

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК

Руководитель ООП

д-р техн. наук, профессор

 А.В. Замятин

« 23 » мая 2022 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕСУРСНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ,
ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

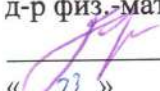
по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные
технологии

направленность (профиль) «Фундаментальная информатика и информационные
технологии»

Кришталеv Никита Алексеевич

Руководитель ВКР

д-р физ.-мат. наук, доцент

 А. Н. Моисеев

« 23 » мая 2022 г.

Автор работы

студент группы № 931801

 Н. А. Кришталеv

« 23 » мая 2022 г.

Томск – 2022

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ООП

д-р техн. наук, профессор

А.В. Замятин

« 25 » октября 2021 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы бакалавра обучающегося

Кришталеvu Никите Алексеевичу

Фамилия Имя Отчество обучающегося

по направлению подготовки 09.04.03 Прикладная информатика, направленность (профиль)
«Прикладная информатика»

1 Тема выпускной квалификационной работы

Исследование ресурсных систем массового обслуживания, функционирующих
в случайной среде

2 Срок сдачи обучающимся выполненной выпускной квалификационной работы:

а) в учебный офис / деканат – 23.05.2022 б) в ГЭК – 08.06.2022

3 Исходные данные к работе:

Объект исследования – ресурсная система массового обслуживания,
функционирующая в случайной среде

Предмет исследования – стационарное распределение суммарного
объема занятого ресурса

Цель исследования – построение математической модели и нахождение
стационарного распределение суммарного объема занятого
ресурса

Задачи:

Построить математические модели

Исследовать математические модели

Спроектировать и реализовать имитационную модель.

Оценить применимость полученных асимптотических решений на основе
результатов имитационного моделирования.

Методы исследования:

Методы теории вероятностей и случайных процессов, метод асимптотического анализа,
метод имитационного моделирования, метод динамического просеивания

Организация или отрасль, по тематике которой выполняется работа, –

Национальный исследовательский Томский государственный университет, кафедра
теории вероятностей и математической статистики.

4 Краткое содержание работы

(09.02.2022-17.02.2022) Построение математических моделей

(18.02.2022-19.03.2022) Исследование математических моделей методом
асимптотического анализа

(18.02.2022-16.04.2022) Проектирование и реализация имитационной модели.

(11.05.2022-27.05.2022) Оценка применимости полученных асимптотических
решений на основе результатов имитационного моделирования.

Руководитель выпускной квалификационной работы

Доцент, кафедра ТВиМС

должность, место работы

Задание принял к исполнению

Студент, группа 931801

дата, подпись студента


подпись

/ А.Н. Моисеев

И.О. Фамилия


подпись

/ Н.А. Кришталеv

И.О. Фамилия

АННОТАЦИЯ

Тема выпускной квалификационной работы «Исследование ресурсных систем массового обслуживания, функционирующих в случайной среде».

Ключевые слова: система массового обслуживания, ресурсная система, случайная среда, метод асимптотического анализа, метод имитационного моделирования, метод динамического просеивания

Объект исследования – ресурсные системы массового обслуживания, функционирующие в случайной среде.

Цель работы – построение математических моделей ресурсных систем массового обслуживания, функционирующих в случайной среде и нахождение стационарного распределения суммарного объема занимаемого ресурса.

Методы исследования – методы теории вероятностей и случайных процессов, метод асимптотического анализа, метод динамического просеивания, метод имитационного моделирования.

Работа содержит 5 глав, 53 страницы, 14 рисунков, 3 таблицы, 15 источников.

Результат работы – получены аппроксимации характеристической функции распределения суммарного объема занимаемого ресурса в условии растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояния среды для двух ресурсных систем массового обслуживания, функционирующих в случайной среде: $M/M/\infty$, $M/GI/\infty$; спроектированы и реализованы имитационные модели для описанных систем в виде десктопного приложения; проанализирована область применимости асимптотических результатов.

Оглавление

Введение	7
1 Математическая модель и аналитическое исследование системы $M/M/\infty$, функционирующей в случайной среде	10
1.1 Реальный пример объекта исследований.....	10
1.2 Математическая модель.....	13
1.3 Асимптотическое исследование суммарного объема занимаемого ресурса.....	14
2 Математическая модель и аналитическое исследование системы $M/GI/\infty$, функционирующей в случайной среде	16
2.1 Математическая модель.....	16
2.2 Метод динамического просеивания.....	17
2.2.1 Описание метода.....	18
2.2.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова	19
2.2.3 Характеристические функции.....	21
2.3 Метод асимптотического анализа	22
2.3.1 Описание метода.....	22
2.3.2 Асимптотика первого порядка	23
2.3.3 Асимптотика второго порядка	24
2.3.4 Основной результат	28
3 Алгоритмы численных расчетов вероятностных характеристик функционирования систем	30
3.1 Получение распределения для модели с перераспределением ресурса.	30
3.2 Нахождение параметров гауссовской аппроксимации для модели без перераспределения ресурса	33
4 Разработка приложения для имитационного моделирования систем массового обслуживания, функционирующих в случайной среде	36
4.1 Объектная модель разрабатываемого приложения	36
4.2 Руководство пользователя	38
5 Численный анализ результатов	44
5.1 Точность имитационной модели.....	44
5.2 Определение области применимости асимптотических результатов	45
5.2.1 Система с перераспределением ресурса	45
5.2.2 Система без перераспределения ресурса.....	47
5.3 Вычисление вероятности переполнения ресурса	48

Заключение	50
Литература.....	52

Введение

Системы массового обслуживания, функционирующие в случайной среде, как и ресурсные системы широко применяются для моделирования реальных систем. Например, рассмотрим кластер обработки данных, где некоторые приборы с общей оперативной памятью обрабатывают заявки. С течением времени может меняться тип заявок, а вместе с ним и интенсивность поступления заявок, время их обработки, и занимаемый ими объем ресурса. При проектировании подобной системы важно знать оптимальное количество приборов и оптимальный объем ресурса для обеспечения нормального функционирования. Подобную систему можно описать в виде ресурсной бесконечнолинейной системы массового обслуживания. А решить проблему учета изменения типа заявок можно, описав этот фактор в виде марковского процесса, называемого случайной средой, от состояния которого будут зависеть параметры системы.

Существует множество работ, посвященных системам массового обслуживания в случайной среде. Например, в [9] рассматривается система массового обслуживания $M/M/1$ с авариями в случайной среде. Модель содержит состояние ремонта и состояние проверки. Рассматривается среднее число заявок в очереди в стационарном случае. В [3] изучалась RQ-система $M/M/1$ с ненадежным прибором, в которой параметры входящего потока, времени обслуживания, отказа, восстановления и повторного обращения зависят от состояния случайной среды. Кроме того, рассматривается стационарный случай и находится условие существования стационарного режима. При этом решается задача оптимизации начальных параметров относительно затрат и прибыли.

Имеется несколько подобных работ, в которых рассматриваются системы массового обслуживания, работающие в случайной среде [4, 5, 7]. Ресурсные системы массового обслуживания [6, 8, 10, 11] позволяют моделировать

системы, в которых каждая поступающая заявка занимает определенное количество ресурсов в дополнение к занятию сервера. Количество ресурсов может быть детерминированным или случайным, дискретным или непрерывным. Пока заявка обслуживается, она занимает и сервер, и ресурсы, в конце обслуживания она покидает систему и освобождает занятый сервер и ресурсы.

К сожалению, мы не нашли ни одной публикации, сочетающей и ресурсы, и функционирование в случайной среде. В данной работе рассматриваются две системы массового обслуживания с неограниченным количеством приборов, функционирование которых зависит от состояния случайной среды. Каждая поступающая заявка занимает один прибор и произвольный объем ресурса. При смене состояния среды меняются: параметр распределения времени обслуживания, интенсивность входящего потока, функция распределения объема занимаемого ресурса. В первой системе рассматривается экспоненциальная функция распределения времени обслуживания и при смене состояния для всех заявок ресурс перезанимается заново. Будем называть такую систему моделью с перераспределением ресурса. Во второй системе рассматривается произвольная функция распределения времени обслуживания, а также при смене состояния среды перераспределение ресурса не происходит. Такую систему будем называть моделью без перераспределения ресурса. Исследования проводятся на основе асимптотических результатов при условии растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояния случайной среды.

Таким образом, целью работы является нахождение стационарных распределений суммарного объема занимаемого ресурса в моделях с перераспределением и без перераспределения ресурса. Для достижения цели требуется решить следующие задачи:

1. Найти асимптотические распределения суммарного объема занимаемого ресурса.

2. Спроектировать и реализовать приложение имитационного моделирования ресурсной системы массового обслуживания, функционирование которой зависит от состояния случайной среды с возможностью выбора опции перераспределения ресурса.
3. Провести численные эксперименты, определить погрешность аппроксимаций, найти их область применимости.

1 Математическая модель и аналитическое исследование системы

M/M/∞, функционирующей в случайной среде

1.1 Реальный пример объекта исследований

В наше время все больше и больше устройств подключено к интернету, в том числе и на производствах. Больше пользователей участвуют в производственных процессах. Системы становятся сложнее, динамичнее, что требует больших ресурсов. Благодаря мощным вычислительным характеристикам, высокой масштабируемости облако (рисунок 1) обеспечивает эффективный способ обработки и хранения больших объемов данных. Услуги, предоставляемые облаком, шире, а также быстрее, проще и дешевле в использовании. Тем не менее, есть еще много проблем, которые ограничивают развитие систем, использующих облачные сервисы. Рассмотрим основную проблему облачных вычислений – переполнение ресурсов. Основным ресурсом на серверах облачных вычислений является оперативная память. Сервер обеспечивает доступ потребителя к общему фонду ресурсов, экономя большие аппаратные мощности, чем при выделении для каждого пользователя отдельных ресурсов. Однако, возникает проблема с определением необходимого объема фонда ресурсов при различных конфигурациях подобной системы. Кроме того, в разные моменты времени нагрузка на сервис может быть разная, и для оптимизации расхода ресурсов может встать вопрос использования нескольких режимов работы, что позволит еще более эффективно распределять аппаратные мощности в зависимости от текущего состояния системы.

