigma t)e^{-ju}\right) B(z) H_2^{(1)}(u,t),$$

$$\frac{\partial H^{(1)}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t) H^{(1)}(u,t) = \left(e^{ju} - 1\right) \times$$

$$\times \left\{ j\sigma e^{-ju} \left(\frac{\partial H_0^{(1)}(u,t)}{\partial u} + \frac{\partial H_2^{(1)}(u,t)}{\partial u} \right) - x(\sigma t)e^{-ju} \left(H_0^{(1)}(u,t) + H_2^{(1)}(u,t) \right) + \right.$$

$$\left. +\lambda\left(H_1^{(1)}(u,t) + H_3^{(1)}(u,t) \right) + \frac{\partial H_3^{(1)}(u,0,t)}{\partial z} \right\}. \qquad (60)$$

Учитывая обозначение (58), систему уравнений (60) перепишем в виде:

$$\frac{\partial H_0^{(1)}(u,t)}{\partial t} =$$

$$= -\left(\lambda + jua(x) + x\right) H_0^{(1)}(u,t) + j\sigma \frac{\partial H_0^{(1)}(u,t)}{\partial u} + \mu H_2^{(1)}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_1^{(1)}(u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H_1^{(1)}(u,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial H_1^{(1)}(u,0,t)}{\partial z} - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0^{(1)}(u,t)}{\partial u} B(z) +$$

$$+\left(\lambda\left(e^{ju}-1\right)-jua(x)\right)H_1^{(1)}(u,z,t)+$$

$$+\left(\lambda+xe^{-ju}\right)B(z)H_0^{(1)}(u,t)+\mu H_3^{(1)}(u,z,t),$$

$$\frac{\partial H_2^{(1)}(u,t)}{\partial t}=\frac{\partial H_1^{(1)}(u,0,t)}{\partial z}+e^{ju}\frac{\partial H_3^{(1)}(u,0,t)}{\partial z}+j\sigma\frac{\partial H_2^{(1)}(u,t)}{\partial u}-$$

$$-\left(\lambda+\mu+jua(x)+x\right)H_2^{(1)}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_3^{(1)}(u,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial H_3^{(1)}(u,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial H_3^{(1)}(u,0,t)}{\partial z}-j\sigma e^{-ju}B(z)\frac{\partial H_2^{(1)}(u,t)}{\partial u}+$$

$$+\left(\lambda\left(e^{ju}-1\right)-\mu-jua(x)\right)H_3^{(1)}(u,z,t)+\left(\lambda+xe^{-ju}\right)B(z)H_2^{(1)}(u,t),$$

$$\frac{\partial H^{(1)}(u,t)}{\partial t}+jua(x)H^{(1)}(u,t)=\left(e^{ju}-1\right)\times$$

$$\times\left\{j\sigma e^{-ju}\left(\frac{\partial H_0^{(1)}(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial H_2^{(1)}(u,t)}{\partial u}\right)-xe^{-ju}\left(H_0^{(1)}(u,t)+H_2^{(1)}(u,t)\right)+\right.$$

$$\left.+\lambda\left(H_1^{(1)}(u,t)+H_3^{(1)}(u,t)\right)+\frac{\partial H_3^{(1)}(u,0,t)}{\partial z}\right\}. \qquad (61)$$

Замена (59) выполняется с целью асимптотического центрирования случайного процесса $i(t)$, так как $H^{(1)}(u,t)$ является векторной характеристической функцией центрированного случайного процесса $i(t)-\frac{1}{\sigma}x(\sigma t)$, в котором функция $x(\tau)$ получена на первом этапе асимптотического анализа.

Обозначив $\sigma=\varepsilon^2$ в системе (61) и выполнив замены

$$\tau=t\varepsilon^2,\ u=\varepsilon w,\ H_v^{(1)}(u,t)=F_v^{(1)}(w,\tau,\varepsilon),\ v=0,2,$$

$$H_v^{(1)}(u,z,t)=F_v^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon),\ v=1,3,$$

перепишем ее в виде:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_0^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} =$$

$$= -\left(\lambda + j\varepsilon w a(x) + x\right) F_0^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon) + j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \mu F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_1^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} =$$

$$= \frac{\partial F_1^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_1^{(1)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} B(z) +$$

$$+\left(\lambda\left(e^{j\varepsilon w} - 1\right) - j\varepsilon w a(x)\right) F_1^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon) + \left(\lambda + x e^{-j\varepsilon w}\right) B(z) F_0^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) +$$

$$+\mu F_3^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = \frac{\partial F_1^{(1)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + e^{j\varepsilon w} \frac{\partial F_3^{(1)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + j\varepsilon \frac{\partial F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} -$$

$$-\left(\lambda + \mu + j\varepsilon w a(x) + x\right) F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_3^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} =$$

$$= \frac{\partial F_3^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_3^{(1)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} B(z) \frac{\partial F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} +$$

$$+\left(\lambda\left(e^{j\varepsilon w} - 1\right) - \mu - j\varepsilon w a(x)\right) F_3^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon) + \left(\lambda + x e^{-j\varepsilon w}\right) B(z) F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + j\varepsilon w a(x) F^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) = \left(e^{j\varepsilon w} - 1\right) \times$$

$$\times \left\{ j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \left(\frac{\partial F_0^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \frac{\partial F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} \right) - \right.$$

$$-x e^{-j\varepsilon w} \left(F_0^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) + F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) \right) +$$

$$\left. +\lambda\left(F_1^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) + F_3^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) \right) + \frac{\partial F_3^{(1)}(w,0,\varepsilon)}{\partial z} \right\}. \qquad (62)$$

Обозначим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_\nu^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) = F_\nu^{(1)}(w,\tau),\ \nu = 0,2,\ \lim_{\varepsilon\to 0} F_\nu^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon) = F_\nu^{(1)}(w,z,\tau),\ \nu = 1,3$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F_\nu^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = \frac{F_\nu^{(1)}(w,\tau)}{\partial\tau},\nu = 0,2,\ \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F_\nu^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = \frac{F_\nu^{(1)}(w,z,\tau)}{\partial\tau},\nu = 1,3$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F_\nu^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} = \frac{F_\nu^{(1)}(w,\tau)}{\partial w},\nu = 0,2,\ \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F_\nu^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial w} = \frac{F_\nu^{(1)}(w,z,\tau)}{\partial w},\nu = 1,3.$$

и докажем следующее утверждение.

Теорема 6. Функция $F^{(1)}(w,\tau)$ имеет вид

$$F^{(1)}(w,\tau) = \Phi\big(w,\tau\big)r(x),$$

а скалярная функция $\Phi\big(w,\tau\big)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} = a'(x)w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w} + b(x)\frac{\big(jw\big)^2}{2}\Phi(w,\tau). \qquad (63)$$

Здесь функция $a(x)$ определяется равенством (58), а функция $b(x)$ имеет вид

$$b(x) = a(x) +$$

$$+2\Big(\lambda\big(g_1(x)+g_3(x)\big) + g_3{}'(0,x) - x\big(g_0(x)+g_2(x)-r_0(x)-r_2(x)\big)\Big). \qquad (64)$$

где величины $g_\nu(x)$, $\nu = 0, 2$ и $g_\nu(z, x)$, $\nu = 1, 3$ определяются системой

$$-\big(\lambda + x\big)g_0(x) + \mu g_2(x) = a(x)r_0(x),$$

$$\big(\lambda + x\big)g_0(x) + \Big(\big(\lambda + x\big)\big(B^*(\mu) - 1\big) + \mu\Big)g_2(x) + \mu g_3(x) =$$

$$= xr_0(x) + \big(a(x) - \lambda\big)r_1(x) - \Big(\big(a(x) - \lambda\big)\big(\lambda + x\big)B^{*\prime}(\mu) - a(x) + \lambda B^*(\mu)\Big)r_2(x),$$

$$g_1(x) + g_3(x) - \big(\lambda + x\big)b_1\big(g_2(x) + g_0(x)\big) =$$

$$= \left(\left(\lambda - a(x)\right)\left(\lambda + x\right)\frac{b_2}{2} - xb_1 \right)\left(r_0(x) + r_2(x)\right),$$

$$g_0(x) + g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) = 0. \qquad (65)$$

Доказательство. Запишем первые четыре уравнения системы (62) с точностью до $O\left(\varepsilon^2\right)$:

$$j\varepsilon w a(x) F_0^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon) = -\left(\lambda + x\right)F_0^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon) +$$

$$+ j\varepsilon\frac{\partial F_0^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \mu F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^2\right),$$

$$\frac{\partial F_1^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_1^{(1)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - j\varepsilon\frac{\partial F_0^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}B(z) +$$

$$+ j\varepsilon w\left(\lambda - a(x)\right)F_1^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon) + \left(\lambda + x\left(1 - j\varepsilon w\right)\right)B(z)F_0^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) +$$

$$+\mu F_3^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^2\right),$$

$$\frac{\partial F_1^{(1)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + \left(1 + j\varepsilon w\right)\frac{\partial F_3^{(1)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + j\varepsilon\frac{\partial F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} -$$

$$-\left(\lambda + \mu + j\varepsilon w a(x) + x\right)F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^2\right),$$

$$\frac{\partial F_3^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_3^{(1)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - j\varepsilon B(z)\frac{\partial F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} +$$

$$+\left(\lambda j\varepsilon w - \mu - j\varepsilon w a(x)\right)F_3^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon) + \left(\lambda + x\left(1 - j\varepsilon w\right)\right)B(z)F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^2\right),$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial F^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + j\varepsilon w a(x)F^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) = j\varepsilon w \times$$

$$\times\left\{ j\varepsilon\left(\frac{\partial F_0^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \frac{\partial F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}\right) - x\left(1 - j\varepsilon w\right)\left(F_0^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) + F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)\right) + \right.$$

$$\left. +\lambda\left(F_1^{(1)}(w,\tau,\varepsilon) + F_3^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)\right) + \frac{\partial F_3^{(1)}(w,0,\varepsilon)}{\partial z}\right\} + O\left(\varepsilon^2\right).$$

Решение этих уравнений запишем в виде разложений:

$$F_v^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)=\Phi(w,\tau)\{r_v(x)+j\varepsilon w f_v(x)\}+O(\varepsilon^2),\ v=0,2,$$

$$F_v^{(1)}(w,z,\tau,\varepsilon)=\Phi(w,\tau)\{r_v(z,x)+j\varepsilon w f_v(z,x)\}+O(\varepsilon^2),\ v=1,3, \qquad (66)$$

где $\Phi(w,\tau)$ – некоторая скалярная функция, вид которой определим ниже. Получим

$$j\varepsilon w a(x)r_0(x)=-(\lambda+x)\{r_0(x)+j\varepsilon w f_0(x)\}+j\varepsilon\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)}r_0(x)+$$

$$+\mu\{r_2(x)+j\varepsilon w f_2(x)\}+O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial r_1(z,x)}{\partial z}+j\varepsilon w\frac{\partial f_1(z,x)}{\partial z}-\frac{\partial r_1(0,x)}{\partial z}-j\varepsilon w\frac{\partial f_1(0,x)}{\partial z}-j\varepsilon\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)}r_0(x)B(z)+$$

$$+j\varepsilon w(\lambda-a(x))r_1(z,x)+(\lambda+x(1-j\varepsilon w))B(z)\{r_0(x)+j\varepsilon w f_0(x)\}+$$

$$+\mu\{r_3(z,x)+j\varepsilon w f_3(z,x)\}=O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial r_1(0,x)}{\partial z}+j\varepsilon w\frac{\partial f_1(0,x)}{\partial z}+(1+j\varepsilon w)\left(\frac{\partial r_3(0,x)}{\partial z}+j\varepsilon w\frac{\partial f_3(0,x)}{\partial z}\right)+$$

$$+j\varepsilon\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)}r_2(x)-(\lambda+\mu+j\varepsilon w a(x)+x)\{r_2(x)+j\varepsilon w f_2(x)\}=O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial r_3(z,x)}{\partial z}+j\varepsilon w\frac{\partial f_3(z,x)}{\partial z}-\frac{\partial r_3(0,x)}{\partial z}-j\varepsilon w\frac{\partial f_3(0,x)}{\partial z}-j\varepsilon B(z)\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)}r_2(x)+$$

$$+(\lambda j\varepsilon w-\mu-j\varepsilon w a(x))\{r_3(z,x)+j\varepsilon w f_3(z,x)\}+$$

$$+(\lambda+x(1-j\varepsilon w))B(z)\{r_2(x)+j\varepsilon w f_2(x)\}=O(\varepsilon^2).$$

Принимая во внимание равенство (53), разделим последнее уравнение на $j\varepsilon$ и устремим $\varepsilon\to 0$, получим

$$a(x)r_0(x)=-(\lambda+x)\,f_0(x)+\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}r_0(x)+\mu f_2(x),$$

$$\frac{\partial f_1(z,x)}{\partial z} - \frac{\partial f_1(0,x)}{\partial z} - \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)} r_0(x)B(z) +$$

$$+(\lambda - a(x))r_1(z,x) - B(z)xr_0(x) + (\lambda + x)B(z)\,f_0(x) + \mu f_3(z,x) = 0,$$

$$\frac{\partial f_1(0,x)}{\partial z} + \frac{\partial f_3(0,x)}{\partial z} + \frac{\partial r_3(0,x)}{\partial z} + \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)} r_2(x) -$$

$$-(\lambda + \mu + x)\,f_2(x) - a(x)r_2(x) = 0,$$

$$\frac{\partial f_3(z,x)}{\partial z} - \frac{\partial f_3(0,x)}{\partial z} - B(z)\frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)} r_2(x) -$$

$$-\mu f_3(z,x) + (\lambda - a(x))r_3(z,x) - B(z)xr_2(x) + (\lambda + x)B(z)\,f_2(x) = 0.$$

Получим неоднородную систему уравнений

$$-(\lambda + x)\,f_0(x) + \mu f_2(x) = a(x)r_0(x) - \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)} r_0(x),$$

$$\frac{\partial f_1(z,x)}{\partial z} - \frac{\partial f_1(0,x)}{\partial z} + (\lambda + x)B(z)\,f_0(x) + \mu f_3(z,x) =$$

$$= (a(x) - \lambda)r_1(z,x) + B(z)xr_0(x) + \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)} r_0(x)B(z)$$

$$\frac{\partial f_1(0,x)}{\partial z} + \frac{\partial f_3(0,x)}{\partial z} - (\lambda + \mu + x)\,f_2(x) = a(x)r_2(x) -$$

$$-\frac{\partial r_3(0,x)}{\partial z} - \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)} r_2(x),$$

$$\frac{\partial f_3(z,x)}{\partial z} - \frac{\partial f_3(0,x)}{\partial z} - \mu f_3(z,x) + (\lambda + x)B(z)\,f_2(x) =$$

$$= B(z)xr_2(x) + (a(x) - \lambda)r_3(z,x) + B(z)\frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)} r_2(x). \qquad (67)$$

Применяя принцип суперпозиции для неоднородных систем, решения $f_\nu(x)$ ν = 0, 2 и $f_\nu(z, x)$ ν = 1, 3 этой системы запишем в виде суммы

$$f_v(x) = Cr_v(x) + g_v(x) - \varphi_v(x)\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)},\ v = 0,2,$$

$$f_v(z,x) = Cr_v(z,x) + g_v(z,x) - \varphi_v(z,x)\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)},\ v = 1,3. \qquad (68)$$

которые подставим в (67), получим системы

$$-(\lambda + x)g_0(x) + \mu g_2(x) = a(x)r_0(x),$$

$$\frac{\partial g_1(z,x)}{\partial z} - \frac{\partial g_1(0,x)}{\partial z} + (\lambda + x)B(z)g_0(x) + \mu g_3(z,x) =$$

$$(a(x) - \lambda)r_1(z,x) + B(z)xr_0(x),$$

$$\frac{\partial g_1(0,x)}{\partial z} + \frac{\partial g_3(0,x)}{\partial z} - (\lambda + \mu + x)g_2(x) = a(x)r_2(x) - \frac{\partial r_3(0,x)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial g_3(z,x)}{\partial z} - \frac{\partial g_3(0,x)}{\partial z} - \mu g_3(z,x) + (\lambda + x)B(z)g_2(x) =$$

$$= B(z)xr_2(x) + (a(x) - \lambda)r_3(z,x) \qquad (69)$$

и

$$-(\lambda + x)\varphi_0(x) + \mu\varphi_2(x) = r_0(x)$$

$$\frac{\partial\varphi_1(z,x)}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_1(0,x)}{\partial z} + (\lambda + x)B(z)\varphi_0(x) + \mu\varphi_3(z,x) = -xr_0(x)B(z)$$

$$\frac{\partial\varphi_1(0,x)}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3(0,x)}{\partial z} - (\lambda + \mu + x)\varphi_2(x) = r_2(x)$$

$$\frac{\partial\varphi_3(z,x)}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_3(0,x)}{\partial z} - \mu\varphi_3(z,x) + (\lambda + x)B(z)\varphi_2(x) = -xB(z)r_2(x). \qquad (70)$$

Теперь рассмотрим систему (53). Продифференцируем ее по *x*, получим равенства:

$$-(\lambda+x)r_0'(x)+\mu r_2'(x)=r_0(x),$$

$$\frac{\partial^2 r_1(z,x)}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 r_1(0,x)}{\partial z\partial x}+(\lambda+x)B(z)r_0'(x)+\mu\frac{\partial r_3(z,x)}{\partial x}=-xB(z)r_0(x),$$

$$\frac{\partial^2 r_1(0,x)}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 r_3(0,x)}{\partial z\partial x}-(\lambda+\mu+x)r_2'(x)=r_2(x),$$

$$\frac{\partial^2 r_3(z,x)}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 r_3(0,x)}{\partial z\partial x}-\mu\frac{\partial r_3(z,x)}{\partial x}+(\lambda+x)B(z)r_2'(x)=-xB(z)r_2(x),$$

Учитывая последнюю систему уравнений и систему (70) для функций $\varphi_\nu(x)$, $\nu = 0, 2$ и $\varphi_\nu(z, x)$, $\nu = 1, 3$ запишем важные равенства:

$$\varphi_\nu(x)=\frac{\partial r_\nu(x)}{\partial x},\ \nu=0,2,\quad \varphi_\nu(z,x)=\frac{\partial r_\nu(z,x)}{\partial x},\ \nu=1,3. \tag{71}$$

В силу условия нормировки $r_0(x)+r_1(x)+r_2(x)+r_3(x)=1$ для величин $\varphi_\nu(x)$, при $z\to\infty$ выполняется дополнительное условие

$$\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\varphi_3(x)=0.$$

В силу (69) величины $g_\nu(x)$, $\nu = 0, 2$ и $g_\nu(z, x)$, $\nu = 1, 3$ являются частными решениями неоднородной системы, поэтому они удовлетворяют некоторому дополнительному условию, которое будем выбирать в виде $g_0(x)+g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)=0$, $z\to\infty$, тогда решения $g_\nu(x)$ системы (69), определяются однозначно.