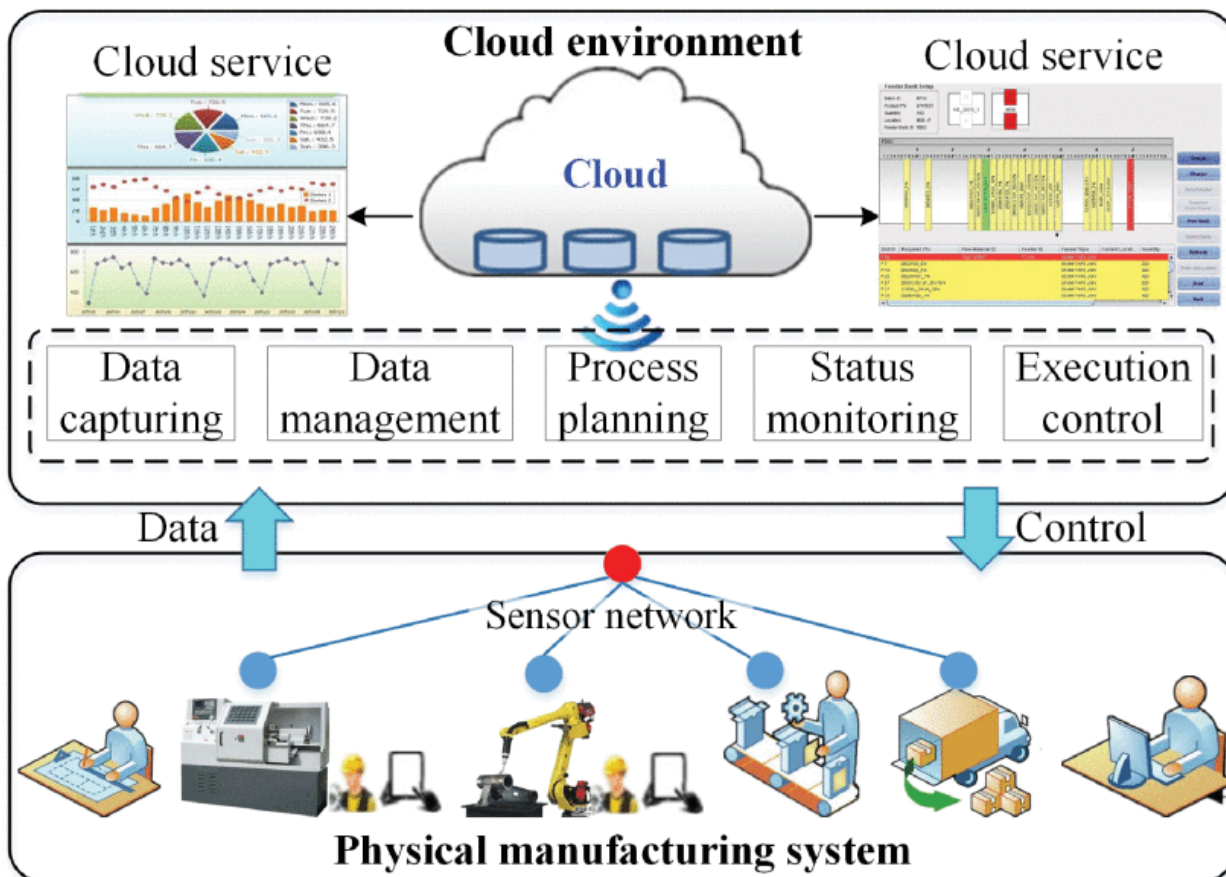


Рисунок 1 – Пример реальной системы

Опишем данную систему в терминах теории массового обслуживания. В данном случае заявки – это клиенты, которые запросили доступ к сервису. При подключении клиенту выделяется некий объем оперативной памяти, который в дальнейшем будем называть ресурсом. Входящий поток, отвечающий за поступление новых заявок, представим в виде простейшего потока. Сам сервер облачных вычислений выступает в роли неограниченного числа обслуживающих приборов. Для нахождения пиковой потребности в ресурсе предположим, что количество ресурса также неограниченно. С помощью случайной среды заданной цепью Маркова с конечным количеством состояний, мы моделируем временные промежутки.

Как две разные стратегии проектирования облачных сервисов было представлено две модели. В одной модели при смене состояния среды ресурс

перераспределялся согласно новому состоянию среды. Во второй для незавершенных вычислений ресурс оставался прежним.

В обоих случаях можно решать разные задачи, например задачи нахождения вероятности того, что суммарный объем занимаемого ресурса превысит определенное значение.

1.2 Математическая модель

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов и неограниченным количеством некоторого ресурса. Функционирование системы зависит от состояния случайной среды. Случайная среда задана цепью Маркова с непрерывным временем, пространством состояний $s \in \{1, \dots, S\}$ и инфинитезимальной матрицей $\mathbf{Q}$. На вход поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ_s , зависящей от состояния среды. Время обслуживания заявки на каждом приборе подчинено экспоненциальному распределению с параметром μ_s , также зависящем от состояния среды. Кроме того, каждая поступающая заявка формирует запрос на получение ресурса случайного объема $v_s \geq 0$ с функцией распределения вероятностей $G_s(y) = P\{v_s < y\}$, которая зависит от состояния среды.

Пусть $s(t)$ – состояние среды в момент времени t , $s \in \{1, \dots, S\}$, q_{ks} – интенсивность перехода среды из состояния k в состояние s ($k \neq s$), $i(t)$ – число заявок в системе в момент времени t , $v(t)$ – суммарный объем занятого ресурса, $p_s(i, v, t) = P(i(t) = i, v(t) < v, s(t) = s)$ – вероятность того, что в момент времени t в системе находится i заявок, суммарный объем занятого ресурса меньше v , а среда находится в состоянии s .

При смене состояния среды меняются: параметр экспоненциального распределения времени обслуживания заявок (все заявки обслуживаются с новым временем обслуживания), интенсивность входящего потока, функция распределения объема занимаемого ресурса (занятые ресурсы перераспределяются заново по закону $G_s(y) = P\{v_s < y\}$ с новым значением s).

Когда заявка завершает обслуживание, она покидает систему и освобождает ресурс, который она заняла во время захвата (под захватом

понимается момент прихода заявки или смены состояния среды, при котором произойдет перераспределение ресурса).

Такую модель будем называть моделью с перераспределением ресурса.

Необходимо найти стационарное распределение суммарного объема занимаемого ресурса $p(v, t)$.

1.3 Асимптотическое исследование суммарного объема занимаемого ресурса

Решение задачи рассматривается в условии растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний среды. Введем параметр $N \rightarrow \infty$ и будем рассматривать входящий поток с матрицей интенсивностей $N \cdot \Lambda$, а случайную среду, заданную матрицей $N \cdot Q$.

В работе [2] была получена аппроксимация частичных характеристических функций числа заявок в такой системе. Она имеет вид:

$$h_s(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} p_s(i) = r_s \exp \left\{ ju N \kappa_1 + \frac{(ju)^2}{2} N \kappa_2 \right\},$$

где

$$\kappa_1 = \lambda / \nu,$$

$$\kappa_2 = -\frac{\lambda}{\nu^2} \mathbf{kMe} + \frac{\lambda}{\nu} + \frac{\mathbf{k\Lambda e}}{\nu},$$

$$\lambda = \mathbf{r\Lambda e},$$

$$\nu = \mathbf{rMe},$$

вектор $\mathbf{r}$ удовлетворяет условию

$$\begin{cases} \mathbf{rQ} = \mathbf{0} \\ \mathbf{re} = 1 \end{cases}, \quad (1.1)$$

а вектор $\mathbf{k}$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{kQ} = \mathbf{r}(\kappa_1 \mathbf{M} - \mathbf{\Lambda}).$$

Отсюда, найдем характеристическую функцию суммарного объема ресурса в системе:

$$\begin{aligned} h(u) &= \sum_{s=1}^S \mathbf{E} \left\{ e^{ju \sum_{k=1}^{i(t)} \xi_k^{(s)}} \right\} P\{s(t) = s\} = \sum_{s=1}^S \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{E} \left\{ e^{ju \sum_{k=1}^i \xi_k^{(s)}} \right\} P\{i(t) = i\} P\{s(t) = s\} = \\ &= \sum_{s=1}^S \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{E} \left\{ e^{ju i \xi^{(s)}} \right\} P\{i(t) = i\} P\{s(t) = s\} = \sum_{s=1}^S \sum_{i=0}^{\infty} (\phi_s(u))^i P\{i(t) = i\} P\{s(t) = s\} = \\ &= \sum_{s=1}^S F(\phi_s(u)) P\{s(t) = s\} = \sum_{s=1}^S r_s(\phi_s(u))^{N\kappa_1} e^{\frac{N\kappa_2}{2} \ln^2 \phi_s(u)}. \end{aligned}$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получим стационарное распределение суммарного объема занимаемого ресурса в системе:

$$P(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-juv} h(u) du = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^S r_s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-juv} (\phi_s(u))^{N\kappa_1} e^{\frac{N\kappa_2}{2} \ln^2 \phi_s(u)} du. \quad (1.2)$$

Так как асимптотический параметр N появляется в финальной формуле, мы можем принять конечный результат только как аппроксимацию для достаточно больших значений N .

2 Математическая модель и аналитическое исследование системы

M/GI/∞, функционирующей в случайной среде

2.1 Математическая модель

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов и неограниченным количеством некоторого ресурса, функционирующую в случайной среде (рисунок 2). Случайная среда задана цепью Маркова с непрерывным временем, пространством состояний $k \in \{1, \dots, K\}$ и инфинитезимальной матрицей Q . На вход поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ_k , зависящей от состояния среды. Время обслуживания заявки на каждом приборе имеет функцию распределения вероятностей $B_k(x)$, также зависящую от состояния среды. Кроме того, каждая поступающая заявка формирует запрос на получение ресурса случайного объема $v_k \geq 0$ с функцией распределения вероятностей $G_k(y) = P\{v_k < y\}$, которая зависит от состояния среды.

При смене состояния среды время обслуживание и объем занимаемого ресурса меняются только для новых заявок, для заявок, которые уже находились в обслуживании, эти параметры остаются прежними. Когда заявка завершает обслуживание, она покидает систему и освобождает ресурс, который она заняла во время захвата (под захватом понимается момент прихода заявки в систему, при котором произойдет перераспределение ресурса).

Пусть $k(t)$ – состояние среды в момент времени t , $k \in \{1, \dots, K\}$, $i(t)$ – число заявок в системе в момент времени t , $v(t)$ – суммарный объем занятого ресурса, $p_k(i, v, t) = P(i(t) = i, v(t) < v, k(t) = k)$ – вероятность того, что в момент времени t в системе находится i заявок, суммарный объем занятого ресурса меньше v , а среда находится в состоянии k .

Такую модель будем называть моделью без перераспределения ресурса.

Необходимо найти стационарное распределение суммарного объема занимаемого ресурса $p(v, t)$.

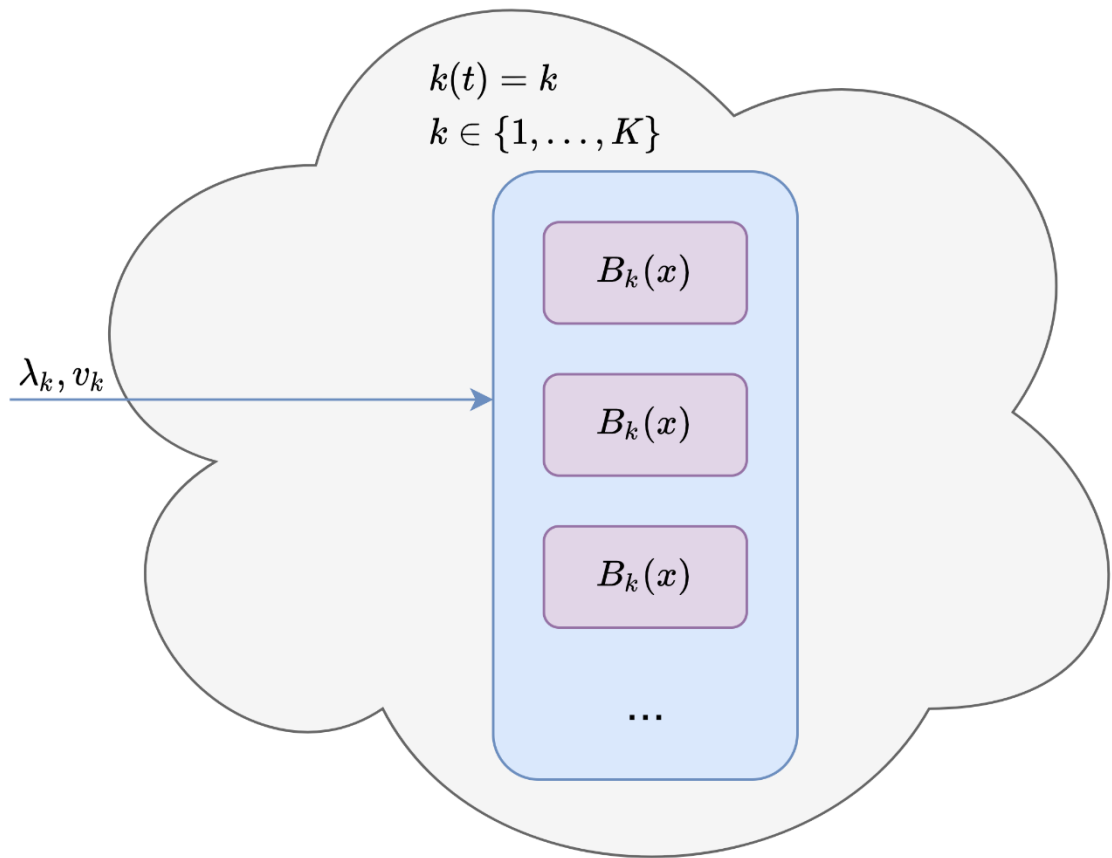


Рисунок 2 – Математическая модель системы без перераспределения ресурса

2.2 Метод динамического просеивания

Так как мы рассматриваем бесконечнолинейную систему массового обслуживания с неэкспоненциальным временем обслуживания, мы не можем применять некоторые классические методы напрямую (например, метод добавочных переменных). Иначе пришлось бы иметь дело с неограниченным, но меняющимся количеством уравнений и переменных. Поэтому мы используем метод динамического просеивания, модификация которого приведена ниже.

2.2.1 Описание метода

Пусть в момент времени t_0 в системе нет заявок. Зафиксируем момент времени $T > t_0$. Начертим две временные оси (рисунок 3). На оси 0 отметим моменты прихода заявок в систему. На оси 1 отметим только те заявки, которые к моменту времени T не закончили свое обслуживание. Заявки на оси 1 назовем просеянными, а процесс проецирования на ось 1 – просеиванием.

Определим функцию $S_k(t)$, где k – значение случайного процесса $k(t)$ в момент поступления заявки и имеет смысл текущего состояния случайной среды, которая описывает вероятность динамического просеивания на ось 1 следующим образом:

$$S_k(t) = 1 - B_k(T - t)$$

Заявка, пришедшая в систему в момент времени $t < T$, не закончит обслуживание к моменту времени T и будет занимать определенный объем ресурса с вероятностью S_k . Соответственно с вероятностью $1 - S_k(t)$ заявка покинет систему и освободит тот объем ресурса, которая заняла во время захвата, и не будет считаться просеянной. Значения функции $S_k(t)$ принадлежат отрезку $[0,1]$. На рисунке 2.2 цветные зоны отображают разные состояния случайной среды.

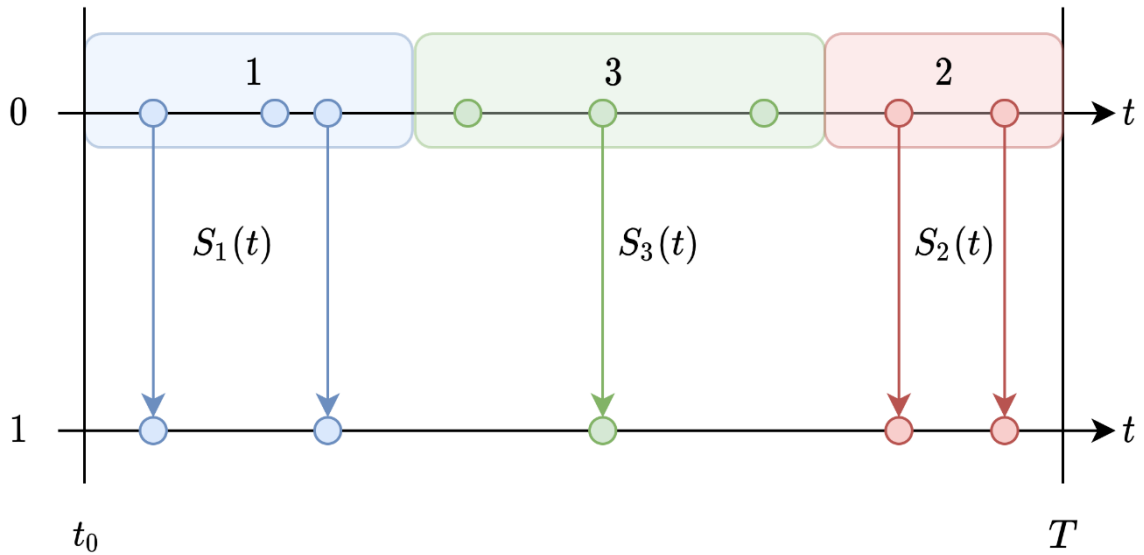


Рисунок 2 – Пример просеивания заявок

Обозначим число заявок, просеявшихся в течение времени $[t_0, t]$ как $n(t)$ суммарный объем занимаемого ими ресурса как $w(t)$.

На основании результатов полученных в [12] и [13], нетрудно показать

$$P\{k(T) = k, i(T) = m, v(T) < x\} = P\{k(T) = k, i(T) = m, v(T) < x\}, k \in \{1, \dots, K\} \quad (2.1)$$

для любых неотрицательных значений m и x . Таким образом, законы распределения вероятностей случайных процессов $\{k(t), n(t), w(t)\}$ и $\{k(t), i(t), v(t)\}$ в момент времени $t = T$ совпадают. Вследствие этого в финальных выражениях мы можем принимать $t = T$ и получать искомый результат, так как момент времени T выбирается произвольно.

2.2.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Обозначим вероятности

$$P_k(n, w, t) = P\{k(t) = k, n(t) = n, w(t) < v\}.$$

С учетом формулы полной вероятности и метода динамического просеивания запишем для $P_k(n, w, t)$ следующую систему:

$$\begin{aligned} P_k(n, w, t + \Delta t) = & P_k(n, w, t)(1 - \lambda_k \Delta t)(1 + q_{kk} \Delta t) + \\ & + \lambda_k \Delta t S_k(t) \int_0^w P_k(n-1, w-y, t) dG_k(y) + \\ & + \lambda_k \Delta t (1 - S_k(t)) P_k(n, w, t) + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^K q_{vk} \Delta t P_v(n, w, t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Отсюда получим интегрально-дифференциальную систему уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{P_k(n, w, t + \Delta t)}{\partial t} = & \lambda_k S_k(t) + \left[\int_0^w P_k(n-1, w-y, t) dG_k(y) - P_k(n, w, t) \right] + \\ & + \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^K q_{vk} P_v(n, w, t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

с начальным условием

$$P_k(n, dw, t_0) = \begin{cases} r_k \delta_o(dw), & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.3)$$

где r_k является элементом вектора-строки $\mathbf{r}$, которая удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{rQ} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{re} = 1, \end{cases}$$

$\mathbf{e}$ — вектор-столбец из единиц.