Теперь рассмотрим последнее уравнение системы (62), в которое подставим разложения (66) и перепишем с точностью до $O(\varepsilon^3)$:

$$\varepsilon^2\frac{\partial F^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+j\varepsilon w a(x)F^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)=\left(j\varepsilon w+\frac{\left(j\varepsilon w\right)^2}{2}\right)\times$$

$$\times\left\{j\varepsilon\left(1-j\varepsilon w\right)\left(\frac{\partial F_0^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\frac{\partial F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}\right)-\right.$$

$$x\left(1-j\varepsilon w\right)\left(F_0^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)+F_2^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)\right)+$$

$$\left.+\lambda\left(F_1^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)+F_3^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)\right)+\frac{\partial F_3^{(1)}(w,0,\varepsilon)}{\partial z}\right\}+O\left(\varepsilon^3\right),$$

которое перепишем с учетом (66) в виде:

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}+j\varepsilon w a(x)\Phi\left(w,\tau\right)\left\{1+j\varepsilon wC\right\}=\left(j\varepsilon w+\frac{\left(j\varepsilon w\right)^2}{2}\right)\times$$

$$\times\left\{j\varepsilon\left(1-j\varepsilon w\right)\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}\left(r_0(x)+r_2(x)\right)-\right.$$

$$-x\left(1-j\varepsilon w\right)\Phi\left(w,\tau\right)\left(r_0(x)+j\varepsilon w f_0(x)+r_2(x)+j\varepsilon w f_2(x)\right)+$$

$$+\lambda\Phi\left(w,\tau\right)\left(r_1(x)+j\varepsilon w f_1(x)+r_3(x)+j\varepsilon w f_3(x)\right)+$$

$$\left.+\Phi\left(w,\tau\right)\left(r_3'(0,x)+j\varepsilon w f_3'(0,x)\right)\right\}+O\left(\varepsilon^3\right).$$

Имеем

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}+j\varepsilon w a(x)\Phi\left(w,\tau\right)\left\{1+j\varepsilon wC\right\}=$$

$$j\varepsilon w\times$$

$$\times\left\{j\varepsilon\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}\left(r_0(x)+r_2(x)\right)-x\Phi\left(w,\tau\right)\left(r_0(x)+j\varepsilon w f_0(x)+r_2(x)+j\varepsilon w f_2(x)\right)+\right.$$

$$\left.+j\varepsilon w x\Phi\left(w,\tau\right)\left(r_0(x)+r_2(x)\right)+\right.$$

$$+\lambda\Phi(w,\tau)\left(r_1(x)+j\varepsilon w f_1(x)+r_3(x)+j\varepsilon w f_3(x)\right)+\Phi(w,\tau)\left(r_3'(0,x)+j\varepsilon w f_3'(0,x)\right)\Big\}+$$

$$+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\Phi(w,\tau)\left\{-x\left(r_0(x)+r_2(x)\right)+\lambda\left(r_1(x)+r_3(x)\right)+r_3'(0,x)\right\}+O\left(\varepsilon^3\right).$$

Получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}+j\varepsilon w a(x)\Phi(w,\tau)\{1+j\varepsilon wC\}=\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\Phi(w,\tau)a(x)+$$

$$+j\varepsilon w\times$$

$$\times\left\{j\varepsilon\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}\left(r_0(x)+r_2(x)\right)-x\Phi(w,\tau)\left(r_0(x)+j\varepsilon w f_0(x)+r_2(x)+j\varepsilon w f_2(x)\right)+\right.$$

$$+j\varepsilon wx\Phi(w,\tau)\left(r_0(x)+r_2(x)\right)+$$

$$+\lambda\Phi(w,\tau)\left(r_1(x)+j\varepsilon w f_1(x)+r_3(x)+j\varepsilon w f_3(x)\right)+$$

$$\left.+\Phi(w,\tau)\left(r_3'(0,x)+j\varepsilon w f_3'(0,x)\right)\right\}+O\left(\varepsilon^3\right),$$

тогда

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}+j\varepsilon w a(x)\Phi(w,\tau)\{1+j\varepsilon wC\}=\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\Phi(w,\tau)a(x)+$$

$$+j\varepsilon w\Phi(w,\tau)\left\{\lambda\left(r_1(x)+r_3(x)\right)-x\left(r_0(x)+r_2(x)\right)+r_3'(0,x)\right\}+$$

$$+(j\varepsilon w)^2\Phi(w,\tau)\left\{\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}\left(r_0(x)+r_2(x)\right)-x\left(f_0(x)+f_2(x)\right)+x\left(r_0(x)+r_2(x)\right)+\right.$$

$$\left.+\lambda\left(f_1(x)+f_3(x)\right)+f_3'(0,x)\right\}+O\left(\varepsilon^3\right).$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}+(j\varepsilon w)^2 a(x)C\Phi(w,\tau)=\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\Phi(w,\tau)a(x)+$$

$$+(j\varepsilon w)^2\Phi(w,\tau)\left\{\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}\left(r_0(x)+r_2(x)\right)-\right.$$

$$-x\left(f_0(x)+f_2(x)\right)+x\left(r_0(x)+r_2(x)\right)+$$

$$+\lambda\left(f_1(x)+f_3(x)\right)+f_3'(0,x)\Big\}+O\left(\varepsilon^3\right).$$

Имеем

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}+\left(j\varepsilon w\right)^2 a(x)C\Phi\left(w,\tau\right)=\frac{\left(j\varepsilon w\right)^2}{2}\Phi\left(w,\tau\right)a(x)+$$

$$+\left(j\varepsilon w\right)^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{w\partial w}\left(r_0(x)+r_2(x)\right)+\left(j\varepsilon w\right)^2\Phi\left(w,\tau\right)\times$$

$$\times\Big\{-x\left(f_0(x)+f_2(x)-r_0(x)-r_2(x)\right)+\lambda\left(f_1(x)+f_3(x)\right)+f_3'(0,x)\Big\}+O\left(\varepsilon^3\right).$$

Последнее равенство разделим на ε^2 и устремим $\varepsilon\to 0$:

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}+\left(jw\right)^2 a(x)C\Phi\left(w,\tau\right)=\frac{\left(jw\right)^2}{2}\Phi\left(w,\tau\right)a(x)+$$

$$+\left(jw\right)^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{w\partial w}\left(r_0(x)+r_2(x)\right)+$$

$$+\left(jw\right)^2\Phi\left(w,\tau\right)\Big\{-x\left(f_0(x)+f_2(x)-r_0(x)-r_2(x)\right)+\lambda\left(f_1(x)+f_3(x)\right)+f_3'(0,x)\Big\}.$$

Теперь подставим разложения (68) при $z\to\infty$ в последнее равенство:

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}+\left(jw\right)^2 a(x)C\Phi\left(w,\tau\right)=\frac{\left(jw\right)^2}{2}\Phi\left(w,\tau\right)a(x)+$$

$$+\left(jw\right)^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{w\partial w}\left(r_0(x)+r_2(x)\right)+$$

$$+\left(jw\right)^2\Phi\left(w,\tau\right)\times$$

$$\times\left\{-x\left(Cr_0(x)+g_0(x)-\varphi_0(x)\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}-r_0(x)+\right.\right.$$

$$\left.+Cr_2(x)+g_2(x)-\varphi_2(x)\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}-r_2(x)\right)+$$

$$+\lambda\left(Cr_1(x)+g_1(x)-\varphi_1(x)\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}+Cr_3(x)+g_3(x)-\varphi_3(x)\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}\right)+$$

$$\left.+Cr_3'(,x)+g_3'(0,x)-\varphi_3'(0,x)\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}\right\}.$$

Тогда

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}+(jw)^2a(x)C\Phi(w,\tau)=\frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau)a(x)+$$

$$+(jw)^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{w\partial w}\left(r_0(x)+r_2(x)+x\left(\varphi_0(x)+\varphi_2(x)\right)-\lambda\left(\varphi_1(x)+\varphi_3(x)\right)-\varphi_3'(0,x)\right)+$$

$$+(jw)^2\Phi(w,\tau)\times$$

$$\times\left\{-x\left(Cr_0(x)+g_0(x)-r_0(x)+Cr_2(x)+g_2(x)-r_2(x)\right)+\right.$$

$$\left.+\lambda\left(Cr_1(x)+g_1(x)+Cr_3(x)+g_3(x)\right)+Cr_3'(,x)+g_3'(0,x)\right\}.$$

Преобразуем

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}+(jw)^2a(x)C\Phi(w,\tau)=\frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau)a(x)+(jw)^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{w\partial w}\times$$

$$\times\left(r_0(x)+r_2(x)+x\left(\varphi_0(x)+\varphi_2(x)\right)-\lambda\left(\varphi_1(x)+\varphi_3(x)\right)-\varphi_3'(0,x)\right)+$$

$$+(jw)^2C\Phi(w,\tau)\left\{-x\left(r_0(x)+r_2(x)\right)+\lambda\left(r_1(x)+r_3(x)\right)+r_3'(,x)\right\}+$$

$$+(jw)^2\Phi(w,\tau)\left\{-x\left(g_0(x)+g_2(x)-r_0(x)-r_2(x)\right)+\lambda\left(g_1(x)+g_3(x)\right)+g_3'(0,x)\right\}.$$

Учитывая равенство (58), получим:

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}=\frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau)a(x)+$$

$$+(jw)^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{w\partial w}\Big(r_0(x)+r_2(x)+x\big(\varphi_0(x)+\varphi_2(x)\big)-\lambda\big(\varphi_1(x)+\varphi_3(x)\big)-\varphi_3'(0,x)\Big)+$$

$$+(jw)^2\Phi(w,\tau)\Big\{-x\big(g_0(x)+g_2(x)-r_0(x)-r_2(x)\big)+\lambda\big(g_1(x)+g_3(x)\big)+g_3'(0,x)\Big\}.$$

Имеем

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}=\frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau)\times$$

$$\times\Big\{a(x)+2\Big(\lambda\big(g_1(x)+g_3(x)\big)+g_3'(0,x)-x\big(g_0(x)+g_2(x)-r_0(x)-r_2(x)\big)\Big)\Big\}+$$

$$+(jw)^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{w\partial w}\times$$

$$\times\Big(r_0(x)+r_2(x)+x\big(\varphi_0(x)+\varphi_2(x)\big)-\lambda\big(\varphi_1(x)+\varphi_3(x)\big)-\varphi_3'(0,x)\Big). \qquad (72)$$

Обозначим:

$$b(x)=a(x)+$$

$$+2\Big(\lambda\big(g_1(x)+g_3(x)\big)+g_3'(0,x)-x\big(g_0(x)+g_2(x)-r_0(x)-r_2(x)\big)\Big).$$

Тогда уравнение (72) перепишем в виде:

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}=\frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau)b(x)-w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{w\partial w}\times$$

$$\times\Big(\lambda\big(\varphi_1(x)+\varphi_3(x)\big)+\varphi_3'(0,x)-x\big(\varphi_0(x)+\varphi_2(x)\big)-r_0(x)-r_2(x)\Big). \qquad (73)$$

Рассмотрим отдельно выражение

$$-r_0(x)-r_2(x)-x\left(\varphi_0(x)+\varphi_2(x)\right)+\lambda\left(\varphi_1(x)+\varphi_3(x)\right)+\varphi_3'(0,x).$$

Применяя (71) к последнему равенству, имеем

$$a'(x)=-r_0(x)-r_2(x)-x\left(r_0'(x)+r_2'(x)\right)+\lambda\left(r_1'(x)+r_3'(x)\right)+\frac{\partial^2 r_3(0,x)}{\partial z\partial x}.$$

Уравнение (73) перепишем в виде

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}=w\frac{\partial\Phi\left(w,\tau\right)}{\partial w}a'(x)+\frac{\left(jw\right)^2}{2}b(x)\Phi\left(w,\tau\right),$$

которое совпадает с (63).

Рассмотрим систему уравнений (52), применим к ней преобразование Лапласа-Стилтьеса и перепишем второе и четвертое уравнение в ней

$$-r_1'(0,x)+\alpha r_1^*(\alpha,x)+\left(\lambda+x\right)B^*(\alpha)r_0(x)+\mu r_3^*(\alpha,x)=0,$$

$$-r_3'(0,x)+\left(\alpha-\mu\right)r_3^*(\alpha,x)+\left(\lambda+x\right)B^*(\alpha)r_2(x)=0.$$

Продифференцируем второе уравнение по α в точке α = 0

$$r_3^{*\prime}(0,x)=\frac{1}{\mu}r_3(x)-\frac{b_1}{\mu}\left(\lambda+x\right)r_2(x).$$

Используем равенства:

$$r_1'(0,x)=\left(\lambda+x\right)r_0(x)+\mu r_3(x),$$

$$r_3'(0,x) = (\lambda + x) B^*(\mu) r_2(x),$$

которые было получено, подстановкой в первое равнение $\alpha = 0$ и $\alpha = \mu$ во второе уравнение. Тогда получим сумму уравнений в системе преобразований Лапласа-Стилтьеса:

$$\alpha r_1^*(\alpha, x) + \alpha r_3^*(\alpha, x) +$$
$$+(\lambda + x)\left[\left(B^*(\alpha) - 1\right) r_0(x) + \left(B^*(\alpha) - B^*(\mu)\right) r_2(x)\right] - \mu r_3(x) = 0.$$

Продифференцируем два раза последнее равенство по α в точке $\alpha = 0$

$$\alpha\left(r_1^{*\prime\prime}(\alpha, x) + r_3^{*\prime\prime}(\alpha, x)\right) + 2r_1^{*\prime}(\alpha, x) + 2r_3^{*\prime}(\alpha, x) +$$
$$+(\lambda + x) B^{*\prime\prime}(\alpha)\left(r_0(x) + r_2(x)\right) = 0,$$

Имеем

$$2r_1^{*\prime}(0,x) + 2r_3^{*\prime}(0,x) + (\lambda + x) b_2 \left(r_0(x) + r_2(x)\right) = 0.$$

Ранее было получено

$$r_3^{*\prime}(0,x) = (\lambda + x)\frac{b_1}{\mu} r_0(x) - \frac{1}{\mu} r_1(x).$$

Тогда

$$r_1^{*\prime}(0,x) = \frac{1}{\mu} r_1(x) - (\lambda + x)\left(\frac{b_1}{\mu} r_0(x) + \frac{b_2}{2}\left(r_0(x) + r_2(x)\right)\right).$$

Эти равенства понадобятся нам ниже.

Рассмотрим систему

$$-(\lambda+x)g_0(x)+\mu g_2(x)=a(x)r_0(x),$$

$$\frac{\partial g_1(z,x)}{\partial z}-\frac{\partial g_1(0,x)}{\partial z}+(\lambda+x)B(z)g_0(x)+\mu g_3(z,x)=$$

$$=(a(x)-\lambda)r_1(z,x)+xB(z)r_0(x),$$

$$\frac{\partial g_1(0,x)}{\partial z}+\frac{\partial g_3(0,x)}{\partial z}-(\lambda+\mu+x)g_2(x)=a(x)r_2(x)-\frac{\partial r_3(0,x)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial g_3(z,x)}{\partial z}-\frac{\partial g_3(0,x)}{\partial z}-\mu g_3(z,x)+(\lambda+x)B(z)g_2(x)=$$

$$=xB(z)r_2(x)+(a(x)-\lambda)r_3(z,x). \qquad (74)$$

Обозначим $g_v'(z,x)=\frac{\partial g_v(z,x)}{\partial z}$, $g_v'(0,x)=\frac{\partial g_v(0,x)}{\partial z}$, $v=\overline{0,3}$, тогда просуммируем первое уравнение с третьим, второе уравнение с четвертым системы (74):

$$g_1'(0,x)+g_3'(0,x)-(\lambda+x)\big(g_2(x)+g_0(x)\big)=a(x)\big(r_0(x)+r_2(x)\big)-r_3'(0,x),$$

$$g_1'(z,x)+g_3'(z,x)-g_1'(0,x)-g_3'(0,x)+(\lambda+x)B(z)\big(g_2(x)+g_0(x)\big)=$$

$$=xB(z)\big(r_0(x)+r_2(x)\big)+(a(x)-\lambda)\big(r_1(z,x)+r_3(z,x)\big).$$

Тогда

$$g_1'(z,x)+g_3'(z,x)=\big(a(x)+xB(z)\big)\big(r_0(x)+r_2(x)\big)+$$

$$+(a(x)-\lambda)\big(r_1(z,x)+r_3(z,x)\big)+(\lambda+x)\big(1-B(z)\big)\big(g_2(x)+g_0(x)\big)-r_3'(0,x).$$

С учетом равенства $r_3'(0,x)=(\lambda+x)B^*(\mu)r_2(x)$, перепишем последнее уравнение

$$g_1'(z,x)+g_3'(z,x)=\big(a(x)+xB(z)\big)\big(r_0(x)+r_2(x)\big)+\big(a(x)-\lambda\big)\big(r_1(z,x)+r_3(z,x)\big)$$
$$+(\lambda+x)\big(1-B(z)\big)\big(g_2(x)+g_0(x)\big)-(\lambda+x)B^*(\mu)r_2(x).$$

Введем преобразование Лапласа-Стилтьеса

$$g_v^*(\alpha,x)=\int_0^\infty e^{-\alpha z}d_z g_v(z,x),\ v=1,3,$$

учитывая, что

$$\int_0^\infty e^{-\alpha z}d_z g_v'(z,x)=g_v'(z,x)e^{-\alpha z}\Big|_{z=0}^{\infty}-\int_0^\infty g_v'(z,x)d_z e^{-\alpha z}=$$
$$=-g_v'(0,x)+\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha z}d_z g_v(z,x)=-g_v'(0,x)+\alpha g_v^*(\alpha,x),$$