2.2.3 Характеристические функции

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$

$$h_k(u, v, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} \int_0^{\infty} e^{jvw} P_k(n, dw, t).$$

Перепишем систему (2.2)-(2.3) для функций $h_k(u, v, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_k(u, v, t)}{\partial t} = & \lambda_k S_k(t) (e^{ju} G_k^*(v) - 1) h_k(u, v, t) + \\ & + \sum_{v=1}^K q_{vk} h_v(u, v, t), \quad k \in \{1, \dots, K\}, \end{aligned}$$

с начальным условием

$$h_k(u, dv, t_0) = r_k \delta_0(dv),$$

где

$$G_k^*(v) = \int_0^{\infty} e^{jvy} dG_k(y).$$

Перепишем полученную систему в матричном виде

$$\frac{\partial \mathbf{h}(u, v, t)}{\partial t} = \mathbf{h}(u, v, t) \left[\Lambda \mathbf{S}(t) (e^{ju} \mathbf{G}(v) - \mathbf{I}) + \mathbf{Q} \right], \quad (2.4)$$

с начальным условием

$$\mathbf{h}(u, dv, t_0) = \mathbf{r} \delta_0(dv), \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(u, v, t) &= [h_1(u, v, t), \dots, h_K(u, v, t)], \\ \mathbf{S}(t) &= \text{diag}\{S_k(t)\}, \quad \mathbf{G}(v) = \text{diag}\{G_k^*(v)\} \end{aligned}$$

и $\mathbf{I}$ единичная матрица.

2.3 Метод асимптотического анализа

Систему (2.4)-(2.5) не получается решить аналитически допредельно, поэтому применим метод асимптотического анализа.

2.3.1 Описание метода

Метод асимптотического анализа для систем массового обслуживания состоит в анализе уравнений, определяющих любые характеристики системы, и позволяет получить распределение вероятностей и численные характеристики в аналитической форме в асимптотических условиях. Мы используем метод асимптотического анализа в условии растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний среды для того, чтобы решить систему уравнений (2.4) - (2.5). Обозначим

$$\tilde{\Lambda} = N\Lambda, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = N\mathbf{Q}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Из (2.4) получим

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{h}(u, v, t)}{\partial t} = \mathbf{h}(u, v, t) [\Lambda \mathbf{S}(t) (e^{ju} \mathbf{G}(v) - \mathbf{I}) + \mathbf{Q}]. \quad (2.6)$$

2.3.2 Асимптотика первого порядка

Выполним в системе (2.6), (2.5) замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad u = \varepsilon x, \quad v = \varepsilon y, \quad \mathbf{h}(u, v, t) = \mathbf{f}_1(x, y, t, \varepsilon), \quad (2.7)$$

получим

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{f}_1(x, y, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{f}_1(x, y, t, \varepsilon) [\Lambda \mathbf{S}(t)(e^{j\varepsilon x} \mathbf{G}(\varepsilon y) - \mathbf{I}) + \mathbf{Q}]. \quad (2.8)$$

В системе (2.8) устремим $\varepsilon \rightarrow 0$ и определим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{f}_1(x, y, t, \varepsilon) = \mathbf{f}_1(x, y, t).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{f}_1(x, y, t) \mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

В свою очередь, это означает, что $\mathbf{f}_1(x, y, t)$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{f}_1(x, y, t) = \mathbf{r} \phi_1(x, y, t), \quad (2.9)$$

где $\phi_1(x, y, t)$ скалярная функция, которая удовлетворяет начальному условию $\phi_1(x, y, t_0) = 1$.

Домножим уравнения системы (2.8) на $\mathbf{e}$ и разделим на ε , устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ и делая подстановку (2.9):

$$\frac{\partial \phi_1(x, y, t)}{\partial t} = \phi_1(x, y, t) \mathbf{r} \Lambda \mathbf{S}(t) (jx \mathbf{I} + jy \mathbf{A}_1) \mathbf{e}, \quad (2.10)$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \text{diag}\{\alpha_k\}, \quad \alpha_k = \int_0^\infty y dG_k(y).$$

Решение уравнения (2.10) представляется в виде

$$\phi_1(x, y, t) = \exp \left\{ jx \int_{t_0}^t \mathbf{r} \Lambda \mathbf{S}(\tau) \mathbf{e} d\tau + jy \int_{t_0}^t \mathbf{r} \Lambda \mathbf{S}(\tau) \mathbf{A}_1 \mathbf{e} d\tau \right\}. \quad (2.11)$$

Введем обозначения

$$m_1(t) \square \int_{t_0}^t \mathbf{r} \Lambda \mathbf{S}(\tau) \mathbf{e} d\tau, \quad m_2(t) \square \int_{t_0}^t \mathbf{r} \Lambda \mathbf{S}(\tau) \mathbf{A}_1 \mathbf{e} d\tau,$$

и делая замены обратные к (2.9) и (2.7), получим асимптотику первого порядка

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(1)}(u, v, t) &= \mathbf{f}_1(x, y, t, \varepsilon) \approx \mathbf{f}_1(x, y, t) = \mathbf{r} \phi_1(x, y, t) = \\ &= \mathbf{r} \exp \{ juNm_1(t) + jvNm_2(t) \}. \end{aligned}$$

2.3.3 Асимптотика второго порядка

В системе (2.4) произведем замену

$$\mathbf{h}(u, v, t) = \mathbf{h}_2(u, v, t) \exp \{ juNm_1(t) + jvNm_2(t) \} \quad (2.12)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{h}_2(u, v, t)}{\partial t} &= \mathbf{h}_2(u, v, t) \times \\ &\times \left[\Lambda \mathbf{S}(t) (e^{ju} \mathbf{G}(v) - \mathbf{I}) + \mathbf{Q} - \mathbf{r} \Lambda \mathbf{S}(t) \mathbf{e} (ju\mathbf{I} + jv\mathbf{A}_1) \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подставим

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon x, \quad v = \varepsilon y, \quad \mathbf{h}_2(u, v, t) = \mathbf{f}_2(x, y, t, \varepsilon) \quad (2.14)$$

В систему (2.13) и получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{f}_2(x, y, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{f}_2(x, y, t, \varepsilon) \times \\ \times \left[\Lambda \mathbf{S}(t)(e^{j\varepsilon x} \mathbf{G}(\varepsilon y) - \mathbf{I}) + \mathbf{Q} - \mathbf{r} \Lambda \mathbf{S}(t) \mathbf{e}(j\varepsilon x \mathbf{I} + j\varepsilon y \mathbf{A}_1) \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$, определяя

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{f}_2(x, y, t, \varepsilon) = \mathbf{f}_2(x, y, t),$$

получим

$$\mathbf{f}_2(x, y, t) \mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

Это означает, что

$$\mathbf{f}_2(x, y, t) = \mathbf{r} \phi_2(x, y, t), \quad (2.16)$$

где $\phi_2(x, y, t)$ скалярная функция, которая удовлетворяет начальному условию $\phi_2(x, y, t_0) = 1$. Представим $\mathbf{f}_2(x, y, t)$ как

$$\mathbf{f}_2(x, y, t, \varepsilon) = \phi_2(x, y, t) [\mathbf{r} + \mathbf{g}(t)(j\varepsilon x \mathbf{I} + j\varepsilon y \mathbf{A}_1)] + O(\varepsilon^2), \quad (2.17)$$

где $\mathbf{g}(t)$ вектор-строка.

В системе (2.15) разложим экспоненту в ряд Маклорена до первого порядка

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{f}_2(x, y, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{f}_2(x, y, t, \varepsilon) [\Lambda \mathbf{S}(t)(\mathbf{I} - \mathbf{er})(j\varepsilon x \mathbf{I} + j\varepsilon y \mathbf{A}_1) + \mathbf{Q}].$$

Теперь сделаем подстановку (2.17) в полученное уравнение

$$\begin{aligned} \phi_2(x, y, t) [\mathbf{r} + \mathbf{g}(t)(j\varepsilon x \mathbf{I} + j\varepsilon y \mathbf{A}_1)] \times \\ \times [\Lambda \mathbf{S}(t)(\mathbf{I} - \mathbf{er})(j\varepsilon x \mathbf{I} + j\varepsilon y \mathbf{A}_1) + \mathbf{Q}] = O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Поделим обе части на ε и устремим $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\phi_2(x, y, t) [\mathbf{r} \Lambda \mathbf{S}(t)(\mathbf{I} - \mathbf{e}\mathbf{r}) + \mathbf{g}(t)\mathbf{Q}] [j\varepsilon x \mathbf{I} + j\varepsilon y \mathbf{A}_1] = 0.$$

Отсюда

$$\mathbf{g}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{r} \Lambda \mathbf{S}(t)(\mathbf{e}\mathbf{r} - \mathbf{I}). \quad (2.18)$$

Так как вектор $\mathbf{g}(t)$ определен неоднородной системой линейных уравнений, решение $\mathbf{g}(t)$ в уравнении (2.18) может быть записано в виде

$$\mathbf{g}(t) = c(t)\mathbf{r} + \mathbf{d}(t),$$

где $c(t)$ произвольная скалярная функция и вектор-строка $\mathbf{d}(t)$ любое частное решение системы (18), удовлетворяющее определенным условиям, например

$$\mathbf{d}(t)\mathbf{e} = 0.$$

Решение имеет форму

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{r} \Lambda \mathbf{S}(t)\mathbf{G},$$