получим уравнение

$$-g_1'(0,x)+\alpha g_1^*(\alpha,x)-g_3'(0,x)+\alpha g_3^*(\alpha,x)=\big(a(x)+xB^*(\alpha)\big)\big(r_0(x)+r_2(x)\big)+$$
$$+\big(a(x)-\lambda\big)\big(r_1^*(\alpha,x)+r_3^*(\alpha,x)\big)+(\lambda+x)\big(1-B^*(\alpha)\big)\big(g_2(x)+g_0(x)\big)-$$
$$-(\lambda+x)B^*(\mu)r_2(x).$$

Ранее получили:

$$g_1'(0,x)+g_3'(0,x)=(\lambda+x)\big(g_2(x)+g_0(x)\big)+a(x)\big(r_0(x)+r_2(x)\big)-(\lambda+x)B^*(\mu)r_2(x),$$

тогда

$$\alpha g_1^*(\alpha,x)+\alpha g_3^*(\alpha,x)=\big(2a(x)+xB^*(\alpha)\big)\big(r_0(x)+r_2(x)\big)+$$

$$+\big(a(x)-\lambda\big)\big(r_1^*(\alpha,x)+r_3^*(\alpha,x)\big)+\big(\lambda+x\big)\big(2-B^*(\alpha)\big)\big(g_2(x)+g_0(x)\big)-$$

$$-2\big(\lambda+x\big)B^*(\mu)r_2(x).$$

Продифференцируем по α в нуле последнее уравнение:

$$g_1(x)+g_3(x)=-xb_1\big(r_0(x)+r_2(x)\big)+$$

$$+\big(a(x)-\lambda\big)\Big(r_1^{*\prime}(0,x)+r_3^{*\prime}(0,x)\Big)+\big(\lambda+x\big)b_1\big(g_2(x)+g_0(x)\big).$$

Так как

$$r_3^{*\prime}(0,x)=\big(\lambda+x\big)\frac{b_1}{\mu}r_0(x)-\frac{1}{\mu}r_1(x).$$

$$r_1^{*\prime}(0,x)=\frac{1}{\mu}r_1(x)-\big(\lambda+x\big)\left(\frac{b_1}{\mu}r_0(x)+\frac{b_2}{2}\big(r_0(x)+r_2(x)\big)\right).$$

Имеем

$$g_1(x)+g_3(x)=$$

$$=\left(\big(\lambda-a(x)\big)\big(\lambda+x\big)\frac{b_2}{2}-xb_1\right)\big(r_0(x)+r_2(x)\big)+\big(\lambda+x\big)b_1\big(g_2(x)+g_0(x)\big).$$

Получим еще одно уравнение из системы, взяв преобразование Лапласа-Стилтьеса от второго и четвертого уравнений системы (74), положив во втором уравнении α = 0, в четвертом уравнении α = μ:

$$g_1'(0,x) = (\lambda + x) g_0(x) + \mu g_3(x) - (a(x) - \lambda) r_1(x) - x r_0(x),$$

$$g_3'(0,x) = (\lambda + x) B^*(\mu) g_2(x) - B^*(\mu) x r_2(x) - (a(x) - \lambda) r_3^*(\mu, x).$$

Теперь рассмотрим последнее уравнение системы (50), взяв от него преобразование Лапласа-Стилтьеса, имеем

$$(\alpha - \mu) r_3^*(\alpha, x) - r_3'(0,x) + (\lambda + x) B^*(\alpha) r_2(x) = 0.$$

Продифференцируем его по α в точке α = μ, получим:

$$r_3^*(\mu, x) = -(\lambda + x) B^{*\prime}(\mu) r_2(x),$$

тогда

$$g_1'(0,x) = (\lambda + x) g_0(x) + \mu g_3(x) - (a(x) - \lambda) r_1(x) - x r_0(x),$$

$$g_3'(0,x) = (\lambda + x) B^*(\mu) g_2(x) + \left((a(x) - \lambda)(\lambda + x) B^{*\prime}(\mu) - x B^*(\mu) \right) r_2(x).$$

Просуммируем уравнения

$$g_1'(0,x) + g_3'(0,x) = (\lambda + x) g_0(x) + (\lambda + x) B^*(\mu) g_2(x) + \mu g_3(x) -$$

$$- x r_0(x) - (a(x) - \lambda) r_1(x) + \left((a(x) - \lambda)(\lambda + x) B^{*\prime}(\mu) - x B^*(\mu) \right) r_2(x).$$

Окончательно получим:

$$(\lambda + x) g_0(x) + \left((\lambda + x)\left(B^*(\mu) - 1 \right) + \mu \right) g_2(x) + \mu g_3(x) =$$

$$= xr_0(x) + \big(a(x) - \lambda\big) r_1(x) - \Big(\big(a(x) - \lambda\big)\big(\lambda + x\big) B^{*\prime}(\mu) - a(x) + \lambda B^*(\mu)\Big) r_2(x).$$

Имеем систему

$$-\big(\lambda + x\big) g_0(x) + \mu g_2(x) = a(x) r_0(x),$$

$$\big(\lambda + x\big) g_0(x) + \Big(\big(\lambda + x\big)\big(B^*(\mu) - 1\big) + \mu\Big) g_2(x) + \mu g_3(x) =$$

$$= xr_0(x) + \big(a(x) - \lambda\big) r_1(x) - \Big(\big(a(x) - \lambda\big)\big(\lambda + x\big) B^{*\prime}(\mu) - a(x) + \lambda B^*(\mu)\Big) r_2(x),$$

$$g_1(x) + g_3(x) - \big(\lambda + x\big) b_1 \big(g_2(x) + g_0(x)\big) =$$

$$== \left(\big(\lambda - a(x)\big)\big(\lambda + x\big)\frac{b_2}{2} - xb_1\right)\big(r_0(x) + r_2(x)\big),$$

$$g_0(x) + g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) = 0,$$

которая совпадает с (65). **Теорема доказана.**

Таким образом, определены функции $a(x)$, являющаяся коэффициентом переноса диффузионного процесса, равенством (58) и $b(x)$, являющаяся коэффициентом диффузии, равенством (64).

4.5 Имитационная модель исследуемой системы

Для того, чтобы оценить область применимости аналитического результата, ранее спроектированная и реализованная имитационная модель требует доработки. Было принято решение выделить отдельный интерфейс «IDelay», который определяет случайное время обслуживания заявок на приборе (и не только в перспективе) согласно выбранной случайной функции распределения вероятностей, каждая из которых предполагает свои параметры. На рисунке 16 показаны классы экспоненциального (ExpDelay) и гамма распределений (GammaDelay). У экспоненциального входной параметр один – интенсивность (intensity); у гамма два: форма (shape) и

масштаб (scale). В программу также можно добавить и другие распределения вероятностей.

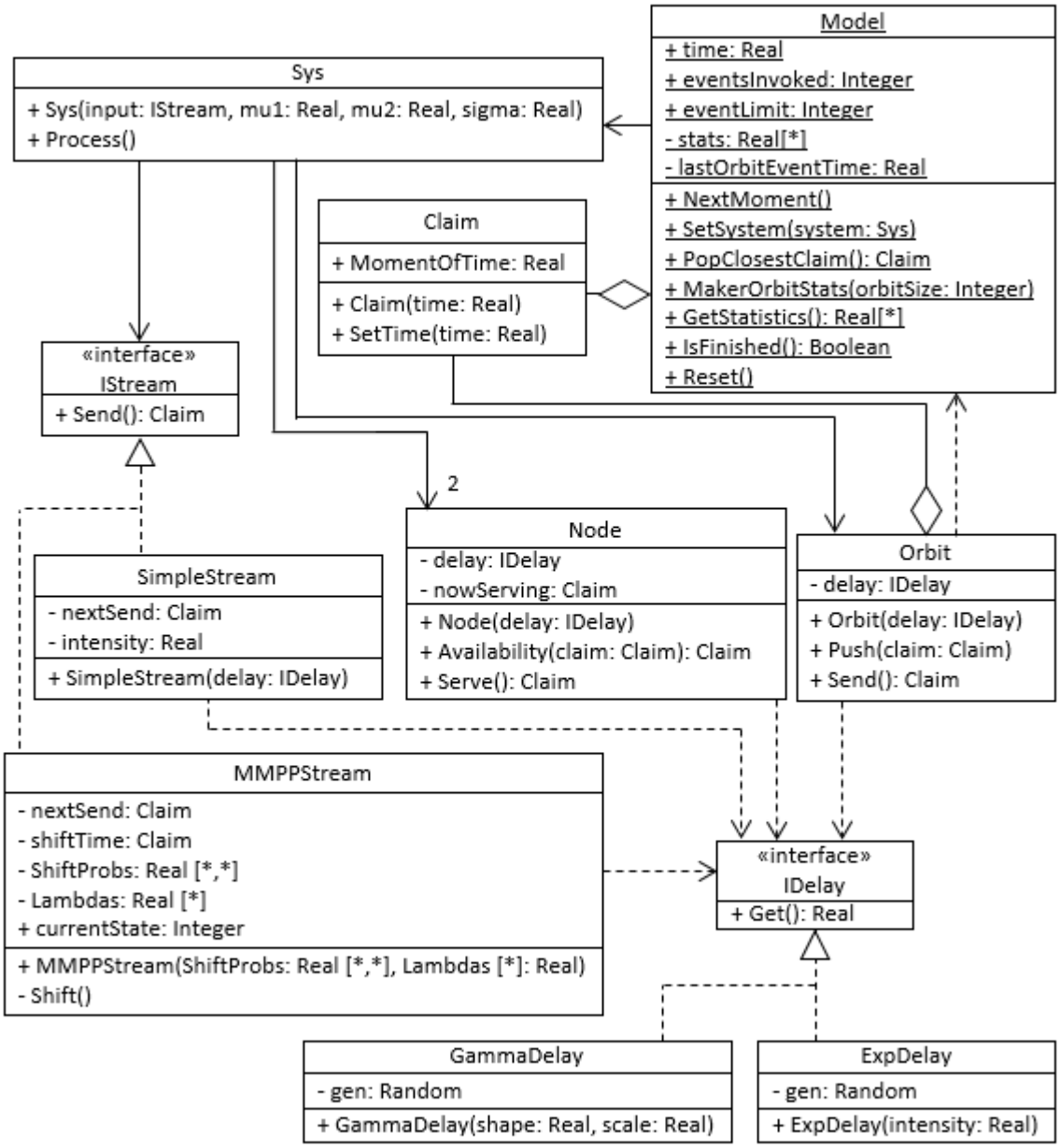


Рисунок 16 – Объектно-ориентированная модель базовых элементов автономного модуля для исследуемой системы с интерфейсом случайной задержки

Интерфейс десктопного приложения также претерпевает небольшие изменения (рисунок 17). Для приборов и орбиты можно выбрать распределения, согласно которому будут соответственно генерироваться случайные время обслуживания и задержки на орбите по кнопке «Configure».

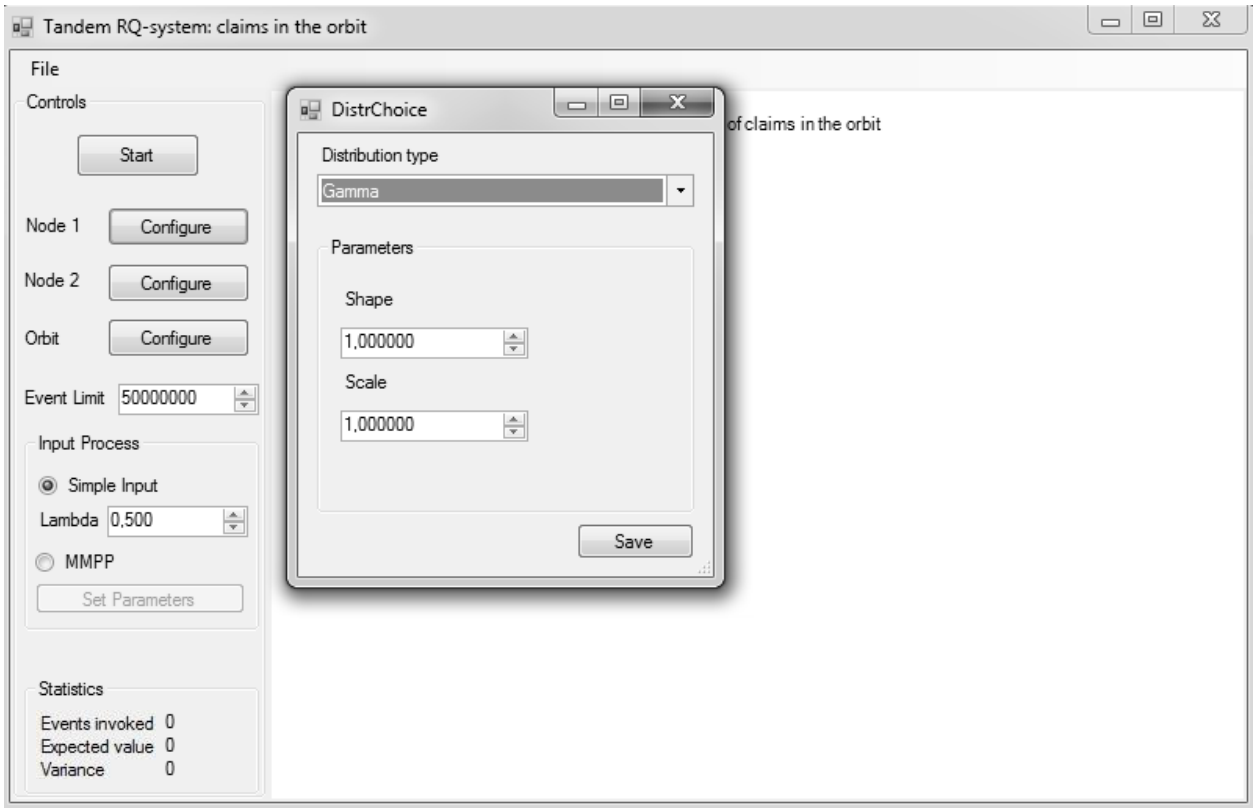


Рисунок 17 – Выбор распределения вероятностей

Простейший и входящий MMPP потоки по умолчанию используют экспоненциальное распределение вероятностей.

4.6 Анализ области применимости асимптотического результата

В исследовании ставится задача нахождения аппроксимации дискретного распределения вероятностей числа заявок на орбите для рассматриваемой тандемной системы с повторными вызовами. Для построения аппроксимации данного дискретного распределения $P(i)$ вернемся к плотности $s(z)$ случайного процесса $z(\tau)$. Переход от плотности распределения $s(z)$ непрерывного случайного процесса $z(\tau)$ к дискретному распределению $P(i)$ дискретного случайного процесса $i(\tau)$ можно осуществить разными способами.

Воспользуемся следующим: в силу равенства (36), запишем неотрицательную функцию $G(i)$ дискретного аргумента i в виде

$$G(i) = \frac{C}{b(\sigma i)} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^{\sigma i} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}.$$

Принимая во внимание условие нормировки, запишем следующее дискретное распределение вероятностей

$$Pdif_i = G(i) \Big/ \sum_{i=0}^{\infty} G(i).$$

Предложенное дискретное распределение вероятностей $Pdif_i$ используем для аппроксимации распределения вероятностей $P(i) = P\{i(t) = i\}$ числа заявок на орбите для рассматриваемой тандемной системы.

Точность $Pdif_i$ определим с помощью расстояния Колмогорова, описываемого формулой

$$d = \max_{0 \le i \le \infty} \left| \sum_{\nu=0}^{i} \left(Pdif_i - P_i \right) \right|, \ i = 0,1,...,$$

где P_i – распределение вероятностей числа заявок на орбите, полученное методом имитационного моделирования.

В качестве «удовлетворительного» значения расстояния Колмогорова мы выбрали значение 0.05, которое является приемлемым при точности имитационной модели в 0.005.

Возьмем для $B(x)$ гамма-распределение с параметрами формы (α) и масштаба (β), равными 2.

В таблице 3 содержатся расстояния Колмогорова при $\mu = 2$ для различных значений σ и λ.

Таблица 3 – Расстояние Колмогорова между асимптотическим и эмпирическим распределениями вероятностей при различных интенсивностях входящего потока

σ	λ = 0.375	λ = 0.45	λ = 0.525	λ = 0.675
1	0.003	0.038	0.076	0.149
0.5	0.032	0.064	0.085	0.129
0.1	0.045	0.051	0.059	0.092
0.05	0.035	0.042	0.052	0.086
0.01	0.027	0.033	0.041	0.071

На рисунках 18 – 20 показаны плотности распределений вероятностей числа заявок на орбите. Сплошной линией показано распределение, полученное с помощью имитационного моделирования (P_i), пунктирной – аппроксимация, полученная методом асимптотически диффузионного анализа ($Pdif_i$).

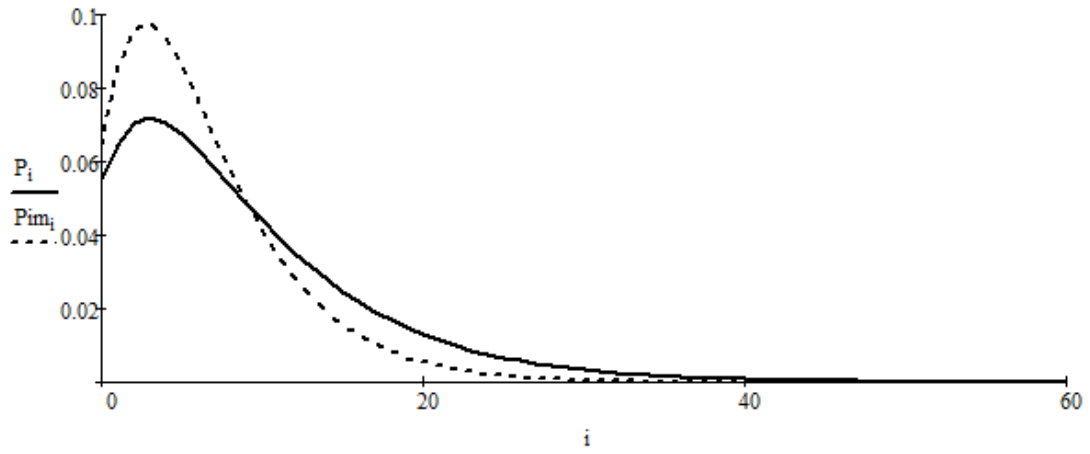


Рисунок 18 – Распределения вероятностей числа заявок на орбите при σ = 1, λ=0.5

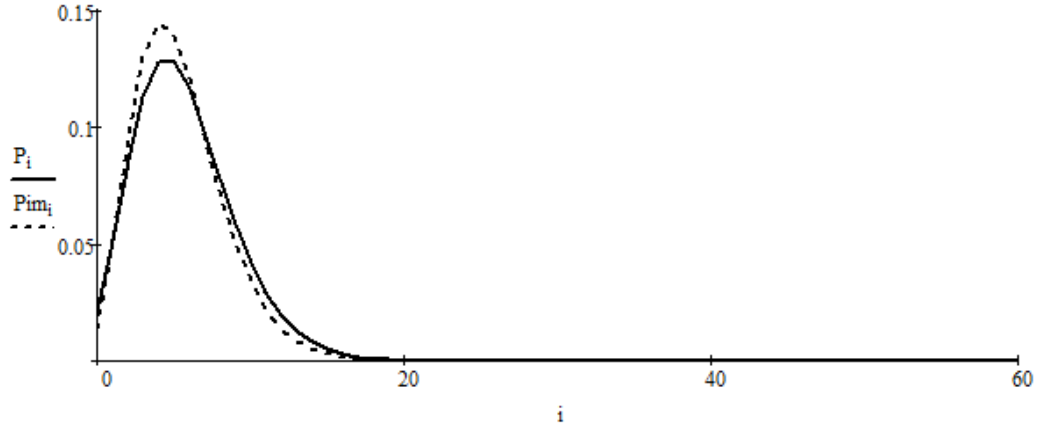


Рисунок 19 – Распределения вероятностей числа заявок на орбите при σ = 0.1, λ=0.333

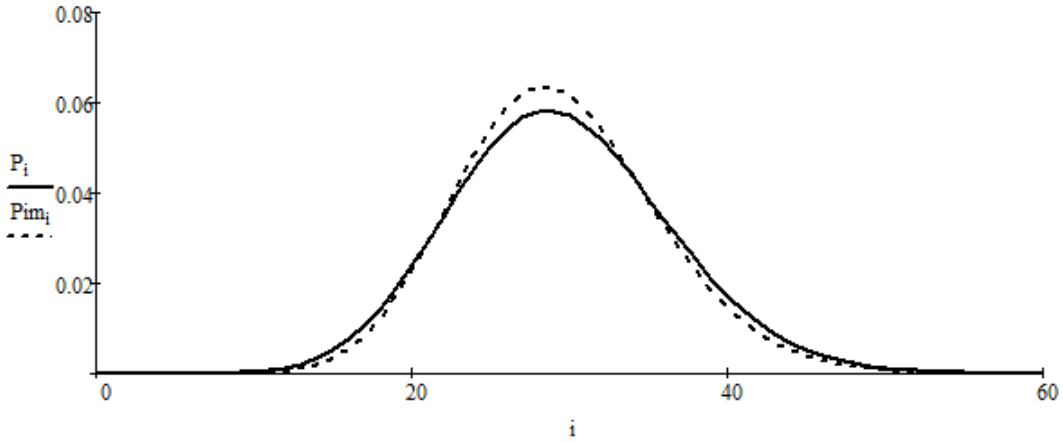


Рисунок 20 – Распределения вероятностей числа заявок на орбите при σ = 0.01, λ=0.278

Как можно увидеть, точность аппроксимации растет с уменьшением параметра σ, что соответствует асимптотическому условию, и с уменьшением параметра λ (по сути, загрузки системы). Аппроксимация, полученная аналитически, применима, когда расстояние Колмогорова не превышает 0.05.

Таким образом, в четвертой главе рассмотрена тандемная система массового обслуживания с повторными вызовами, общей орбитой, простейшим входящим потоком и произвольным обслуживанием на первом приборе. Используя метод асимптотического диффузионного анализа при условии большой задержки заявок на орбите, получены параметры диффузионного процесса. Распределение вероятности этого процесса

позволило построить аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на орбите в рассматриваемой системе.

Также определена область применимости аналитических результатов, полученных методом асимптотического диффузионного анализа, на основе результатов имитационного моделирования.

Результаты исследования были представлены на XX Международной конференции имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Томск, Россия, 1 – 5 декабря 2021 г.) по итогом которой вышла публикация [86].

5 Исследование тандемной системы с повторными вызовами и двумя орбитами

5.1 Математическая модель и постановка задачи

Вернемся к системе, состоящей из беспилотного летательного аппарата (БЛА) и базовой станции (БС). В представленных ранее математических моделях заявки, прошедшие обработку на первом приборе, но не попавшие на второй, вынуждены снова пройти через первый, что не является рациональным решением. Поэтому рассмотрим систему с двумя хранилищами для скопления данных: при БЛА и БС (рисунок 21).

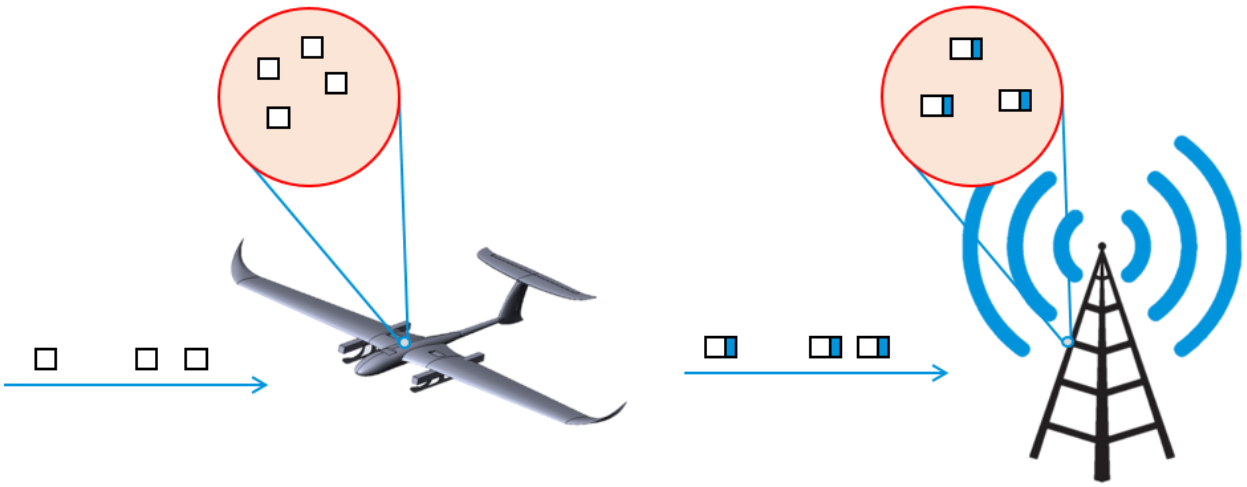


Рисунок 21 – Робототехническая система с двумя хранилищами

Хранилище при БС представим в виде орбиты, как и для БЛА. Теперь возникает задача нахождения его оптимальной размерности двух хранилищ, чтобы минимизировать потери, искажения информации.

Таким образом, сформулируем математическую модель (рисунок 22). На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Если заявка входящего потока обнаруживает первый прибор свободным, то она встает на него и обслуживается в течении экспоненциально-распределенного времени с параметром μ_1, после чего обращается ко второму прибору. Если второй прибор свободен, заявка встает на него и

обслуживается в течении экспоненциально-распределенного времени с параметром μ_2. Если заявка входящего потока застает первый прибор занятым, она мгновенно отправляется на первую орбиту, где после случайной экспоненциально-распределенной задержки с параметром σ_1 снова пытается встать на первый прибор для обслуживания. Если после обслуживания на первом приборе заявка застает второй прибор занятым, она мгновенно отправляется на вторую орбиту, где после случайной экспоненциально-распределенной задержки с параметром σ_2 снова пытается попасть на обслуживание вторым прибором.

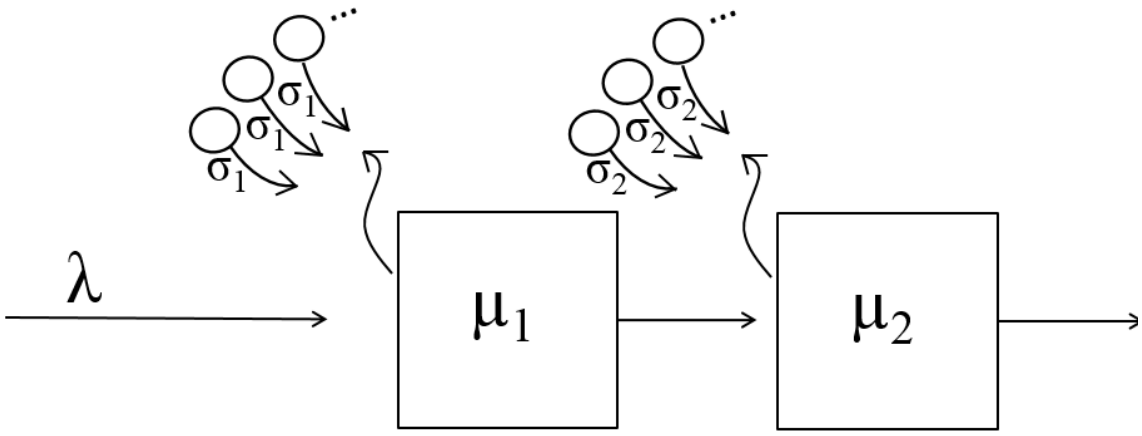


Рисунок 22 – Тандемная система с повторными вызовами и двумя орбитами

Введем обозначения:

процесс $n_1(t)$ – состояние первого прибора в момент времени t: 0, если прибор свободен; 1, если прибор занят;

процесс $n_2(t)$ – состояние второго прибора в момент времени t: 0, если прибор свободен; 1, если прибор занят;

процесс $i_1(t)$ – число заявок, находящихся на первой орбите в момент времени t;

процесс $i_2(t)$ – число заявок, находящихся на второй орбите в момент времени t.

Ставится задача нахождения двумерного распределения вероятностей числа заявок $\{i_1(t), i_2(t)\}$ на орбитах.

5.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Обозначим вероятности

$$P_{n_1 n_2}(i_1, i_2, t) = P\{n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\}. \qquad (75)$$

Четырехмерный случайный процесс $\{n_1(t),\ n_2(t),\ i_1(t),\ i_2(t)\}$ является марковским. Для распределения вероятностей (75) составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

Запишем равенства

$$P_{00}(i_1, i_2, t+\Delta t) = P_{00}(i_1, i_2, t)(1-\lambda\Delta t)(1-i_1\sigma_1\Delta t)(1-i_2\sigma_2\Delta t) + P_{01}(i_1, i_2, t)\mu_2\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_{10}(i_1, i_2, t+\Delta t) = P_{00}(i_1, i_2, t)\lambda\Delta t + P_{00}(i_1+1, i_2, t)(i_1+1)\sigma_1\Delta t +$$

$$+P_{10}(i_1, i_2, t)(1-\lambda\Delta t)(1-i_2\sigma_2\Delta t)(1-\mu_1\Delta t) + P_{10}(i_1-1, i_2, t)\lambda\Delta t + P_{11}(i_1, i_2, t)\mu_2\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_{01}(i_1, i_2, t+\Delta t) = P_{00}(i_1, i_2+1, t)(i_2+1)\sigma_2\Delta t + P_{10}(i_1, i_2, t)\mu_1\Delta t +$$

$$+P_{01}(i_1, i_2, t)(1-\lambda\Delta t)(1-i_1\sigma_1\Delta t)(1-\mu_2\Delta t) + P_{11}(i_1, i_2-1, t)\mu_1\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_{11}(i_1, i_2, t+\Delta t) = P_{01}(i_1, i_2, t)\lambda\Delta t + P_{01}(i_1+1, i_2, t)(i_1+1)\sigma_1\Delta t +$$

$$+P_{10}(i_1, i_2+1, t)(i_2+1)\sigma_2\Delta t + P_{11}(i_1, i_2, t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu_1\Delta t)(1-\mu_2\Delta t) +$$

$$+P_{11}(i_1-1, i_2, t)\lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

Раскроем скобки

$$P_{00}(i_1, i_2, t+\Delta t) = (1-(\lambda + i_1\sigma_1 + i_2\sigma_2)\Delta t)P_{00}(i_1, i_2, t) + \mu_2\Delta t P_{01}(i_1, i_2, t) + o(\Delta t),$$

$$P_{10}(i_1, i_2, t+\Delta t) = \lambda\Delta t P_{00}(i_1, i_2, t) + (i_1+1)\sigma_1\Delta t P_{00}(i_1+1, i_2, t) +$$

$$+(1-(\lambda + i_2\sigma_2 + \mu_1)\Delta t)P_{10}(i_1, i_2, t) + \lambda\Delta t P_{10}(i_1-1, i_2, t) + \mu_2\Delta t P_{11}(i_1, i_2, t) + o(\Delta t),$$

$$P_{01}(i_1, i_2, t+\Delta t) = (i_2+1)\sigma_2\Delta t P_{00}(i_1, i_2+1, t) + \mu_1\Delta t P_{10}(i_1, i_2, t) +$$

$$+(1-(\lambda + i_1\sigma_1 + \mu_2)\Delta t)P_{01}(i_1, i_2, t) + \mu_1\Delta t P_{11}(i_1, i_2-1, t) + o(\Delta t),$$

$$P_{11}(i_1, i_2, t+\Delta t) = \lambda\Delta t P_{01}(i_1, i_2, t) + (i_1+1)\sigma_1\Delta t P_{01}(i_1+1, i_2, t) +$$

$$+(i_2+1)\sigma_2\Delta tP_{10}(i_1,i_2+1,t)+(1-(\lambda+\mu_1+\mu_2)\Delta t)P_{11}(i_1,i_2,t)+$$
$$+\lambda\Delta tP_{11}(i_1-1,i_2,t)+o(\Delta t).$$

Перенесем в левую сторону слагаемые без множителя Δt

$$P_{00}(i_1,i_2,t+\Delta t)-P_{00}(i_1,i_2,t)=-(\lambda+i_1\sigma_1+i_2\sigma_2)\Delta tP_{00}(i_1,i_2,t)+$$
$$+\mu_2\Delta tP_{01}(i_1,i_2,t)+o(\Delta t),$$
$$P_{10}(i_1,i_2,t+\Delta t)-P_{10}(i_1,i_2,t)=\lambda\Delta tP_{00}(i_1,i_2,t)+(i_1+1)\sigma_1\Delta tP_{00}(i_1+1,i_2,t)-$$
$$-(\lambda+i_2\sigma_2+\mu_1)\Delta tP_{10}(i_1,i_2,t)+\lambda\Delta tP_{10}(i_1-1,i_2,t)+\mu_2\Delta tP_{11}(i_1,i_2,t)+o(\Delta t),$$
$$P_{01}(i_1,i_2,t+\Delta t)-P_{01}(i_1,i_2,t)=(i_2+1)\sigma_2\Delta tP_{00}(i_1,i_2+1,t)+\mu_1\Delta tP_{10}(i_1,i_2,t)-$$
$$-(\lambda+i_1\sigma_1+\mu_2)\Delta tP_{01}(i_1,i_2,t)+\mu_1\Delta tP_{11}(i_1,i_2-1,t)+o(\Delta t),$$
$$P_{11}(i_1,i_2,t+\Delta t)-P_{11}(i_1,i_2,t)=\lambda\Delta tP_{01}(i_1,i_2,t)+(i_1+1)\sigma_1\Delta tP_{01}(i_1+1,i_2,t)+$$
$$+(i_2+1)\sigma_2\Delta tP_{10}(i_1,i_2+1,t)-(\lambda+\mu_1+\mu_2)\Delta tP_{11}(i_1,i_2,t)+$$
$$+\lambda\Delta tP_{11}(i_1-1,i_2,t)+o(\Delta t).$$

Разделим уравнения системы на Δt

$$\frac{P_{00}(i_1,i_2,t+\Delta t)-P_{00}(i_1,i_2,t)}{\Delta t}=-(\lambda+i_1\sigma_1+i_2\sigma_2)P_{00}(i_1,i_2,t)+$$
$$+\mu_2P_{01}(i_1,i_2,t)+o(\Delta t),$$
$$\frac{P_{10}(i_1,i_2,t+\Delta t)-P_{10}(i_1,i_2,t)}{\Delta t}=\lambda P_{00}(i_1,i_2,t)+(i_1+1)\sigma_1P_{00}(i_1+1,i_2,t)-$$
$$-(\lambda+i_2\sigma_2+\mu_1)P_{10}(i_1,i_2,t)+\lambda P_{10}(i_1-1,i_2,t)+\mu_2P_{11}(i_1,i_2,t)+o(\Delta t),$$
$$\frac{P_{01}(i_1,i_2,t+\Delta t)-P_{01}(i_1,i_2,t)}{\Delta t}=(i_2+1)\sigma_2P_{00}(i_1,i_2+1,t)+\mu_1P_{10}(i_1,i_2,t)-$$
$$-(\lambda+i_1\sigma_1+\mu_2)P_{01}(i_1,i_2,t)+\mu_1P_{11}(i_1,i_2-1,t)+o(\Delta t),$$
$$\frac{P_{11}(i_1,i_2,t+\Delta t)-P_{11}(i_1,i_2,t)}{\Delta t}=\lambda P_{01}(i_1,i_2,t)+(i_1+1)\sigma_1P_{01}(i_1+1,i_2,t)+$$
$$+(i_2+1)\sigma_2P_{10}(i_1,i_2+1,t)-(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{11}(i_1,i_2,t)+\lambda P_{11}(i_1-1,i_2,t)+o(\Delta t).$$

Устремив $\Delta t \to 0$, получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P_{00}(i_1,i_2,t)}{\partial t} = -(\lambda + i_1\sigma_1 + i_2\sigma_2)P_{00}(i_1,i_2,t) + \mu_2 P_{01}(i_1,i_2,t),$$

$$\frac{\partial P_{10}(i_1,i_2,t)}{\partial t} = \lambda P_{00}(i_1,i_2,t) + (i_1+1)\sigma_1 P_{00}(i_1+1,i_2,t) - (\lambda + i_2\sigma_2 + \mu_1)P_{10}(i_1,i_2,t) +$$

$$+\lambda P_{10}(i_1-1,i_2,t) + \mu_2 P_{11}(i_1,i_2,t),$$

$$\frac{\partial P_{01}(i_1,i_2,t)}{\partial t} = (i_2+1)\sigma_2 P_{00}(i_1,i_2+1,t) + \mu_1 P_{10}(i_1,i_2,t) - (\lambda + i_1\sigma_1 + \mu_2)P_{01}(i_1,i_2,t) +$$

$$+\mu_1 P_{11}(i_1,i_2-1,t),$$

$$\frac{\partial P_{11}(i_1,i_2,t)}{\partial t} = \lambda P_{01}(i_1,i_2,t) + (i_1+1)\sigma_1 P_{01}(i_1+1,i_2,t) + (i_2+1)\sigma_2 P_{10}(i_1,i_2+1,t) -$$

$$-(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P_{11}(i_1,i_2,t) + \lambda P_{11}(i_1-1,i_2,t). \qquad (76)$$