где

$$\begin{cases} \mathbf{G}\mathbf{Q} = \mathbf{e}\mathbf{r} - \mathbf{I}, \\ \mathbf{G}\mathbf{e} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Таким образом, решение уравнения (18) запишем в виде

$$\mathbf{g}(t) = c(t)\mathbf{r} + \mathbf{r} \Lambda \mathbf{S}(t)\mathbf{G}.$$

Запишем уравнение для функции $\phi_2(x, y, t)$ в явном виде. Для этого в уравнении (2.15) разложим экспоненту в ряд Маклорена до второго порядка и произведем замену (2.17). Получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \phi_2(x, y, t)}{\partial t} \mathbf{r} = & \phi_2(x, y, t) [\mathbf{r} + \mathbf{g}(t)(j\varepsilon x \mathbf{I} + j\varepsilon y \mathbf{A}_1)] \times \\ & \times \left[j\varepsilon y \Lambda \mathbf{S}(t) \mathbf{A}_1 + \frac{(j\varepsilon y)^2}{2} \Lambda \mathbf{S}(t) \mathbf{A}_2 + j\varepsilon x \Lambda \mathbf{S}(t) + j\varepsilon x j\varepsilon y \Lambda \mathbf{S}(t) \mathbf{A}_1 + \right. \\ & \left. + \frac{(j\varepsilon x)^2}{2} \Lambda \mathbf{S}(t) + \mathbf{Q} - j\varepsilon x \mathbf{r} \Lambda \mathbf{S}(t) \mathbf{e} \mathbf{I} - j\varepsilon y \mathbf{r} \Lambda \mathbf{S}(t) \mathbf{e} \mathbf{A}_1 \right], \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{A}_2 = \text{diag}\{\alpha_k\}, \quad \alpha_k = \int_0^\infty y^2 dG_k(y).$$

Теперь умножим обе части уравнения на вектор $\mathbf{e}$. Учитывая уравнение (2.18), запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2(x, y, t)}{\partial t} = & \phi_2(x, y, t) \left[\frac{(jx)^2}{2} [\mathbf{r} + 2\mathbf{g}(t)(\mathbf{I} - \mathbf{er})] \Lambda \mathbf{S}(t) \mathbf{e} + \right. \\ & + \frac{(jy)^2}{2} [\mathbf{r} \mathbf{A}_2 + 2\mathbf{g}(t)(\mathbf{I} - \mathbf{er}) \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1] \Lambda \mathbf{S}(t) \mathbf{e} + \\ & \left. + jxjy [\mathbf{r} + 2\mathbf{g}(t)(\mathbf{I} - \mathbf{er})] \mathbf{A}_1 \Lambda \mathbf{S}(t) \mathbf{e} \right]. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11}(t) &= \int_{t_0}^t [\mathbf{r} + 2\mathbf{g}(\tau)(\mathbf{I} - \mathbf{er})] \Lambda \mathbf{S}(\tau) \mathbf{e} d\tau, \\ \mathbf{K}_{22}(t) &= \int_{t_0}^t [\mathbf{r} \mathbf{A}_2 + 2\mathbf{g}(\tau)(\mathbf{I} - \mathbf{er}) \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1] \Lambda \mathbf{S}(\tau) \mathbf{e} d\tau, \\ \mathbf{K}_{12}(t) &= \int_{t_0}^t [\mathbf{r} + 2\mathbf{g}(\tau)(\mathbf{I} - \mathbf{er})] \mathbf{A}_1 \Lambda \mathbf{S}(\tau) \mathbf{e} d\tau, \end{aligned}$$

получим

$$\phi_2(x, y, t) = \exp \left\{ \frac{(jx)^2}{2} \mathbf{K}_{11}(t) + \frac{(jy)^2}{2} \mathbf{K}_{22}(t) + jxjy \mathbf{K}_{12}(t) \right\}.$$

Делая замены обратные к (2.16), (2.14) и (2.12), получим асимптотику второго порядка

$$\mathbf{h}^{(2)}(u, v, t) \approx \mathbf{r} \exp \left\{ juNm_1(t) + jvNm_2(t) + \frac{(ju)^2}{2} NK_{11}(t) + \frac{(jv)^2}{2} NK_{22}(t) + jujvNK_{12}(t) \right\}.$$

2.3.4 Основной результат

Умножая на вектор $\mathbf{e}$, получим аппроксимацию характеристической функции случайного процесса $\{n(t), w(t)\}$

$$h^{(2)}(u, v, t) = \mathbf{h}^{(2)}(u, v, t)\mathbf{e},$$

переходя в стационарный режим, положим $t = T$ и $t_0 \rightarrow -\infty$, используя уравнение (2.1), мы получим аппроксимацию для характеристической функции процесса $\{i(t), v(t)\}$

$$h(u, v) \approx \exp \left\{ juNm_1 + jvNm_2 + \frac{(ju)^2}{2} NK_{11} + \frac{(jv)^2}{2} NK_{22} + jujvNK_{12} \right\},$$

где

$$m_1 = \mathbf{r} \Lambda \mathbf{B} \mathbf{e}, \quad m_2 = \mathbf{r} \Lambda \mathbf{A}_1 \mathbf{B} \mathbf{e},$$

$$K_{11} = \mathbf{r} \Lambda \mathbf{B} \mathbf{e} + 2\mathbf{r} \Lambda \mathbf{B} \mathbf{G} \Lambda \mathbf{e} - 2\mathbf{r} \Lambda (\mathbf{M} \circ \mathbf{G}) \Lambda \mathbf{e},$$

$$K_{22} = \mathbf{r} \mathbf{A}_2 \Lambda \mathbf{B} \mathbf{e} + 2\mathbf{r} \mathbf{A}_1 \Lambda \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{A}_1 \Lambda \mathbf{e} - 2\mathbf{r} \mathbf{A}_1 \Lambda (\mathbf{M} \circ \mathbf{G}) \mathbf{A}_1 \Lambda \mathbf{e},$$

$$K_{12} = \mathbf{r} \mathbf{A}_1 \Lambda \mathbf{B} \mathbf{e} + 2\mathbf{r} \mathbf{A}_1 \Lambda \mathbf{B} \mathbf{G} \Lambda \mathbf{e} - 2\mathbf{r} \mathbf{A}_1 \Lambda (\mathbf{M} \circ \mathbf{G}) \Lambda \mathbf{e},$$

$$\mathbf{M} = \left[\int_0^{\infty} (1 - B_k(\tau))(1 - B_{k'}(\tau)) d\tau \right], \quad k, k' \in \{1, \dots, K\}.$$

Здесь операция $\mathbf{X} \circ \mathbf{Y}$ обозначает произведение Адамара – покомпонентное произведение матриц $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$.

Таким образом стационарное распределение вероятностей двумерного случайного процесса $\{i(t), v(t)\}$ может быть аппроксимирована Гауссовским распределением с вектором средних

$$\mathbf{m} = N \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \end{bmatrix}$$

и матрицей ковариации

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}.$$

В частности, стационарная характеристическая функция распределения суммарного объема занимаемого ресурса $v(t)$ может быть аппроксимирована как

$$h(v) \approx \exp \left\{ jvNm_2 + \frac{(jv)^2}{2} NK_{22} \right\}. \quad (2.19)$$

Таким образом, это распределение может быть аппроксимировано Гауссовским с математическим ожиданием Nm_1 и дисперсией NK_{22} .

3 Алгоритмы численных расчетов вероятностных характеристик функционирования систем

Вычисление характеристик исследуемых процессов требует сложных вычислений, в том числе расчетов определенных интегралов, решения матричных уравнений и систем уравнений. Для подобных вычислений была использована прикладная программа для символьных вычислений Mathcad.

3.1 Получение распределения для модели с перераспределением ресурса

Шаг 1. Задание исходных данных.

a. Задание параметра аппроксимации

$$N := 10$$

b. Задание инфинитезимальной матриц

$$Q := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

c. Задание матрицы интенсивностей простейшего входящего потока

$$L := \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

d. Задание матрицы параметров экспоненциального распределения времени обслуживания

$$M := \begin{pmatrix} 0.95 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7.3 \end{pmatrix}$$

е. В качестве функции распределения объема ресурса приняли гамма-распределение с параметрами форм и масштабов, определенных для каждого состояния случайной среды, как компоненты векторов α и β соответственно:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \beta := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Шаг 2. Основные расчеты.

2.1. Нахождение вектора стационарного распределения состояния случайной среды $\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e1} &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{tmpM} &:= \text{augment}(\mathbf{Q}, \mathbf{e1}) \\ \text{tmpV} &:= (0 \ 0 \ 0 \ 1) \\ \mathbf{r} &:= \text{tmpV} \cdot \text{tmpM}^T \cdot (\text{tmpM} \cdot \text{tmpM}^T)^{-1} \end{aligned}$$

2.2. Нахождение λ и μ :

$$\begin{aligned} \lambda &:= \mathbf{r} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e1} \\ \mu &:= \mathbf{r} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{e1} \end{aligned}$$

2.4. Вычисление вектора $\mathbf{k}$, значений κ_1, κ_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &:= \text{tmpV} \cdot \text{tmpM}^T \cdot (\text{tmpM} \cdot \text{tmpM}^T)^{-1} \\ \kappa_1 &:= \frac{\lambda}{\mu} \\ \kappa_2 &:= \frac{-\lambda}{\mu^2} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{e1} + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{e1}}{\mu} \end{aligned}$$

2.5. Задание характеристической функции распределения объема ресурса, занимаемого одной заявкой

$$\phi(u, \alpha, \beta) := \left(\frac{\beta}{\beta - j \cdot u} \right)^\alpha$$

2.6. Задание характеристической функции распределения суммарного объема ресурса

$$F(u, N) := \sum_{s=0}^{S-1} \left[r_{0,s} \cdot \phi(u, \alpha_{s,0}, \beta_{s,0})^{N \cdot \kappa_1} \cdot e^{\frac{N \cdot \kappa_2}{2} \cdot (\ln(\phi(u, \alpha_{s,0}, \beta_{s,0})))^2} \right]$$

2.7. Задание функции обратного преобразования Фурье

$$\begin{aligned} A &:= \pi \\ \Pr(N, v) &:= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-A}^A e^{-j \cdot v \cdot u} \cdot F(u, N) du \right) \end{aligned}$$

2.8. Задание аппроксимации функции распределения суммарного объема занимаемого ресурса

$$F(N, v) := \int_{-5}^v \Pr(N, x) dx$$

Шаг 3. Вывод результатов.