Перепишем систему уравнений (76) в стационарном виде:

$$-(\lambda + i_1\sigma_1 + i_2\sigma_2)P_{00}(i_1,i_2) + \mu_2 P_{01}(i_1,i_2) = 0,$$

$$\lambda P_{00}(i_1,i_2) + (i_1+1)\sigma_1 P_{00}(i_1+1,i_2) - (\lambda + i_2\sigma_2 + \mu_1)P_{10}(i_1,i_2) +$$

$$+\lambda P_{10}(i_1-1,i_2) + \mu_2 P_{11}(i_1,i_2) = 0,$$

$$(i_2+1)\sigma_2 P_{00}(i_1,i_2+1) + \mu_1 P_{10}(i_1,i_2) - (\lambda + i_1\sigma_1 + \mu_2)P_{01}(i_1,i_2) +$$

$$+\mu_1 P_{11}(i_1,i_2-1) = 0,$$

$$\lambda P_{01}(i_1,i_2) + (i_1+1)\sigma_1 P_{01}(i_1+1,i_2) + (i_2+1)\sigma_2 P_{10}(i_1,i_2+1) -$$

$$-(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P_{11}(i_1,i_2) + \lambda P_{11}(i_1-1,i_2) = 0. \qquad (77)$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$

$$H_{n_1 n_2}(u_1,u_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} P_{n_1 n_2}(i_1,i_2). \qquad (78)$$

Перепишем систему (77) с учетом определения (78)

$$-\lambda H_{00}(u_1,u_2)+j\sigma_1\frac{\partial H_{00}(u_1,u_2)}{\partial u_1}+j\sigma_2\frac{\partial H_{00}(u_1,u_2)}{\partial u_2}+\mu_2 H_{01}(u_1,u_2)=0,$$

$$\lambda H_{00}(u_1,u_2)-j\sigma_1 e^{-ju_1}\frac{\partial H_{00}(u_1,u_2)}{\partial u_1}-(\lambda+\mu_1-\lambda e^{ju_1})H_{10}(u_1,u_2)+$$

$$+j\sigma_2\frac{\partial H_{10}(u_1,u_2)}{\partial u_2}+\mu_2 H_{11}(u_1,u_2)=0,$$

$$-j\sigma_2 e^{-ju_2}\frac{\partial H_{00}(u_1,u_2)}{\partial u_2}+\mu_1 H_{10}(u_1,u_2)-(\lambda+\mu_2)H_{01}(u_1,u_2)+$$

$$+j\sigma_1\frac{\partial H_{01}(u_1,u_2)}{\partial u_1}+\mu_1 e^{ju_2}H_{11}(u_1,u_2)=0,$$

$$\lambda H_{01}(u_1,u_2)-j\sigma_1 e^{-ju_1}\frac{\partial H_{01}(u_1,u_2)}{\partial u_1}-j\sigma_2 e^{-ju_2}\frac{\partial H_{10}(u_1,u_2)}{\partial u_2}-$$

$$-(\lambda+\mu_1+\mu_2-\lambda e^{ju_1})H_{11}(u_1,u_2)=0. \qquad (79)$$

Введем матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0\\ 0 & -(\lambda+\mu_1) & \mu_1 & 0\\ \mu_2 & 0 & -(\lambda+\mu_2) & \lambda\\ 0 & \mu_2 & 0 & -(\lambda+\mu_1+\mu_2)\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&\lambda\end{bmatrix},\ \mathbf{B}_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\mu_1&0\end{bmatrix},\ \mathbf{I}_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \mathbf{I}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \mathbf{I}_3=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

и запишем систему в матричном виде

$$\mathbf{H}(u_1,u_2)\left\{\mathbf{A}+e^{ju_1}\mathbf{B}_1+e^{ju_2}\mathbf{B}_2\right\}+j\sigma_1\frac{\partial\mathbf{H}(u_1,u_2)}{\partial u_1}\left\{\mathbf{I}_0-e^{-ju_1}\mathbf{I}_1\right\}+$$

$$+j\sigma_2\frac{\partial\mathbf{H}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\left\{\mathbf{I}_2-e^{-ju_2}\mathbf{I}_3\right\}=0, \qquad (80)$$

где $\mathbf{H}(u_1,u_2)=\left\{H_{00}(u_1,u_2),H_{10}(u_1,u_2),H_{01}(u_1,u_2),H_{11}(u_1,u_2)\right\}$.

Запишем уравнение, которое получим из системы (80), умножив ее на единичный вектор столбец **e**

$$\mathbf{H}(u_1,u_2)\left\{\mathbf{A}+e^{ju_1}\mathbf{B}_1+e^{ju_2}\mathbf{B}_2\right\}\mathbf{e}+j\sigma_1\frac{\partial\mathbf{H}(u_1,u_2)}{\partial u_1}\left\{\mathbf{I}_0-e^{-ju_1}\mathbf{I}_1\right\}\mathbf{e}+$$

$$+j\sigma_2\frac{\partial\mathbf{H}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\left\{\mathbf{I}_2-e^{-ju_2}\mathbf{I}_3\right\}\mathbf{e}=0.$$

Т.к. $\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2\right)\mathbf{e}=0$, $\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)\mathbf{e}=0$ и $\left(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\right)\mathbf{e}=0$, то $\mathbf{Ae}=(-\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2)\mathbf{e}$, $\mathbf{I}_0\mathbf{e}=\mathbf{I}_1\mathbf{e}$ и $\mathbf{I}_2\mathbf{e}=\mathbf{I}_3\mathbf{e}$, сделаем соответствующие замены

$$\mathbf{H}(u_1,u_2)\left\{-\mathbf{B}_1\mathbf{e}-\mathbf{B}_2\mathbf{e}+e^{ju_1}\mathbf{B}_1\mathbf{e}+e^{ju_2}\mathbf{B}_2\mathbf{e}\right\}+j\sigma_1\frac{\partial\mathbf{H}(u_1,u_2)}{\partial u_1}\left\{\mathbf{I}_0\mathbf{e}-e^{-ju_1}\mathbf{I}_0\mathbf{e}\right\}+$$

$$+j\sigma_2\frac{\partial\mathbf{H}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\left\{\mathbf{I}_2\mathbf{e}-e^{-ju_2}\mathbf{I}_2\mathbf{e}\right\}=0$$

и получим скалярное уравнение

$$\mathbf{H}(u_1,u_2)(e^{ju_1}-1)\mathbf{B}_1\mathbf{e}+\mathbf{H}(u_1,u_2)(e^{ju_2}-1)\mathbf{B}_2\mathbf{e}+j\sigma_1e^{-ju_1}\frac{\partial\mathbf{H}(u_1,u_2)}{\partial u_1}\left(e^{ju_1}-1\right)\mathbf{I}_0\mathbf{e}+$$

$$+ j\sigma_2 e^{-ju_2} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\left(e^{ju_2} - 1\right)\mathbf{I}_2\mathbf{e} = 0\,.$$

Матричное уравнение (80) и полученное скалярное уравнение запишем в виде системы:

$$\mathbf{H}(u_1,u_2)\left\{\mathbf{A} + e^{ju_1}\mathbf{B}_1 + e^{ju_2}\mathbf{B}_2\right\} + j\sigma_1 \frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2)}{\partial u_1}\left\{\mathbf{I}_0 - e^{-ju_1}\mathbf{I}_1\right\} +$$

$$+ j\sigma_2 \frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\left\{\mathbf{I}_2 - e^{-ju_2}\mathbf{I}_3\right\} = 0\,,$$

$$(e^{ju_1} - 1)\left\{\mathbf{H}(u_1,u_2)\mathbf{B}_1 + j\sigma_1 e^{-ju_1} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2)}{\partial u_1}\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e} +$$

$$+(e^{ju_2} - 1)\left\{\mathbf{H}(u_1,u_2)\mathbf{B}_2 + j\sigma_2 e^{-ju_2} \frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\mathbf{I}_2\right\}\mathbf{e} = 0\,. \qquad (81)$$

Данная система уравнений является основной в дальнейших исследованиях. Будем решать ее методом асимптотического анализа [65] в предельном условии большой задержки заявок на орбитах.

5.3 Асимптотика первого порядка

Обозначим $\sigma_1 = \sigma\gamma_1$, $\sigma_2 = \sigma\gamma_2$, $\sigma = \varepsilon$ и выполним в системе (81) замены

$$u_1 = \varepsilon w_1,\ u_2 = \varepsilon w_2,\ \mathbf{H}(u_1, u_2) = \mathbf{F}(w_1, w_2, \varepsilon).$$

Получим систему

$$\mathbf{F}(w_1,w_2,\varepsilon)\left\{\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w_1}\mathbf{B}_1 + e^{j\varepsilon w_2}\mathbf{B}_2\right\} + j\gamma_1 \frac{\partial \mathbf{F}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}\left\{\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w_1}\mathbf{I}_1\right\} +$$

$$+j\gamma_2\frac{\partial\mathbf{F}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}\left\{\mathbf{I}_2-e^{-j\varepsilon w_2}\mathbf{I}_3\right\}=0,$$

$$(e^{j\varepsilon w_1}-1)\left\{\mathbf{F}(w_1,w_2,\varepsilon)\mathbf{B}_1+j\gamma_1 e^{-j\varepsilon w_1}\frac{\partial\mathbf{F}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e}+$$

$$+(e^{j\varepsilon w_2}-1)\left\{\mathbf{F}(w_1,w_2,\varepsilon)\mathbf{B}_2+j\gamma_2 e^{-j\varepsilon w_2}\frac{\partial\mathbf{F}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}\mathbf{I}_2\right\}\mathbf{e}=0. \quad (82)$$

Теорема 7. В предельном условии $\sigma \to 0$ выполняется равенство

$$\lim_{\sigma\to 0} Me^{jw_1\sigma i_1(t)+jw_2\sigma i_2(t)}=e^{jw_1a_1+jw_2a_2}. \quad (83)$$

Обозначим $\mathbf{r}=\begin{bmatrix}r_{00} & r_{10} & r_{01} & r_{11}\end{bmatrix}$ – вектор стационарных вероятностей состояний прибора, удовлетворяющий условию нормировки **re** = 1 и являющийся решением матричного уравнения

$$\mathbf{r}\left\{\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2\right\}-\gamma_1 a_1\mathbf{r}\left\{\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right\}-\gamma_2 a_2\mathbf{r}\left\{\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\right\}=0, \quad (84)$$

где a_1 и a_2 являются решениями уравнений

$$\mathbf{r}\left\{\mathbf{B}_1-\gamma_1 a_1\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e}=0, \quad (85)$$

$$\mathbf{r}\left\{\mathbf{B}_2-\gamma_2 a_2\mathbf{I}_2\right\}\mathbf{e}=0, \quad (86)$$

где γ_1 и γ_2 являются параметрами асимптотического анализа.

Доказательство. Разложим в системе (82) экспоненты в ряд Тейлора, сгруппируем слагаемые порядка малости не выше ε, разделим на ε и устремим $\varepsilon \to 0$. Получим:

$$\mathbf{F}(w_1,w_2)\{\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2\}+j\gamma_1\frac{\partial\mathbf{F}(w_1,w_2)}{\partial w_1}\{\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\}+j\gamma_2\frac{\partial\mathbf{F}(w_1,w_2)}{\partial w_2}\{\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\}=0,$$

$$jw_1\left\{\mathbf{F}(w_1,w_2)\mathbf{B}_1+j\gamma_1\frac{\partial\mathbf{F}(w_1,w_2)}{\partial w_1}\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e}+$$

$$+jw_2\left\{\mathbf{F}(w_1,w_2)\mathbf{B}_2+j\gamma_2\frac{\partial\mathbf{F}(w_1,w_2)}{\partial w_2}\mathbf{I}_2\right\}\mathbf{e}=0.$$

Решение системы будем искать в виде

$$\mathbf{F}(w_1,w_2)=\mathbf{r}\Phi(w_1,w_2)$$

где $\mathbf{r}=\begin{bmatrix}r_{00} & r_{10} & r_{01} & r_{11}\end{bmatrix}$ – вектор стационарных вероятностей состояний прибора. Получим

$$\mathbf{r}\{\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2\}+j\gamma_1\mathbf{r}\frac{\partial\Phi(w_1,w_2)/\partial w_1}{\Phi(w_1,w_2)}\{\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\}+j\gamma_2\mathbf{r}\frac{\partial\Phi(w_1,w_2)/\partial w_2}{\Phi(w_1,w_2)}\{\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\}=0,$$

$$jw_1\left\{\mathbf{r}\mathbf{B}_1+j\gamma_1\mathbf{r}\frac{\partial\Phi(w_1,w_2)/\partial w_1}{\Phi(w_1,w_2)}\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e}+$$

$$+jw_2\left\{\mathbf{r}\mathbf{B}_2+j\gamma_2\mathbf{r}\frac{\partial\Phi(w_1,w_2)/\partial w_2}{\Phi(w_1,w_2)}\mathbf{I}_2\right\}\mathbf{e}=0.$$

Решение последней системы будем искать в виде:

$$\Phi(w_1,w_2)=\exp\{jw_1a_1+jw_2a_2\}.$$

Тогда $j\frac{\partial\Phi(w_1,w_2)/\partial w_1}{\Phi(w_1,w_2)}=-a_1,\ j\frac{\partial\Phi(w_1,w_2)/\partial w_2}{\Phi(w_1,w_2)}=-a_2.$ Учтем, что $\mathbf{r}$ удовлетворяет условию нормировки, тогда

$$\mathbf{r}\{\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2\}-\gamma_1 a_1\mathbf{r}\{\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\}-\gamma_2 a_2\mathbf{r}\{\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\}=0,$$

$$jw_1\mathbf{r}\{\mathbf{B}_1-\gamma_1 a_1\mathbf{I}_0\}\mathbf{e}+jw_2\mathbf{r}\{\mathbf{B}_2-\gamma_2 a_2\mathbf{I}_2\}\mathbf{e}=0,$$

$$\mathbf{re}=1.$$

Получим систему

$$\mathbf{r}\{\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2\}-\gamma_1 a_1\{\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\}-\gamma_2 a_2\{\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\}=0,$$

$$jw_1\mathbf{r}\{\mathbf{B}_1-\gamma_1 a_1\mathbf{I}_0\}\mathbf{e}=0,$$

$$jw_2\mathbf{r}\{\mathbf{B}_2-\gamma_2 a_2\mathbf{I}_2\}\mathbf{e}=0,$$

$$\mathbf{re}=1. \qquad (87)$$

Решив данную систему, найдем вектор стационарный вероятностей приборов (**r**) и, как будет показано далее, асимптотические сроедние числа заявок на орьитах (a_1 и a_2). **Теорема доказана.**

5.4 Асимптотика второго порядка

В систему (81) подставим следующее выражение

$$\mathbf{H}(u_1,u_2)=\exp\left(ju_1\frac{a_1}{\sigma_1}+ju_2\frac{a_2}{\sigma_2}\right)\mathbf{H}^{(2)}(u_1,u_2).$$

Получим систему

$$\mathbf{H}^{(2)}(u_1,u_2)\left\{\mathbf{A}+e^{ju_1}\mathbf{B}_1+e^{ju_2}\mathbf{B}_2-\gamma_1 a_1(\mathbf{I}_0-e^{-ju_1}\mathbf{I}_1)-\gamma_2 a_2(\mathbf{I}_2-e^{-ju_2}\mathbf{I}_3)\right\}+$$

$$+j\sigma_1\frac{\partial\mathbf{H}^{(2)}(u_1,u_2)}{\partial u_1}\left\{\mathbf{I}_0-e^{-ju_1}\mathbf{I}_1\right\}+j\sigma_2\frac{\partial\mathbf{H}^{(2)}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\left\{\mathbf{I}_2-e^{-ju_2}\mathbf{I}_3\right\}=0,$$

$$(e^{ju_1}-1)\left\{\mathbf{H}^{(2)}(u_1,u_2)(\mathbf{B}_1-e^{-ju_1}a_1\gamma_1\mathbf{I}_0)+j\sigma_1 e^{-ju_1}\frac{\partial\mathbf{H}^{(2)}(u_1,u_2)}{\partial u_1}\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e}+$$

$$+(e^{ju_2}-1)\left\{\mathbf{H}^{(2)}(u_1,u_2)(\mathbf{B}_2-e^{-ju_2}a_2\gamma_2\mathbf{I}_2)+j\sigma_2 e^{-ju_2}\frac{\partial\mathbf{H}^{(2)}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\mathbf{I}_2\right\}\mathbf{e}=0.$$

Сделаем замены

$$\sigma_1=\sigma\gamma_1,\ \sigma_2=\sigma\gamma_2,\ \sigma=\varepsilon^2,\ u_1=\varepsilon w_1,\ u_2=\varepsilon w_2,\ \mathbf{H}^{(2)}(u_1,u_2)=\mathbf{F}^{(2)}(w_1,w_2,\varepsilon),$$

тогда получим систему

$$\mathbf{F}^{(2)}(w_1,w_2,\varepsilon)\left\{\mathbf{A}+e^{j\varepsilon w_1}\mathbf{B}_1+e^{j\varepsilon w_2}\mathbf{B}_2-\gamma_1 a_1(\mathbf{I}_0-e^{-j\varepsilon w_1}\mathbf{I}_1)-\gamma_2 a_2(\mathbf{I}_2-e^{-j\varepsilon w_2}\mathbf{I}_3)\right\}+$$

$$+j\varepsilon\gamma_1\frac{\partial\mathbf{F}^{(2)}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}\left\{\mathbf{I}_0-e^{-j\varepsilon w_1}\mathbf{I}_1\right\}+j\varepsilon\gamma_2\frac{\partial\mathbf{F}^{(2)}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}\left\{\mathbf{I}_2-e^{-j\varepsilon w_2}\mathbf{I}_3\right\}=0,$$

$$(e^{j\varepsilon w_1}-1)\left\{\mathbf{F}^{(2)}(w_1,w_2,\varepsilon)(\mathbf{B}_1-e^{-j\varepsilon w_1}a_1\gamma_1\mathbf{I}_0)+j\varepsilon\gamma_1 e^{-j\varepsilon w_1}\frac{\partial\mathbf{F}^{(2)}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_1}\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e}+$$

$$+(e^{j\varepsilon w_2}-1)\left\{\mathbf{F}^{(2)}(w_1,w_2,\varepsilon)(\mathbf{B}_2-e^{-j\varepsilon w_2}a_2\gamma_2\mathbf{I}_2)+\right.$$

$$\left.+j\varepsilon\gamma_2 e^{-j\varepsilon w_2}\frac{\partial\mathbf{F}^{(2)}(w_1,w_2,\varepsilon)}{\partial w_2}\mathbf{I}_2\right\}\mathbf{e}=0. \qquad (88)$$

Теорема 8. В предельном условии $\sigma\to 0$ выполняется равенство

$$\lim_{\sigma\to 0} Me^{jw_1\sqrt{\sigma}\left(i_1(t)-\frac{a_1}{\sigma}\right)+jw_2\sqrt{\sigma}\left(i_2(t)-\frac{a_2}{\sigma}\right)}=e^{\frac{(jw_1)^2}{2}K_{11}+\frac{(jw_2)^2}{2}K_{22}+jw_1jw_2K_{12}}, \qquad (89)$$

где K_{11}, K_{22}, K_{12} – вторые центральные моменты, определяемые равенствами

$$K_{11}=\frac{\left(\mathbf{f}_1(\mathbf{B}_1-a_1\gamma_1\mathbf{I}_0)+a_1\gamma_1\mathbf{r}\mathbf{I}_0\right)\mathbf{e}}{\gamma_1\mathbf{r}\mathbf{I}_0\mathbf{e}},\ K_{22}=\frac{\left(\mathbf{f}_2(\mathbf{B}_2-a_2\gamma_2\mathbf{I}_2)+a_2\gamma_2\mathbf{r}\mathbf{I}_2\right)\mathbf{e}}{\gamma_2\mathbf{r}\mathbf{I}_2\mathbf{e}},$$

$$K_{12}=\frac{\left(\mathbf{f}_2(\mathbf{B}_1-a_1\gamma_1\mathbf{I}_1)+\mathbf{f}_1(\mathbf{B}_2-a_2\gamma_2\mathbf{I}_3)\right)\mathbf{e}}{\left(\mathbf{r}(\gamma_1\mathbf{I}_1+\gamma_2\mathbf{I}_3)\right)\mathbf{e}}.$$

где $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ задаются как

$$\mathbf{f}_1=C\mathbf{r}+\mathrm{K}_{11}\mathbf{g}_{11}+\mathrm{K}_{12}\mathbf{g}_{12}-\mathbf{z}_1,$$
$$\mathbf{f}_2=C\mathbf{r}+\mathrm{K}_{12}\mathbf{g}_{21}+\mathrm{K}_{22}\mathbf{g}_{22}-\mathbf{z}_2,$$

где C – константа, вероятности $\mathbf{r}$ определены выше, а величины $\mathbf{g}_{11}$, $\mathbf{g}_{12}$, $\mathbf{g}_{21}$, $\mathbf{g}_{22}$, $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ являются частными решениями неоднородной системы

$$\mathbf{g}_{11}\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-a_1\gamma_1\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)-a_2\gamma_2\left(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\right)\right)=\gamma_1\mathbf{r}\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right),$$
$$\mathbf{g}_{12}\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-a_1\gamma_1\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)-a_2\gamma_2\left(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\right)\right)=\gamma_2\mathbf{r}\left(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\right),$$
$$\mathbf{z}_1\mathbf{g}_{11}\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-a_1\gamma_1\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)-a_2\gamma_2\left(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\right)\right)=\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_1-a_1\gamma_1\mathbf{I}_0\right),$$
$$\mathbf{g}_{11}\mathbf{e}=0,\ \mathbf{g}_{12}\mathbf{e}=0,\ \mathbf{z}_1\mathbf{e}=0.$$
$$\mathbf{g}_{21}\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-a_1\gamma_1\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)-a_2\gamma_2\left(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\right)\right)=\gamma_1\mathbf{r}\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right),$$
$$\mathbf{g}_{22}\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-a_1\gamma_1\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)-a_2\gamma_2\left(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\right)\right)=\gamma_2\mathbf{r}\left(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\right),$$
$$\mathbf{z}_2\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-a_1\gamma_1\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)-a_2\gamma_2\left(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\right)\right)=\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_2-a_2\gamma_2\mathbf{I}_3\right),$$
$$\mathbf{g}_{21}\mathbf{e}=0,\ \mathbf{g}_{22}\mathbf{e}=0,\ \mathbf{z}_2\mathbf{e}=0.$$

Доказательство. В систему (88) подставим следующее разложение

$$\mathbf{F}^{(2)}(w_1,w_2,\varepsilon)=\Phi_2(w_1,w_2)\left\{\mathbf{r}+j\varepsilon w_1\mathbf{f}_1+j\varepsilon w_2\mathbf{f}_2\right\}+O\left(\varepsilon^2\right),$$

и, разложив экспоненту в ряд Тейлора, получим

$$(\mathbf{r}+j\varepsilon w_1\mathbf{f}_1+j\varepsilon w_2\mathbf{f}_2)\{\mathbf{A}+(1+j\varepsilon w_1)\mathbf{B}_1+(1+j\varepsilon w_2)\mathbf{B}_2-$$

$$-\gamma_1 a_1(\mathbf{I}_0-(1-j\varepsilon w_1)\mathbf{I}_1)-\gamma_2 a_2(\mathbf{I}_2-(1-j\varepsilon w_2)\mathbf{I}_3)\}+$$

$$+j\varepsilon\gamma_1\mathbf{r}\frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2)/\partial w_1}{\Phi_2(w_1,w_2)}\{\mathbf{I}_0-(1-j\varepsilon w_1)\mathbf{I}_1\}+$$

$$+j\varepsilon\gamma_2\mathbf{r}\frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2)/\partial w_2}{\Phi_2(w_1,w_2)}\{\mathbf{I}_2-(1-j\varepsilon w_2)\mathbf{I}_3\}=O(\varepsilon^2),$$

$$\left(j\varepsilon w_1+\frac{(j\varepsilon w_1)^2}{2}\right)\{(\mathbf{r}+j\varepsilon w_1\mathbf{f}_1+j\varepsilon w_2\mathbf{f}_2)(\mathbf{B}_1-(1-j\varepsilon w_1)a_1\gamma_1\mathbf{I}_0)+$$

$$+j\varepsilon\gamma_1(1-j\varepsilon w_1)\mathbf{r}\frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2)/\partial w_1}{\Phi_2(w_1,w_2)}\mathbf{I}_0\Big\}\mathbf{e}+$$

$$\left(j\varepsilon w_2+\frac{(j\varepsilon w_2)^2}{2}\right)\{(\mathbf{r}+j\varepsilon w_1\mathbf{f}_1+j\varepsilon w_2\mathbf{f}_2)(\mathbf{B}_2-(1-j\varepsilon w_2)a_2\gamma_2\mathbf{I}_2)+$$

$$+j\varepsilon\gamma_2(1-j\varepsilon w_2)\mathbf{r}\frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2)/\partial w_2}{\Phi_2(w_1,w_2)}\mathbf{I}_2\Big\}\mathbf{e}=O(\varepsilon^3).$$

Перепишем систему в виде

$$j\varepsilon(w_1\mathbf{f}_1+w_2\mathbf{f}_2)\{\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-\gamma_1 a_1(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1)-\gamma_2 a_2(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)\}+$$

$$+j\varepsilon\mathbf{r}\{w_1\mathbf{B}_1+w_2\mathbf{B}_2-\gamma_1 a_1 w_1\mathbf{I}_1-\gamma_2 a_2 w_2\mathbf{I}_3\}+$$

$$+j\varepsilon\gamma_1\mathbf{r}\frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2)/\partial w_1}{\Phi_2(w_1,w_2)}(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1)+j\varepsilon\gamma_2\mathbf{r}\frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2)/\partial w_2}{\Phi_2(w_1,w_2)}(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)=O(\varepsilon^2),$$

$$j\varepsilon w_1\Big\{j\varepsilon(w_1\mathbf{f}_1+w_2\mathbf{f}_2)(\mathbf{B}_1-a_1\gamma_1\mathbf{I}_0)+\frac{1}{2}j\varepsilon w_1\mathbf{r}(\mathbf{B}_1+a_1\gamma_1\mathbf{I}_0)+$$

$$+j\varepsilon\gamma_1\mathbf{r}\frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2)/\partial w_1}{\Phi_2(w_1,w_2)}\mathbf{I}_0\Big\}\mathbf{e}+$$

$$+j\varepsilon w_2\Big\{j\varepsilon(w_1\mathbf{f}_1+w_2\mathbf{f}_2)(\mathbf{B}_2-a_2\gamma_2\mathbf{I}_2)+$$

$$+j\varepsilon w_2\frac{1}{2}\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_2+a_2\gamma_2\mathbf{I}_2\right)+j\varepsilon\gamma_2\mathbf{r}\frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2)/\partial w_2}{\Phi_2(w_1,w_2)}\mathbf{I}_2\Bigg\}\mathbf{e}=O(\varepsilon^2). \qquad (90)$$

В системе (90) первое уравнение разделим на $j\varepsilon$, второе на $j^2\varepsilon^2$ и устремим $\varepsilon\to 0$

$$w_1\left\{\mathbf{f}_1\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-\gamma_1a_1(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1)-\gamma_2a_2(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)\right)+\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_1-\gamma_1a_1\mathbf{I}_1\right)\right\}+$$

$$+w_2\left\{\mathbf{f}_2\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-\gamma_1a_1(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1)-\gamma_2a_2(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)\right)+\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_2-\gamma_2a_2\mathbf{I}_3\right)\right\}+$$

$$+\gamma_1\mathbf{r}\frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2)/\partial w_1}{\Phi_2(w_1,w_2)}\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)+\gamma_2\mathbf{r}\frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2)/\partial w_2}{\Phi_2(w_1,w_2)}\left(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\right)=0,$$

$$w_1\left\{\left(w_1\mathbf{f}_1+w_2\mathbf{f}_2\right)\left(\mathbf{B}_1-a_1\gamma_1\mathbf{I}_0\right)+\frac{1}{2}w_1\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_1+a_1\gamma_1\mathbf{I}_0\right)+\gamma_1\mathbf{r}\frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2)/\partial w_1}{\Phi_2(w_1,w_2)}\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e}+$$

$$+w_2\left\{\left(w_1\mathbf{f}_1+w_2\mathbf{f}_2\right)\left(\mathbf{B}_2-a_2\gamma_2\mathbf{I}_2\right)+w_2\frac{1}{2}\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_2+a_2\gamma_2\mathbf{I}_2\right)+\right.$$

$$\left.+\gamma_2\mathbf{r}\frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2)/\partial w_2}{\Phi_2(w_1,w_2)}\mathbf{I}_2\mathbf{e}\right\}=0. \qquad (91)$$

Решение $\Phi_2(w_1,w_2)$ системы (91) будем искать в виде:

$$\Phi_2(w_1,w_2)=\exp\left\{\frac{(jw_1)^2}{2}\mathrm{K}_{11}+\frac{(jw_2)^2}{2}\mathrm{K}_{22}+jw_1\cdot jw_2\cdot\mathrm{K}_{12}\right\},$$

$$\frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2)/\partial w_1}{\Phi_2(w_1,w_2)}=-(w_1\mathrm{K}_{11}+w_2\mathrm{K}_{12}),\ \frac{\partial\Phi_2(w_1,w_2)/\partial w_2}{\Phi_2(w_1,w_2)}=-(w_2\mathrm{K}_{22}+w_1\mathrm{K}_{12}).$$

Тогда систему (91) можно переписать в виде

$$w_1\left\{\mathbf{f}_1\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-\gamma_1a_1(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1)-\gamma_2a_2(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)\right)+\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_1-\gamma_1a_1\mathbf{I}_1\right)\right\}+$$

$$w_2\left\{\mathbf{f}_2\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-\gamma_1a_1(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1)-\gamma_2a_2(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)\right)+\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_2-\gamma_2a_2\mathbf{I}_3\right)\right\}-$$

$$-\gamma_1\mathbf{r}(w_1\mathrm{K}_{11}+w_2\mathrm{K}_{12})\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)-\gamma_2\mathbf{r}(w_2\mathrm{K}_{22}+w_1\mathrm{K}_{12})\left(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\right)=0,$$

$$w_1\left\{(w_1\mathbf{f}_1+w_2\mathbf{f}_2)(\mathbf{B}_1-a_1\gamma_1\mathbf{I}_0)+\frac{1}{2}w_1\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_1+a_1\gamma_1\mathbf{I}_0\right)-\gamma_1\mathbf{r}(w_1\mathrm{K}_{11}+w_2\mathrm{K}_{12})\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e}+$$

$$+w_2\left\{(w_1\mathbf{f}_1+w_2\mathbf{f}_2)(\mathbf{B}_2-a_2\gamma_2\mathbf{I}_2)+\frac{1}{2}w_2\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_2+a_2\gamma_2\mathbf{I}_2\right)-\gamma_2\mathbf{r}(w_2\mathrm{K}_{22}+w_1\mathrm{K}_{12})\mathbf{I}_2\right\}\mathbf{e}=0.$$

Сгруппируем слагаемые со множителями w_1 и w_2:

$$w_1\left\{\mathbf{f}_1\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-\gamma_1a_1(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1)-\gamma_2a_2(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)\right)+\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_1-\gamma_1a_1\mathbf{I}_1\right)-\gamma_1\mathbf{r}\mathrm{K}_{11}(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1)-\right.$$

$$\left.-\gamma_2\mathbf{r}\mathrm{K}_{12}(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)\right\}+w_2\left\{\mathbf{f}_2\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-\gamma_1a_1(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1)-\gamma_2a_2(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)\right)+\right.$$

$$\left.+\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_2-\gamma_2a_2\mathbf{I}_3\right)-\gamma_2\mathbf{r}\mathrm{K}_{22}\left(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\right)-\gamma_1\mathbf{r}\mathrm{K}_{12}\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)\right\}=0,$$

$$w_1^2\left\{\mathbf{f}_1(\mathbf{B}_1-a_1\gamma_1\mathbf{I}_0)+\frac{1}{2}\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_1+a_1\gamma_1\mathbf{I}_0\right)-\gamma_1\mathbf{r}\mathrm{K}_{11}\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e}+$$

$$+w_2^2\left\{\mathbf{f}_2(\mathbf{B}_2-a_2\gamma_2\mathbf{I}_2)+\frac{1}{2}\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_2+a_2\gamma_2\mathbf{I}_2\right)-\gamma_2\mathbf{r}\mathrm{K}_{22}\mathbf{I}_2\right\}\mathbf{e}+$$

$$+w_1w_2\left\{\mathbf{f}_2(\mathbf{B}_1-a_1\gamma_1\mathbf{I}_0)+\mathbf{f}_1(\mathbf{B}_2-a_2\gamma_2\mathbf{I}_2)-\mathbf{r}\mathrm{K}_{12}(\gamma_1\mathbf{I}_0+\gamma_2\mathbf{I}_2)\right\}\mathbf{e}=0. \qquad (92)$$

Рассмотрим отдельно первое уравнение системы (92)

$$\mathbf{f}_1\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1)-a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)\right)=$$

$$=-\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_1-a_1\gamma_1\mathbf{I}_1\right)+\gamma_1\mathbf{r}\mathrm{K}_{11}\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)+\gamma_2\mathbf{r}\mathrm{K}_{12}\left(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\right),$$

$$\mathbf{f}_2\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1)-a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)\right)=$$

$$=-\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_2-a_2\gamma_2\mathbf{I}_3\right)+\gamma_2\mathbf{r}\mathrm{K}_{22}\left(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3\right)+\gamma_1\mathbf{r}\mathrm{K}_{12}\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right). \qquad (93)$$

Обозначим

$$\mathbf{Q}=\mathbf{A}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-a_1\gamma_1(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1)-a_2\gamma_2(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3).$$

Система (93) является неоднородной системой линейных алгебраических уравнений для $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$. Эта система совместна и имеет множество решений, поскольку определитель матрицы коэффициентов системы равен 0 (сумма строк матрицы равна нулю), а ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов.

Рассмотрим однородную систему уравнений (87) и неоднородную систему (93). Сравнивая эти системы, можно увидеть, что система (87) является однородной системой для неоднородной системы (93). Тогда решение системы (93) можно записать в виде

$$\mathbf{f}_1 = C\mathbf{r} + \mathrm{K}_{11}\mathbf{g}_{11} + \mathrm{K}_{12}\mathbf{g}_{12} - \mathbf{z}_1,$$
$$\mathbf{f}_2 = C\mathbf{r} + \mathrm{K}_{12}\mathbf{g}_{21} + \mathrm{K}_{22}\mathbf{g}_{22} - \mathbf{z}_2. \qquad (94)$$

Здесь C – константа, вероятности $\mathbf{r}$ определены выше, а величины $\mathbf{g}_{11}$, $\mathbf{g}_{12}$, $\mathbf{g}_{21}$, $\mathbf{g}_{22}$, $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ являются частными решениями неоднородной системы (93), удовлетворяющими условиям $\mathbf{g}_{11}\mathbf{e} = 0$, $\mathbf{g}_{12}\mathbf{e} = 0$, $\mathbf{z}_1\mathbf{e} = 0$, $\mathbf{g}_{21}\mathbf{e} = 0$, $\mathbf{g}_{22}\mathbf{e} = 0$, $\mathbf{z}_2\mathbf{e} = 0$.