$v := 0, 0.1.. 20$
$F(10, v) =$
0.002514
0.002935
0.003404
0.003922
0.004492
0.005116
0.005797
0.006537
0.00734
0.008207
0.009142
0.010148
0.011228
0.012385
0.013622
...

3.2 Нахождение параметров гауссовской аппроксимации для модели без перераспределения ресурса

Шаг 1. Задание исходных данных

Исходные данные остались прежними, но теперь задали в качестве функции распределения времени обслуживания заявки гамма-распределение, например с параметрами

$$\text{bet} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{alp} := \begin{pmatrix} 1.9 \\ 0.5 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

Шаг 2. Дополнительные расчёты

2.1. Расчёт матриц первых моментов для функции распределения времени обслуживания и функции распределения ресурса:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \frac{\alpha_0}{\beta_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1}{\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2}{\beta_2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} \frac{\text{alp}_0}{\text{bet}_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\text{alp}_1}{\text{bet}_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\text{alp}_2}{\text{bet}_2} \end{pmatrix}$$

2.2. Вычисление матрицы вторых моментов для функции распределения ресурса:

$$\text{Alpha} := \begin{bmatrix} \frac{\alpha_0}{(\beta_0)^2} + \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1}{(\beta_1)^2} + \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2}{(\beta_2)^2} + \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

2.3. Задание функций распределения времени обслуживания для каждого состояния:

$$\begin{aligned} B1(x) &:= \text{pgamma}(\text{bet}_0 x, \text{alp}_0) \\ B2(x) &:= \text{pgamma}(\text{bet}_1 x, \text{alp}_1) \\ B3(x) &:= \text{pgamma}(\text{bet}_2 x, \text{alp}_2) \end{aligned}$$

2.4. Вычисление значения матрицы $\mathbf{M}$:

$$\begin{aligned} M11 &:= \int_0^\infty (1 - B1(x)) \cdot (1 - B1(x)) \, dx \\ M12 &:= \int_0^\infty (1 - B1(x)) \cdot (1 - B2(x)) \, dx \\ M13 &:= \int_0^\infty (1 - B1(x)) \cdot (1 - B3(x)) \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{22} &:= \int_0^{\infty} (1 - B_2(x)) \cdot (1 - B_2(x)) \, dx \\
M_{23} &:= \int_0^{\infty} (1 - B_2(x)) \cdot (1 - B_3(x)) \, dx \\
M_{33} &:= \int_0^{\infty} (1 - B_3(x)) \cdot (1 - B_3(x)) \, dx \\
M &:= \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.907041 & 0.396447 & 0.117763 \\ 0.396447 & 0.18169 & 0.077181 \\ 0.117763 & 0.077181 & 0.042731 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.5. Вычисление матрицы $\mathbf{G}$:

$$\begin{aligned}
\text{zero}(m,n) &:= 0 \\
\text{tmpM} &:= \text{augment}(Q, e1) \\
\text{tmpV} &:= \text{augment}(e1 \cdot r - \text{identity}(3), \text{matrix}(3, 1, \text{zero})) \\
\mathbf{G} &:= \text{tmpV} \cdot \text{tmpM}^T \cdot (\text{tmpM} \cdot \text{tmpM}^T)^{-1}
\end{aligned}$$

Шаг 3. Вычисление параметром гауссовской аппроксимации

3.1. Нахождение элементов матрицы ковариации:

$$\begin{aligned}
K_{11} &:= r \cdot L \cdot B \cdot e1 + 2 \cdot r \cdot L \cdot B \cdot G \cdot L \cdot e1 - 2 \cdot r \cdot L \cdot (MG) \cdot L \cdot e1 = 1.072617 \\
K_{22} &:= r \cdot L \cdot \text{Alpha} \cdot B \cdot e1 + 2 \cdot r \cdot A \cdot L \cdot B \cdot G \cdot A \cdot L \cdot e1 - 2 \cdot r \cdot A \cdot L \cdot (MG) \cdot A \cdot L \cdot e1 = 1.89367 \\
K_{12} &:= r \cdot L \cdot \text{Alpha} \cdot B \cdot e1 + 2 \cdot r \cdot A \cdot L \cdot B \cdot G \cdot L \cdot e1 - 2 \cdot r \cdot A \cdot L \cdot (MG) \cdot L \cdot e1 = 1.89367
\end{aligned}$$

3.2. Нахождение первых начальных моментов:

$$\begin{aligned}
m_1 &:= r \cdot L \cdot B \cdot e1 = 0.591404 \\
m_2 &:= r \cdot L \cdot A \cdot B \cdot e1 = 0.591404
\end{aligned}$$

4 Разработка приложения для имитационного моделирования систем массового обслуживания, функционирующих в случайной среде

4.1 Объектная модель разрабатываемого приложения

Для имитационного моделирования подобных систем наиболее подходящим является дискретно-событийный подход [1]. На рисунке 4 представлена объектная модель разрабатываемого приложения.

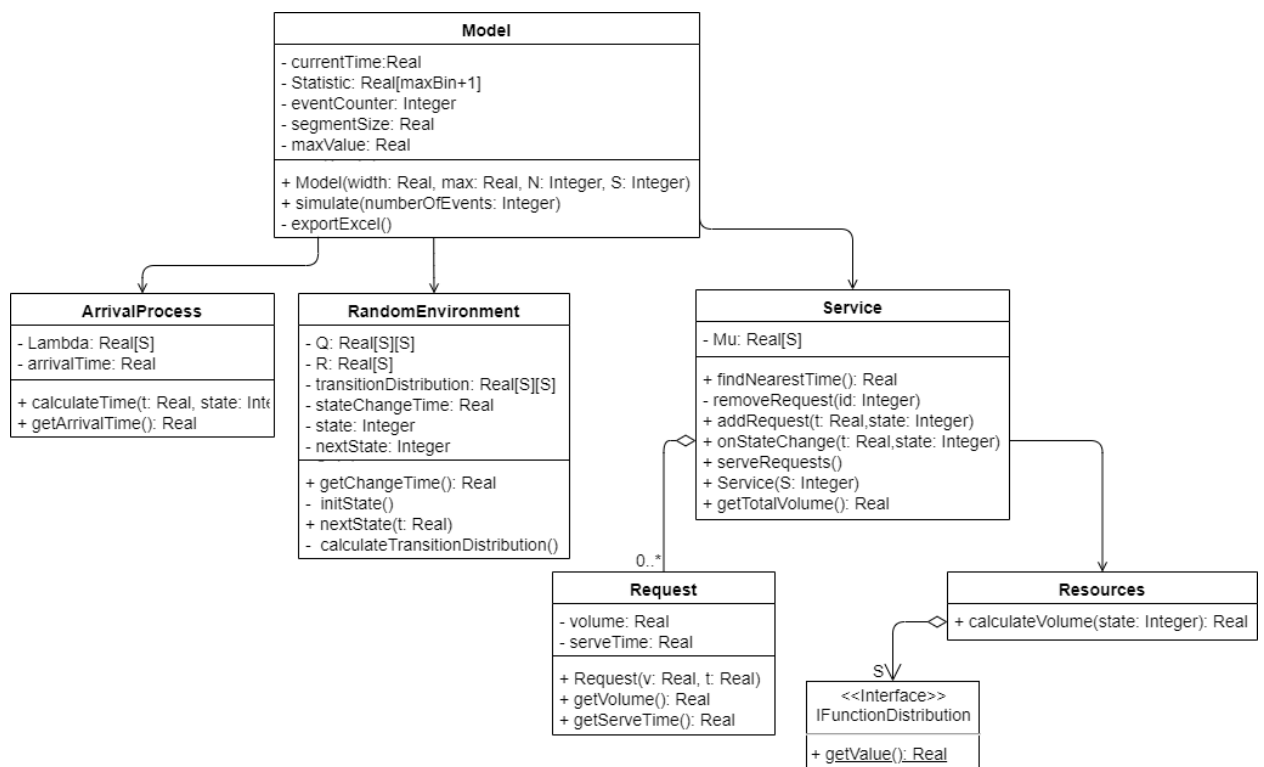


Рисунок 4 – Объектная модель СМО

Класс RandomEnvironment представляет собой реализацию случайной среды, ее функционирование определяется цепью Маркова с непрерывным временем и задается инфинитезимальной матрицей Q . Метод calculateTransitionDistribution(...) на основе матрицы Q вычисляет вероятности переходов. Метод initState(...) находит вектор $\mathbf{r}$ стационарного распределения состояний среды из системы уравнений (4.1) и на основе этого вектора определяет начальное состояние случайной среды. Метод

nextState(...) генерирует время смены состояния среды, а также определяет следующее состояние.

Класс Request представляет собой реализацию заявки. Имеет атрибут volume – объем занимаемого ресурса и атрибут serveTime – время завершения обслуживания.

Класс Resources содержит массив функций распределения объема для каждого состояния. А операция calculateVolume(...) используется для генерации случайной величины объема по соответствующей текущему состоянию случайной среды функции распределения.

Класс Service представляет собой реализацию пула серверов, отвечает за хранение массива заявок и моделирование процессов их обслуживания. Метод addRequest(...) принимает текущее время и состояние среды, генерирует для заявки время завершения обслуживания, распределенное по экспоненциальному закону с параметром зависящем от состояния среды, а также вызывает метод calculateVolume(...) у класса ResourceSystem для генерации объема ресурса для этой же заявки, затем добавляет заявку в массив. Операция findNearestTime(...) находит среди всех заявок в пуле такую, которая имеет ближайшее к текущему время завершения обслуживания, и возвращает это время как результат. Операция onStateChange(...) должна вызываться классом Model, когда происходит смена состояния среды. В этом случае необходимо для каждой заявки переопределить время завершения обслуживания и выделить ресурс заново в соответствии с текущим состоянием среды. Операция serveRequests() удаляет из массива заявку с наименьшим временем завершения обслуживания. Операция getTotalVolume(...) считает суммарный объем занимаемого ресурса и возвращает его как результат.