Т.е. подставив разложение (94) в (93)

$$(\mathrm{K}_{11}\mathbf{g}_{11} + \mathrm{K}_{12}\mathbf{g}_{12} - \mathbf{z}_1)\mathbf{Q} = -\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_1 - a_1\gamma_1\mathbf{I}_1\right) + \gamma_1\mathbf{r}\mathrm{K}_{11}\left(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1\right) + \gamma_2\mathbf{r}\mathrm{K}_{12}\left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3\right),$$
$$\left(\mathrm{K}_{12}\mathbf{g}_{21} + \mathrm{K}_{22}\mathbf{g}_{22} - \mathbf{z}_2\right)\mathbf{Q} = -\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_2 - a_2\gamma_2\mathbf{I}_3\right) + \gamma_2\mathbf{r}\mathrm{K}_{22}\left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3\right) + \gamma_1\mathbf{r}\mathrm{K}_{12}\left(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1\right),$$

получим системы для нахождения частных решений неоднородной системы (93)

$$\mathbf{g}_{11}\mathbf{Q} = \gamma_1\mathbf{r}\left(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1\right),\ \mathbf{g}_{12}\mathbf{Q} = \gamma_2\mathbf{r}\left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3\right),\ \mathbf{z}_1\mathbf{Q} = \mathbf{r}\left(\mathbf{B}_1 - a_1\gamma_1\mathbf{I}_1\right),$$
$$\mathbf{g}_{11}\mathbf{e} = 0,\ \mathbf{g}_{12}\mathbf{e} = 0,\ \mathbf{z}_1\mathbf{e} = 0.$$
$$\mathbf{g}_{21}\mathbf{Q} = \gamma_1\mathbf{r}\left(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1\right),\ \mathbf{g}_{22}\mathbf{Q} = \gamma_2\mathbf{r}\left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3\right),\ \mathbf{z}_2\mathbf{Q} = \mathbf{r}\left(\mathbf{B}_2 - a_2\gamma_2\mathbf{I}_3\right),$$

$$\mathbf{g}_{21}\mathbf{e}=0,\ \mathbf{g}_{22}\mathbf{e}=0,\ \mathbf{z}_2\mathbf{e}=0. \qquad (95)$$

Решив систему (95), получим $\mathbf{g}_{11}$, $\mathbf{g}_{12}$, $\mathbf{g}_{21}$, $\mathbf{g}_{22}$, $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, которые подставим в выражения для $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ (94), а затем в уравнение для нахождения величин K_{11}, K_{22}, K_{12}. Положив w_1^2, w_2^2, w_1w_2 в (92) получим:

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{B}_1-a_1\gamma_1\mathbf{I}_0)\mathbf{e}+\frac{1}{2}\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_1+a_1\gamma_1\mathbf{I}_0\right)\mathbf{e}-\gamma_1\mathbf{r}\mathrm{K}_{11}\mathbf{I}_0\mathbf{e}=0$$

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{B}_2-a_2\gamma_2\mathbf{I}_2)\mathbf{e}+\frac{1}{2}\mathbf{r}\left(\mathbf{B}_2+a_2\gamma_2\mathbf{I}_2\right)\mathbf{e}-\gamma_2\mathbf{r}\mathrm{K}_{22}\mathbf{I}_2\mathbf{e}=0$$

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{B}_1-a_1\gamma_1\mathbf{I}_0)\mathbf{e}+\mathbf{f}_1(\mathbf{B}_2-a_2\gamma_2\mathbf{I}_2)\mathbf{e}-\mathbf{r}\mathrm{K}_{12}(\gamma_1\mathbf{I}_0+\gamma_2\mathbf{I}_2)\mathbf{e}=0.$$

$$\mathrm{K}_{11}=\frac{\left(\mathbf{f}_1(\mathbf{B}_1-a_1\gamma_1\mathbf{I}_0)+a_1\gamma_1\mathbf{r}\mathbf{I}_0\right)\mathbf{e}}{\gamma_1\mathbf{r}\mathbf{I}_0\mathbf{e}},\ \mathrm{K}_{22}=\frac{\left(\mathbf{f}_2(\mathbf{B}_2-a_2\gamma_2\mathbf{I}_2)+a_2\gamma_2\mathbf{r}\mathbf{I}_2\right)\mathbf{e}}{\gamma_2\mathbf{r}\mathbf{I}_2\mathbf{e}},$$

$$\mathrm{K}_{12}=\frac{\left(\mathbf{f}_2(\mathbf{B}_1-a_1\gamma_1\mathbf{I}_1)+\mathbf{f}_1(\mathbf{B}_2-a_2\gamma_2\mathbf{I}_3)\right)\mathbf{e}}{\left(\mathbf{r}(\gamma_1\mathbf{I}_1+\gamma_2\mathbf{I}_3)\right)\mathbf{e}}.$$

Теорема доказана.

Таким образом, найденная асимптотика второго порядка показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа $i_1(t)$ и $i_2(t)$ заявок на первой и второй орбитах в рассматриваемой системе является двумерным нормальным с асимптотическим средним: a_1/σ, a_2/σ, дисперсией: K_{11}/σ, K_{22}/σ, и коэффициентом ковариации K_{12}/σ. Задав двумерную нормальную плотность распределения вероятностей с данными параметрами, получим распределение вероятностей числа заявок на первой и второй орбитах в асимптотическом условии большой задержки заявок на орбитах.

5.5 Численные примеры

Положим $\lambda = 2$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 2.5$, $\sigma_1 = 0.9$, $\sigma_2 = 0.1$, $\sigma = 0.1$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_1 = 9$ и покажем асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбитах на рисунке 23.

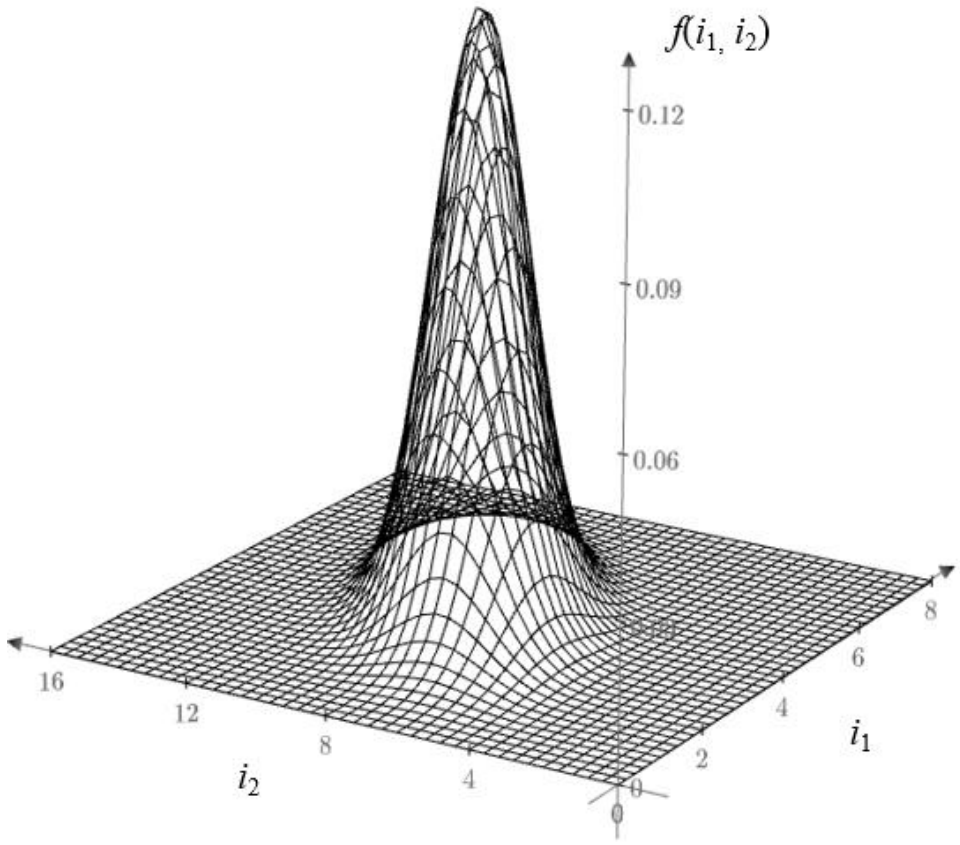


Рисунок 23 – Двумерное распределение вероятностей числа заявок на орбите

Для этого случая асимптотические средние числа заявок на орбитах равны 4 и 8.632, а дисперсии 1.067, 2.275 соответственно и коэффициентом корреляции 0.486.

В исследовании [87] была получена характеристическая функция допредельного распределения вероятностей числа заявок для первой орбиты, определенной как

$$H(u)=\left(1+\rho-\rho e^{ju}\right)\left(\frac{1-\rho}{1-\rho e^{ju}}\right)^{\frac{\lambda}{\sigma_1}+1},\quad \rho=\frac{\lambda}{\mu_1}\ .$$

Применим к ней обратное преобразование Фурье и запишем допредельную плотность распределения вероятностей числа вызовов на первой орбите в виде:

$$P(i)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-jui}H(u)du$$

Асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на первой орбите получим из двумерной асимптотической характеристической функции (89).

Точность $Pa(i)$ определим с помощью расстояния Колмогорова, описываемого формулой

$$d=\max_{0\le i\le\infty}\left|\sum_{\nu=0}^{i}\left(Pdif(i)-P(i)\right)\right|,\ i=0,1,\ldots.$$

В качестве «удовлетворительного» значения расстояния Колмогорова мы выбрали значение 0.05

Был проведен ряд численных экспериментов при различных σ и $\lambda = 0.5$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $\gamma_1 = 0.2$, $\gamma_2 = 0.5$. Результаты приведены в таблице 4.

Таблица 4 – Расстояние Колмогорова между асимптотическим и допредельным распределениями вероятностей

σ = 1.00	σ = 0.70	σ = 0.50	σ = 0.43	σ = 0.30	σ = 0.10
0.099	0.071	0.054	0.050	0.036	0.017

На рисунках 24 – 26 допредельное распределение показано сплошной линией (P), асимптотическое – пунктирной (Pa).

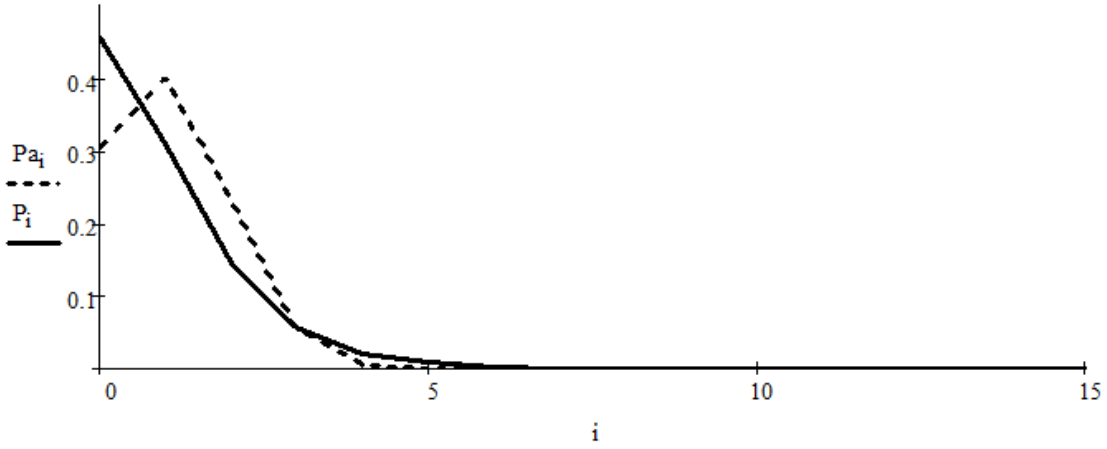


Рисунок 24 – Распределения вероятностей числа заявок на первой орбите при σ = 1

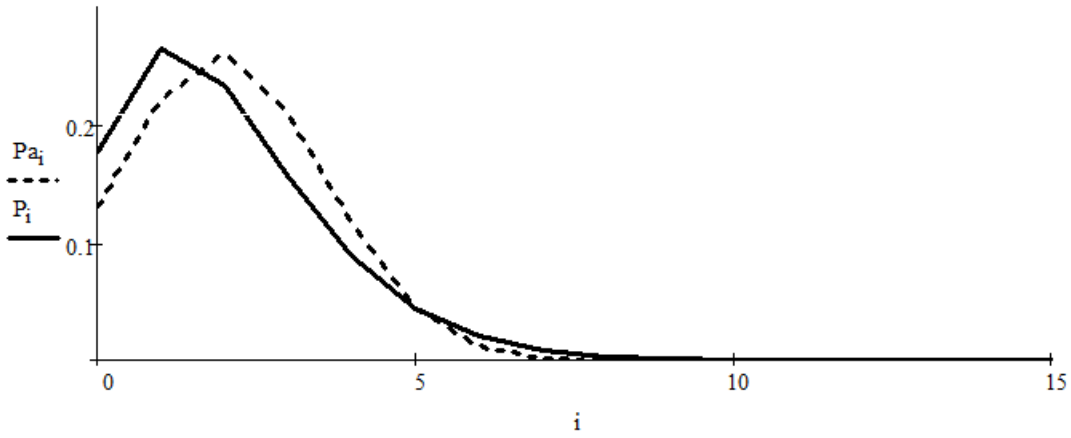


Рисунок 25 – Распределения вероятностей числа заявок на первой орбите при σ = 0.43

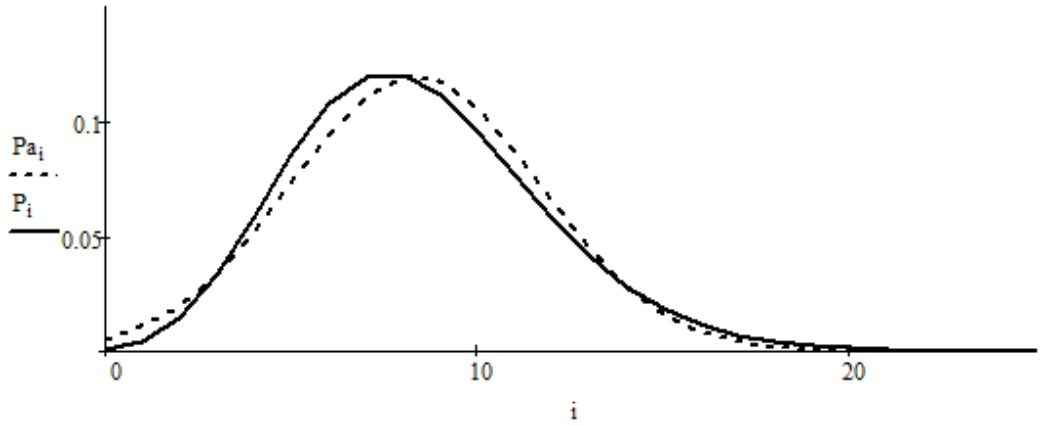


Рисунок 26 – Распределения вероятностей числа заявок на первой орбите при σ = 0.10

Как видно, с уменьшением интенсивности повторных вызовов точность аппроксимации растет, что соответствует асимптотическому условию. При заданных параметрах полученная аппроксимация применима для значений $\sigma < 0.43$, когда расстояние Колмогорова не превышает 0.05.

Результаты исследования были представлены на XXI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Карши, Узбекистан, 25 – 29 октября 2022 г.) и опубликованы [88].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе магистра были построены и рассмотрены математические модели систем массового обслуживания с повторными вызовами и двумя последовательно обслуживающими приборами. Используя метод асимптотически диффузионного анализа при условии большой задержки на орбите, получены параметры диффузионного процесса. Распределение вероятности этого процесса позволило построить аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на общей орбите в рассматриваемых системах.

Также были спроектированы и реализованы дополнительные модули имитационной модели (ММРР входящего потока и произвольного обслуживания) для нахождения эмпирического распределения вероятностей числа заявок на орбите.

Исследование области применимости асимптотических результатов для систем с общей орбитой на основе результатов, полученных методом имитационного моделирования, показало увеличение точности аппроксимации с уменьшением интенсивности повторных вызовов, что соответствует асимптотическому условию. Также имитационная модель продемонстрировала более высокую точность метода асимптотически диффузионного анализа по сравнению с методом асимптотического анализа на примере математической модели с экспоненциальным обслуживанием, общей орбитой и простейшим входящим потоком.

С помощью метода асимптотического анализа при условии большой задержки на орбите, получена двумерная гауссовская характеристическая функция для системы с двумя орбитами. На основе асимптотического распределения построена аппроксимация числа заявок на орбитах в исследуемой системе. Ее точность для первой орбиты была определена с помощью допредельного распределения, найденного в более раннем исследовании.

Полученные распределения вероятностей числа заявок на орбитах позволяют решить проблему определения размерности хранилищ в реальных системах, ставших прообразами исследуемых тандемных моделей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочаров П. П. Теория массового обслуживания: учебник / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.

2. Erlang A. K. The theory of probabilities and telephone conversations / A. K. Erlang // Nyt Tidsskrift for Matematik. Seria B. – 1909. – Vol. 20. – P. 33–39.

3. Ивченко Г. И. Теория массового обслуживания: учебное пособие для вузов / Г. И. Ивченко, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко. – Москва: Высшая школа, 1982. – 256 с.

4. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. –5-е изд. испр. – М: Наука. – 2010. – 400 с.

5. Borst S. Dimensioning large call centers / S. Borst, A. Mandelbaum, M. I. Reiman // Operations Research. – 2004. – Vol. 52. – P. 17–34.

6. Brown L. Statistical analysis of a telephone call center: a queueing-science perspective / L. Brown [et al.] // Journal of the American Statistical Associ-ation. – 2005. – Vol. 100. – P. 36–50.

7. Lee W. C. Y. Mobile cellular telecommunications: analog and digital systems / W. C. Y. Lee; 2nd ed. – N.Y.: McGraw-Hill, 1995. – 664 p.

8. Гайдамака Ю. В. Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи / Ю. В. Гайдамака, Э. Р. Зарипова, К. Е. Самуйлов. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – 72 с.

9. Гарайшина И. Р. Исследование математических моделей процессов государственного пенсионного страхования: дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Гарайшина Ирина Рашитовна. – Томск, 2005. – 148 с.

10. Морозова А. С. Математическая модель процесса изменения числа клиентов торговой компании в виде СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов / А. С. Морозова, С. П. Моисеева, К. М. Одинцов // Научное творчество молодежи: материалы XI Всерос. научно-практ. конф. (Анжеро-Судженск, 20–21 апр. 2007). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – Ч. 1. – С. 37–39.

11. Moiseev A. Modeling of insurance company as infinite-servers queueing system / A. Moiseev, S. Moiseeva, I. Sinyakova // Proc. of the Int. Conf. on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education, ICAICTSEE-2012 (Sofia, October 5–6, 2012). – Sofia: University of National and World Economy, 2012. – P. 78–83.

12. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями / Л. Клейнрок. – М.: Мир. 1979. – 600 с.

13. Варданян А. О. Расчет характеристик вычислительных систем с разделением процессоров // StudNet. – 2020. – Т. 3, №. 10.

14. Костров Б. В. Исследование структурной организации и оценка производительности многопроцессорных вычислительных систем с общей шиной / Б. В. Костров, А. И. Мартышкин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – №. 2.

15. Вишневский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.

16. Карганов В. В. Классы и показатели эффективности работы современных телекоммуникационных систем и сетей, способы их тарификации // Высокие технологии и инновации в науке. – 2019. – С. 124–133. – URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_41353491_38075234.pdf (дата обращения: 30.03.2023). – Режим доступа: для зарегистр. пользователей.

17. Соколов Н. А. Выбор модели для решения задач по планированию телекоммуникационных сетей // Труды ЦНИИС. Санкт-Петербургский филиал. – 2020. – Т. 1, № 9. – С. 24–30. – URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_43167372_29238107.pdf (дата обращения: 30.03.2023). – Режим доступа: для зарегистр. пользователей.

18. Самуйлов К. Е. Методы анализа и расчета сетей ОКС–7 / К. Е. Самуйлов. – М.: Изд-во РУДН, 2002. – 292 с.

19. Balsamo S. A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction / S. Balsamo, V. De Nitto

Personè, P. Inverardi // Performance Evaluation. – 2003. – Vol. 51, is. 2. – P. 269–288.

20. Маталыцкий М. А. НМ-сети как новые стохастические модели прогнозирования доходов различных объектов / М. А. Маталыцкий, С. Э. Статкевич // Вестник ГрГУ. Серия 5: Экономика. – 2009. –№ 1. – С. 107–115.

21. Гасников А. В. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / А. В. Гасников, С. Л. Кленов, Е. А. Нурминский [и др.]; под ред. А. В. Гасникова. – М.: МФТИ, 2010. – 362 с.

22. Задорожный В. Н. Транспортная сеть массового обслуживания: теория и эксперименты / В. Н. Задорожный // Динамика систем, механизмов и машин. – 2014, № 3. – С. 162–165.

23. Мотов А. И. О практической применимости моделей массового обслуживания в современных условиях на примере задачи управления ресурсами в СеМО с гибкой структурой // Интеграция наук. – 2019. – С. 133–134.

24. Artalejo, J. R. Accessible bibliography on retrial queues / J. R. Artalejo // Mathematical and Computer Modelling. – 1999. – Vol. 30. – P. 223–233.

25. Avrachenkov K. Retrial networks with finite buffers and their application to internet data traffic / K. Avrachenkov, U. Yechiali // Probability in the Engineering and Informational Sciences. – 2008. – Vol. 22, is. 4. – P. 519–536.

26. Avrachenkov K. Retrial networks with finite buffers and their application to internet data traffic / K. Avrachenkov, U. Yechiali // Probability in the Engineering and Informational Sciences. – 2008. – Vol. 22, is. 4. – P. 519–536.

27. Cohen, J.W. Basic problems of telephone traffic and the influence of repeated calls / J.W. Cohen // Philips Telecommunication Review. – 1957. – Vol. 18, is. 2. – P. 49– 100.

28. Wilkinson, R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA / R.I. Wilkinson // The Bell System Technical Journal. – 1956. – Vol. 35, is. 2. – P. 421–507.

29. Sivakumar B. A perishable inventory system with retrial demands and a

finite population // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2009. – Vol. 224, is. 1. – P. 29–38.

30. Wüchner P. The impact of retrials on the performance of self-organizing systems / P. Wüchner, J. Sztrik, H. de Meer // PIK-Praxis der Informationsverarbeitung und Kommunikation. – 2008. – Vol. 31, is. 1. – P. 29–33.

31. Cohen J. W. Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls // Philips Telecommunication Review. – 1957. – Vol. 18, is. 2. – P. 49–100.

32. Artalejo, J. R. Retrial queueing systems: a computational approach / J. R. Artalejo, A. Gómez-Corral. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 318 p.

33. Falin, G. I. Retrial Queues / G. I. Falin, J. G. C. Tempeton. – London: Chapman and Hall, 1997. – 328 p.

34. Hunt G. C. Sequential arrays of waiting lines // Operations Research. – 1956. – Vol. 4, is. 6. – P. 674-683.

35. Neuts M. F. Two queues in series with a finite, intermediate waiting room // Journal of Applied Probability. – 1968. – Vol. 5, is. 1. – P. 123-142.

36. Prabhu N. U. Transient behaviour of a tandem queue // Management Science. – 1967. – Vol. 13, is. 9. – P. 631-639.

37. Suzuki T. On a tandem queue with blocking // J. Operat. Res. Soc. Japan. – 1964. – Vol. 6. – P. 137-157.

38. Ahn H. S., Duenyas I., Zhang R. Q. Optimal stochastic scheduling of a two-stage tandem queue with parallel servers // Advances in Applied Probability. – 1999. – Vol. 31, is. 4. – P. 1095-1117.

39. Brandwajn A., Jow Y. L. L. An approximation method for tandem queues with blocking // Operations research. – 1988. – Vol. 36, is. 1. – P. 73-83.

40. Iravani S. M. R., Posner M. J. M., Buzacott J. A. A two-stage tandem queue attended by a moving server with holding and switching costs // Queueing systems. – 1997. – Vol. 26, is. 3. – P. 203-228.

41. Le L., Hossain E. Tandem queue models with applications to QoS

routing in multihop wireless networks // IEEE Transactions on Mobile Computing. – 2008. – V. 7, is. 8. – P. 1025-1040.

42. Van Leeuwaarden J. S. H., Resing J. A. C. A tandem queue with coupled processors: computational issues // Queueing Systems. – 2005. – Vol. 51, is. 1. – P. 29-52.

43. Дудин С. А. Модель функционирования центра информационной и технической поддержки как двухфазная система массового обслуживания / С. А. Дудин, О. С. Дудина // Проблемы передачи информации. – 2013. – Т. 49, № 1. – С. 66–82.

44. Kim C. Tandem queueing system with impatient customers as a model of call center with Interactive Voice Response / C. Kim, A. Dudin, S. Dudin, O. Dudina // Performance Evaluation. – 2013. – Vol. 70, is 6. – P. 440–453.

45. Кузнецов Н. А. Оптимальное управление передачей данных в мобильной двухагентной робототехнической системе / Н. А. Кузнецов, Д. В. Мясников, К. Х. Семенихин // Информационные процессы. – 2016. – Т. 16, №. 2. – С. 137–151.

46. Вишневский В. М. Оценка производительности высокоскоростной беспроводной тандемной сети с использованием каналов сантиметрового и миллиметрового диапазона радиоволн в системах управления безопасностью дорожного движения / В. М. Вишневский, А. А. Ларионов, О. В. Семёнова // Проблемы управления. – 2013. – №. 4. – С. 50–56.

47. Ryoki N. Performance analysis of queue length distribution of tandem routers for QoS measurement / N. Ryoki, K. Kawahara, T. Ikenaga, Y. Oie // IEICE transactions on communications. – 2003. – Vol. 86, is. 2. – P. 614–621.

48. Kamoun F. Queueing analysis of ATM tandem queues with correlated arrivals / F. Kamoun, M. M. Ali // Proceedings of INFOCOM'95. – IEEE, 1995. – Vol. 2. – P. 709–716.

49. Kuznetsov N. A. Two-phase queueing system optimization in applications to data transmission control / N. A. Kuznetsov, D. V. Myasnikov, K. V. Semenikhin // Procedia engineering. – 2017. – Vol. 201. – P. 567–577.

50. Avrachenkov K. Retrial networks with finite buffers and their application to internet data traffic / K. Avrachenkov, U. Yechiali // Probability in the Engineering and Informational Sciences. – 2008. – Vol. 22, is. 4. – P. 519–536.

51. Meester L. E. Concavity of the throughput of tandem queueing systems with finite buffer storage space / L. E. Meester, J. G. Shanthikumar // Advances in Applied Probability. – 1990. – Vol. 22, is. 3. – P. 764–767.

52. Moutzoukis E. Two queues in tandem with retrial customers / E. Moutzoukis, C. Langaris // Probability in the Engineering and Informational Sciences. – 2001. – Vol. 15, is. 3. – P. 311–325.

53. Avrachenkov K. On tandem blocking queues with a common retrial queue / K. Avrachenkov, U. Yechiali // Computers & Operations Research. – 2010. – Vol. 37, is. 7. – P. 1174–1180.

54. Gómez-Corral A. A matrix-geometric approximation for tandem queues with blocking and repeated attempts // Operations Research Letters. – 2002. – Vol. 30, is. 6. – P. 360–374.

55. Moutzoukis E., Langaris C. Two queues in tandem with retrial customers // Probability in the Engineering and Informational Sciences. – 2001. – Vol. 15, is. 3. – P. 311–325.

56. Kim C. S., Klimenok V., Taramin O. A tandem retrial queueing system with two Markovian flows and reservation of channels // Computers & operations research. – 2010. – Vol. 37, is. 7. – P. 1238–1246.

57. Klimenok V., Savko R. A retrial tandem queue with two types of customers and reservation of channels // Belarusian Workshop on Queueing Theory. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. – P. 105–114.

58. Dudin A., Nazarov A. On a tandem queue with retrials and losses and state dependent arrival, service and retrial rates // International Journal of Operational Research. – 2017. – Vol. 29, is. 2. – P. 170–182.

59. Falin G. I. On a tandem queue with retrials and losses // Operational Research. – 2013. – Vol. 13, is. 3. – P. 415–427.

60. Kim, C. S., Park, S. H., Dudin, A., Klimenok, V., Tsarenkov, G.

Investigation of the BMAP/G/1→·/PH/1/M tandem queue with retrials and losses // Applied Mathematical Modelling. – 2010. – Vol. 34, is. 10. – P. 2926–2940.

61. Phung-Duc T. An explicit solution for a tandem queue with retrials and losses // Operational Research. – 2012. – Vol. 12, is. 2. – P. 189–207.

62. Степанов, С.Н. Численные методы расчета систем с повторными вызовами / Степанов С.Н. – М.: Наука, 1983. – 230 с.

63. Artalejo, J. R. Computational analysis of the maximal queue length in the MAP/M/c retrial queue / Artalejo J. R., Chakravarthy S. R. // Applied Mathematics and Computation. – 2006. – Vol. 183. – P. 1399–1409.

64. Назаров А.А. Асимптотический анализ марковизируемых систем: монография. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 153 с.

65. Назаров А. А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. – Томск : Изд-во НТЛ. 2006. – 117 с.

66. Любина Т. В. Исследование немарковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок / Т. В. Любина, А. А. Назаров // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2012. – №. 1. – С. 38–44.

67. Ripley B.D. Simulation methodology – an introduction for queueing theorists // Queueing Systems. – 1988. – Vol. 3. – P. 201–220.

68. Лоу А. Имитационное моделирование / А. Лоу, В. Кельтон. – 3-е изд. – СПб. : Питер, 2004. – 848 с.

69. Phung-Duc T. M/M/c/c+ r retrial queues with Bernoulli abandonment / T. Phung-Duc, H. Masuyama, S. Kasahara et al. // Journal of Industrial and Management Optimization. – 2010. – Vol. 6, is. 3. – P. 517–540.

70. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления / Д. Кокс, В. Смит. – М.: Сов. радио, 1967 – 298 с.

71. Marczewski E. Remarks on the Poisson stochastic process / E. Marczewski // Studia Math. Warszawa. – 1953. – Vol. 13, is. 1. – P. 130–136.

72. Lucantoni D. New results for the single server queue with a batch Markovian arrival process / D. Lucantoni // Stochastic Models. – 1991. – Vol. 7. –

P. 1–46.

73. Neuts M. F. A versatile Markovian point process / M. F. Neuts // J. Appl. Probab. – 1979. – Vol. 16, is. 4. – P. 764–779.

74. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of Cambridge Phylosophical Society – 1964. – Vol. 60, is. 4. – P. 923–930.

75. Гецов П. Высокоточные беспилотные летательные аппараты — сегодня и завтра / П. Гецов, С. Начев, Б. Ванг, Д. Биров // Исследование Земли из космоса. – 2019. – №1. – С. 84–91.

76. Floyd S., Jacobson V. Random early detection gateways for congestion avoidance / S. Floyd, V. Jacobson // IEEE/ACM Transactions on networking. – 1993. – Vol. 1, is. 4. – P. 397–413.

77. Nazarov A. Scaling Limits of a Tandem Retrial Queue with Common Orbit and Poisson Arrival Process / A. Nazarov, S. Paul, T. Phung-Duc, M. Morozova // Lecture Notes in Computer Science. – 2021. – P. 240–250.

78. Kolmogorov A. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione / A. Kolmogorov // Giornale dell' Intituto Italiano degli Attuari. – 1933. – Vol. 4. – P. 83–91.

79. Морозова М. А. Имитационная модель тандемной системы массового обслуживания с повторными вызовами. / М. А. Морозова, А. Л. Благинин. // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : сб. материалов междунар. конф., Томск, 26–30 мая 2021 г. – Томск. – 2021. – С. 130–135.

80. Nazarov A. Analysis of Tandem Retrial Queue with Common Orbit and Poisson Arrival Process / A. Nazarov, S. Paul, T. Phung-Duc, M. Morozova // Lecture Notes in Computer Science. 2021. Vol. 13104. P. 441–456.

81. Robinson S. Simulation: the practice of model development and use / S. Robinson. – Hoboken : Wiley, 2004. – 336 p.

82. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений / Г. Буч, Р. А. Максимчук, М. У. Энгл [и др.]; пер. Д. Клюшин. – 3-е изд. – М. : Вильямс, 2010. –720 с.

83. Рамбо Дж. UML 2.0. Объектно-ориентированное моделирование и разработка / Дж. Рамбо, М. Блаха. – СПб. : Питер, 2007. – 544 с.

84. Морозова, М. А. Численный анализ тандемной системы массового обслуживания с повторными вызовами и общей орбитой / М. А. Морозова, А. Л. Благинин // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : Материалы IX Международной молодежной научной конференции, Томск, 26–28 мая 2022 г. / Под общей редакцией И.С. Шмырина . – Томск: Национальный исследовательский Томский государственный университет, 2022. – С. 169–174. – DOI 10.17223/978-5-907572-27-0-2022-26.

85. Nazarov A. Analysis of Tandem Retrial Queue with Common Orbit and MMPP Incoming Flow. / A. Nazarov, S. Paul, T. Phung-Duc, M. Morozova // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications: 25th International Conference, DCCN 2022, Moscow, Russia, September 26–29, 2022, Revised Selected Papers. – 2022. – P. 270–283.

86. Paul S. Mathematical Model of the Tandem Retrial Queue M | GI | 1 | M | 1 with a Common Orbit / S. Paul, A. Nazarov, T. Phung-Duc, M. Morozova // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications: 20th International Conference, ITMM 2021, Named after AF Terpugov, Tomsk, Russia, December 1–5, 2021, Revised Selected Papers. – Cham : Springer International Publishing, 2022. – P. 131–143.

87. Nazarov A. Heavy outgoing call asymptotics for retrial queue with two-way communication and multiple types of outgoing calls / A. Nazarov, S. Paul, O. Lizyura // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. – 2019. – Vol. 27, № 1. – P. 5–20.

88. Nazarov A. Scaling Limits of a Tandem Queue with Two Infinite Orbits / A. Nazarov, S. Paul, T. Phung-Duc, M. Morozova // Mathematics. – 2023. – Vol. 11.

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

С результатами ознакомлена

С.В. Паулс

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: Морозова Мария Алексеевна
Проверяющий: Моисеева Светлана Владимировна
Организация: Томский Государственный Университет

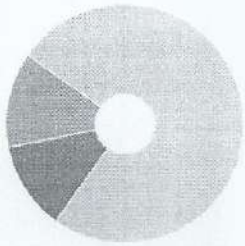
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://tsu.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 349
Начало загрузки: 02.06.2023 10:22:10
Длительность загрузки: 00:00:54
Имя исходного файла: Morozova_Maria_932128_Dissertatsia.pdf
Название документа: Morozova_Maria_932128_Dissertatsia
Размер текста: 132 кБ
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Символов в тексте: 134717
Слов в тексте: 19972
Число предложений: 990

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 02.06.2023 10:23:05
Длительность проверки: 00:00:23
Комментарии: не указано
Поиск с учетом редактирования: да
Проверенные разделы: основная часть с. 2-5,8-124
Модули поиска: ИПС Адилет, Библиография, Сводная коллекция ЭБС, Сводная коллекция РГБ, eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ: аналитика, Диссертации НББ, Коллекция НБУ, Перефразирования по eLIBRARY.RU, Перефразирования по Интернету, Перефразирования по Интернету (EN), Перефразирования по коллекции издательства Wiley , Шаблонные фразы, Модуль поиска "tsu", Кольцо вузов



СОВПАДЕНИЯ	САМОЦИТИРОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
11,99%	12,94%	0%	75,07%

ПОДОЗРИТЕЛЬНЫЙ ДОКУМЕНТ

Есть подозрения на следующие группы маскировки заимствований: СВЯЗНОСТЬ ТЕКСТА

Совпадения — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.

Самоцитирования — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» – это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.

Цитирования — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы; библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.

Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.

Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.

Оригинальный текст — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует полному тексту проверяемого документа.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в тексте	Источник	Актуален на	Модуль поиска	Комментарии
[01]	12,54%	Численный анализ тандемной системы массового обслуживания с повторными вызовами и общей орбитой. https://elibrary.ru	31 Дек 2022	eLIBRARY.RU	
[02]	8,16%	Имитационная модель тандемной системы массового обслуживания с повторными вызовами. https://elibrary.ru	31 Дек 2021	eLIBRARY.RU	
[03]	4,73%	ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ M|M|1|1 С ВЫЗЫВАЕМЫМИ ЗАЯВКАМИ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКИ-ДИФФУЗИОННОГО АНАЛИЗА. http://elibrary.ru	30 Янв 2019	Перефразирования по eLIBRARY.RU	
[04]	4,49%	Исследование RQ-системы M|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором методом асимптотически-диффузионного анализа. https://elibrary.ru	31 Дек 2021	eLIBRARY.RU	
[05]	2,66%	ИССЛЕДОВАНИЕ СМО ВИДА MMPP|M|N С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКИ ДИФФУЗИОННОГО АНАЛИЗА. https://elibrary.ru	15 Июл 2022	eLIBRARY.RU	
[06]	2,22%	Измайлова, Яна Евгеньевна Исследование математических моделей RQ-систем с вытеснением	раньше 2011	Сводная коллекция РГБ	