Класс ArrivalProcess представляет собой пуассоновский поток поступающих заявок с интенсивностью зависящей от состояния случайной среды. Операция calculateTime(...) генерирует время прихода следующей заявки в систему.

Класс Model представляет систему в целом и отвечает за обработку событий, сбор статистики. Метод simulate(...) принимает количество событий, которые будут отработаны во время симуляции; сравнивает время наступления различных событий и запускает соответствующий сценарий, добавляет в статистику текущее значение суммарного объема занимаемого ресурса, после вызывает приватный метод exportToExcel(...) для экспорта результата моделирования в файл формата MS Excel. Диаграмма последовательностей для метода simulate(...) представлена на рисунке 5.

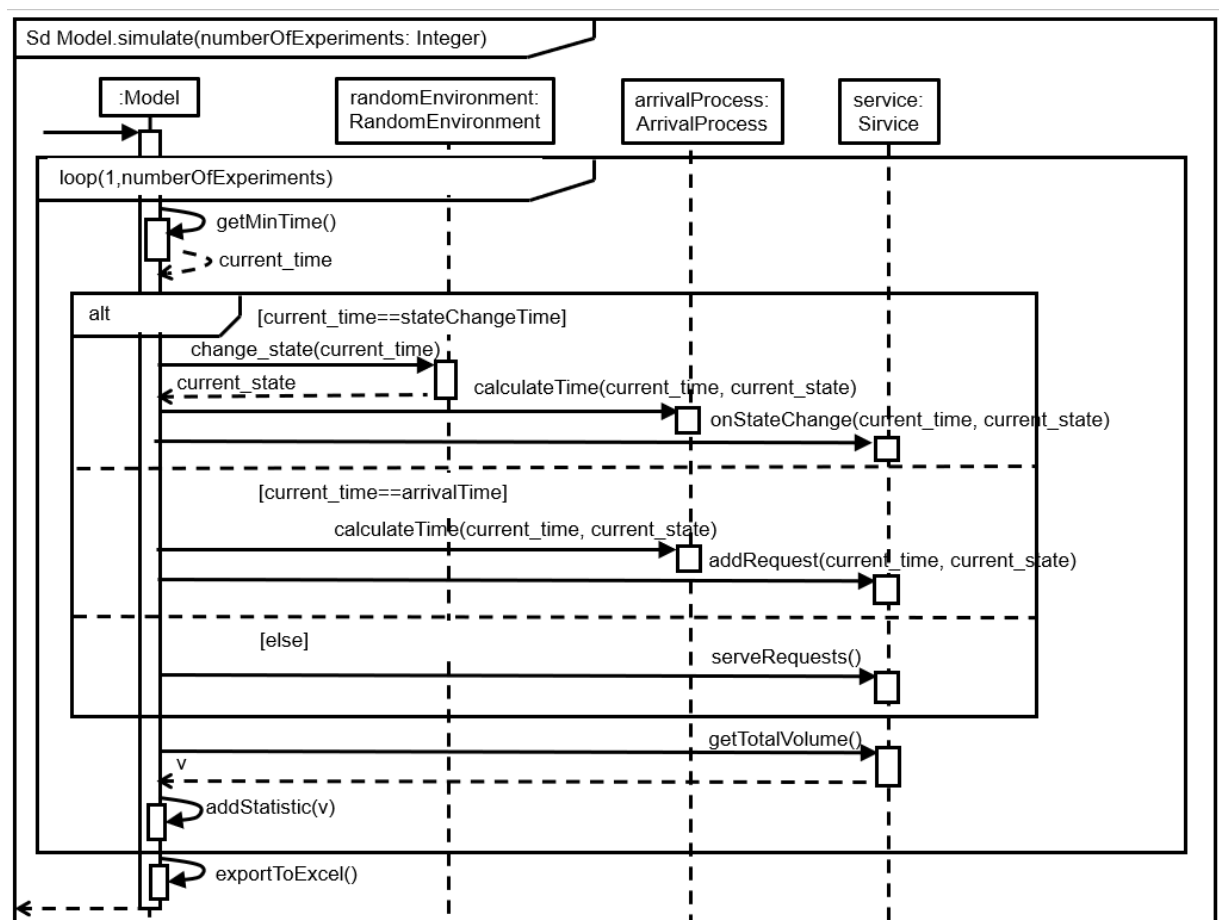
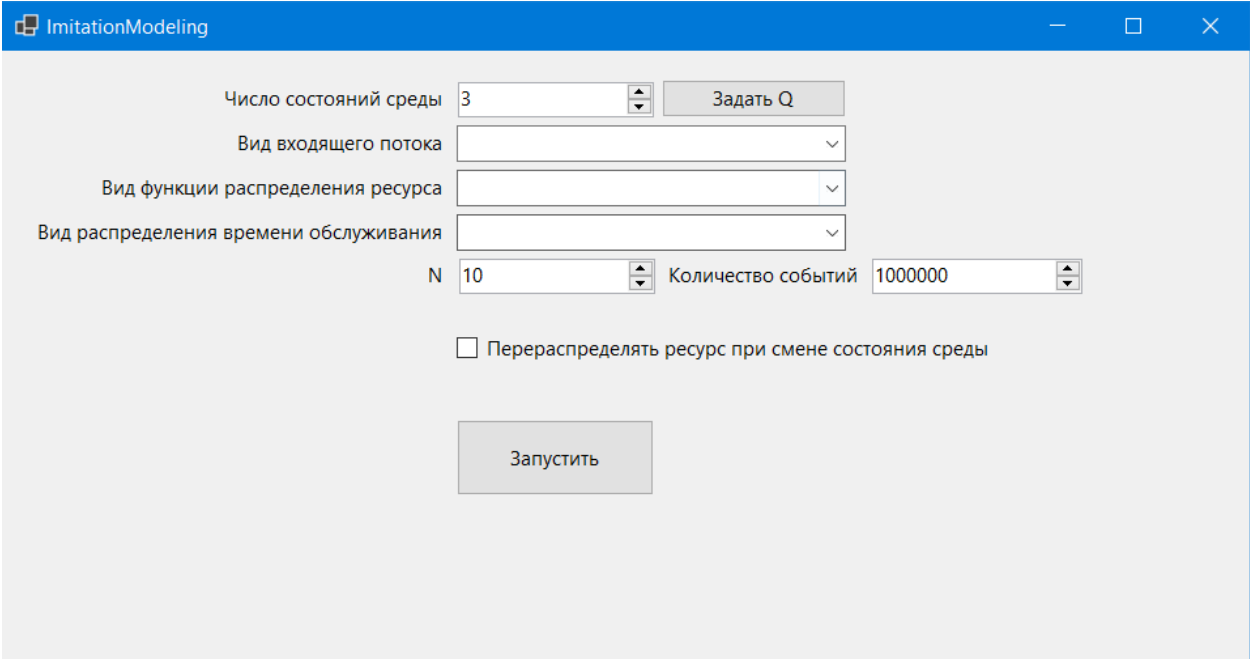


Рисунок 5 – Метод simulate(...) класса Model

4.2 Руководство пользователя

В главном окне программы (рисунок 6) задаются параметры моделируемой системы.

Таким образом, в начале на главной форме вводится количество состояний случайной среды.



The screenshot shows the main window of the 'ImitationModeling' application. The window has a blue title bar with the application name and standard Windows window controls. The main area is light gray and contains several input fields and buttons. At the top, there is a label 'Число состояний среды' (Number of states of the environment) with a numeric input field containing the value '3' and a 'Задать Q' (Set Q) button. Below this are three dropdown menus labeled 'Вид входящего потока' (Type of incoming flow), 'Вид функции распределения ресурса' (Type of resource distribution function), and 'Вид распределения времени обслуживания' (Type of service time distribution). Further down, there is a label 'N' with a numeric input field containing '10', followed by the label 'Количество событий' (Number of events) with a numeric input field containing '1000000'. Below these fields is a checkbox labeled 'Перераспределять ресурс при смене состояния среды' (Redistribute resource when the state of the environment changes). At the bottom center, there is a large 'Запустить' (Run) button.

Рисунок 6 – Главное окно программы имитационного моделирования

Далее, нажав на кнопку «Задать Q», пользователь попадет на форму для заполнения инфинитезимальной матрицы Q цепи Маркова, определяющей случайную среду (рисунок 7).

-3	1	2
1	-2	1
2	2	-4

Save

Рисунок 7 – Форма заполнения инфинитезимальной матрицы Q

Заполнив форму и нажав на кнопку «Save», пользователь вернется на главную форму, а введенные им данные будут сохранены.

После того, как пользователь выберет вид входящего потока (рисунок 8), он сможет настроить параметры выбранного потока, нажав на появившуюся кнопку.

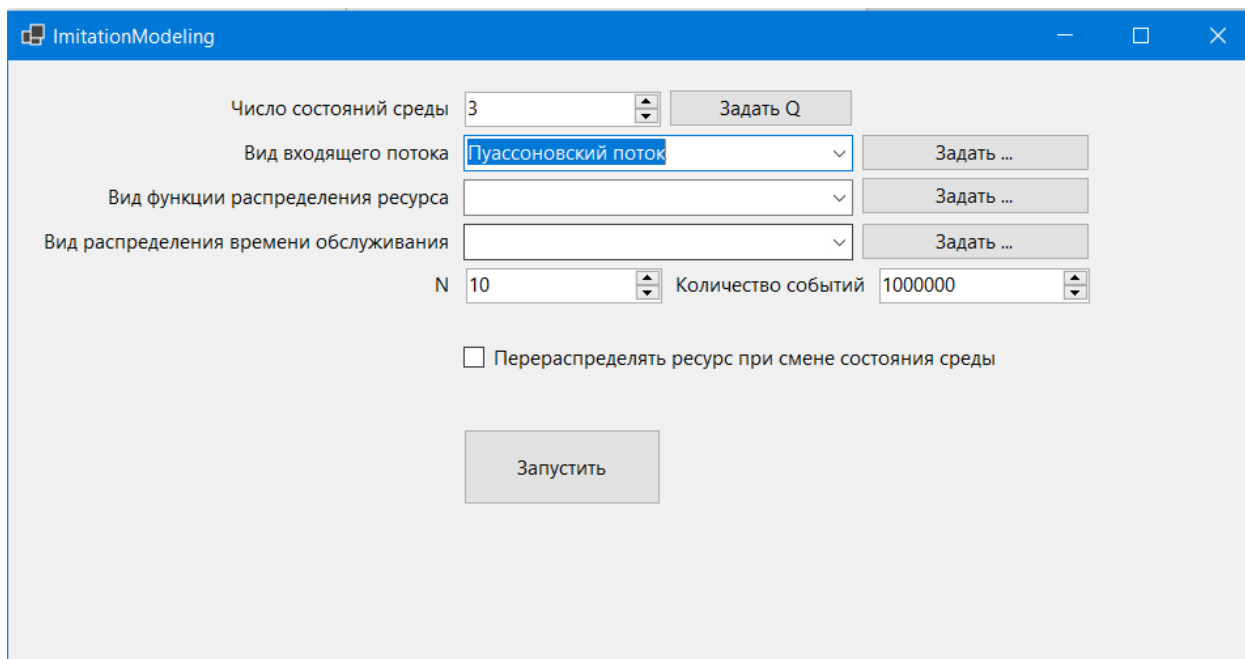


Рисунок 8 – Выбор вида входящего потока на главной форме приложения

То же относится к функциям распределения ресурса и времени обслуживания (рисунок 9 и рисунок 10)

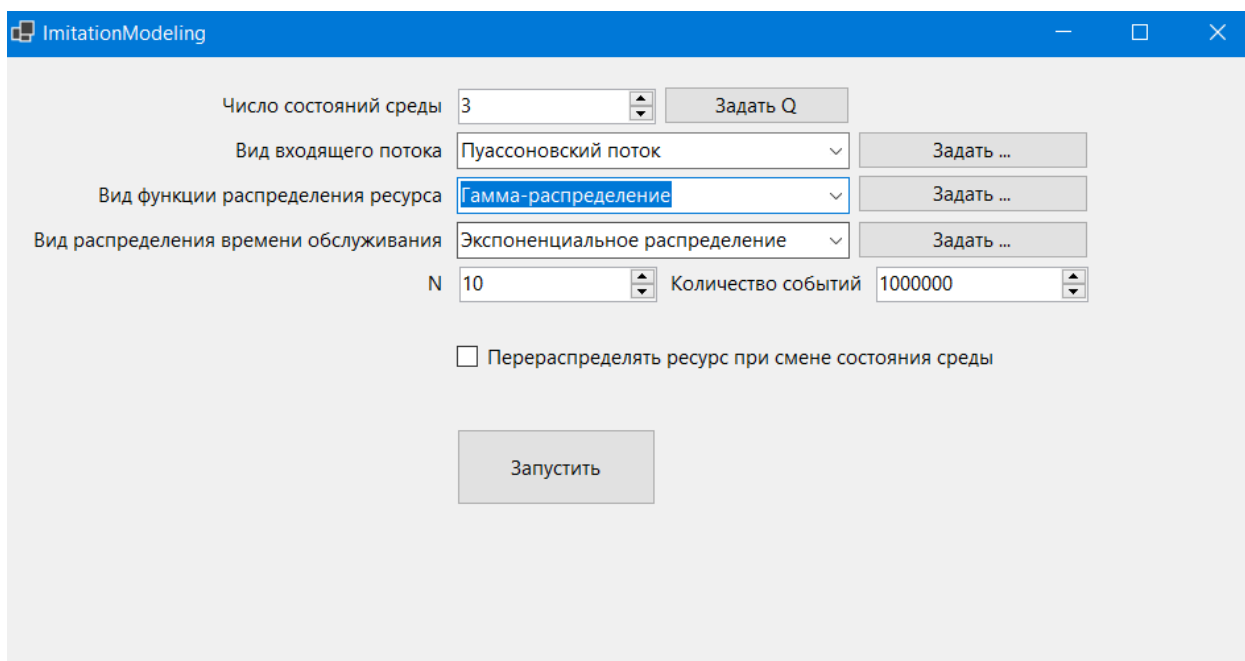


Рисунок 9 – Главная форма приложения при выбранных видах функций

The screenshot shows a window titled "Form3" with two input sections. The "alpha" section has a table with two rows: the first row contains "1,5" and "2", and the second row is empty. The "beta" section has a table with two rows: the first row contains "0,5" and "1,5", and the second row is empty. Below the "alpha" table is a "save" button.

alpha	
1,5	2

beta	
0,5	1,5

save

Рисунок 10 – Форма заполнения параметров гамма-функций

Пользователю предлагается задать параметр аппроксимации N и количество событий, которые будут обработаны за время симуляции, а также установить будет ли при смене состояния среды перераспределяться ресурс для заявок, находящихся в обслуживании.

При нажатии кнопки «Запустить» будет проведена симуляция с введенными параметрами, собранная статистика по суммарному объему занимаемого ресурса будет выведена в файл формата MS Excel, там же строится график распределения суммарного объема занимаемого ресурса (рисунок 11).

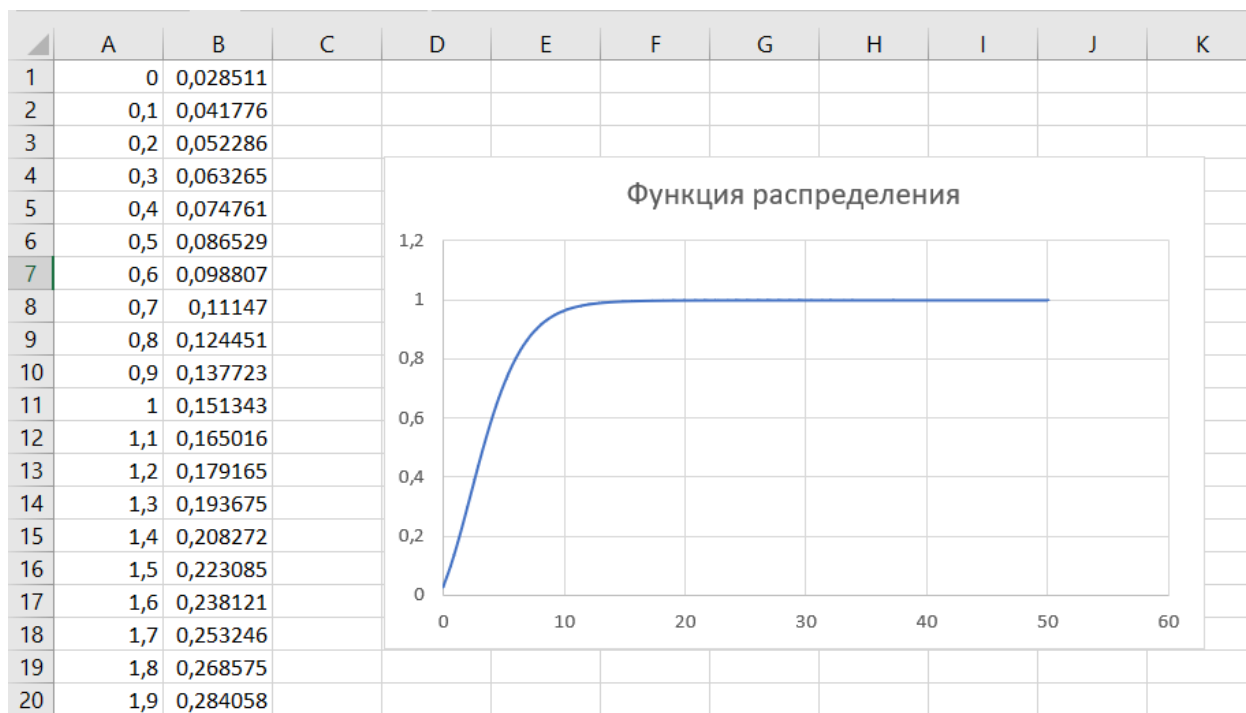


Рисунок 11 – Результат работы программы

5 Численный анализ результатов

5.1 Точность имитационной модели

Точность имитационной модели будем оценивать на основе вычисления расстояния Колмогорова между функциями распределения суммарного объема занимаемого ресурса, полученными в ходе имитационного моделирования. Для этого программа запускается несколько раз при одинаковых параметрах:

$$\mathbf{\Lambda} = N \cdot \text{diag}\{0, 1; 1; 10\},$$

$$\mathbf{M} = \text{diag}\{0, 95; 2; 7, 3\},$$

$$\mathbf{Q} = N \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$N = 4.$$

В качестве функций распределения занимаемого объема ресурса взято гамма-распределение с параметрами

$$\boldsymbol{\alpha} = [0, 5; 1, 5; 2], \quad \boldsymbol{\beta} = [0, 5; 1, 5; 2].$$

Количество экспериментов в каждой симуляции равняется $6 \cdot 10^6$. При заданных параметрах вычисляется расстояние Колмогорова между функциями распределения суммарного объема занимаемого ресурса, полученными в ходе симуляций $\hat{F}_i(v)$, где i – порядковый номер симуляции:

$$\Delta_{ij} = \sup_{v \geq 0} |\hat{F}_i(v) - \hat{F}_j(v)|.$$

После этого находим его максимальное значение. В нашем случае оно составило 0,00104 для случая, когда при смене состояния среды, ресурс

перезанимается заново, и 0,00109 для случая, когда перераспределения не происходит.

5.2 Определение области применимости асимптотических результатов

Для определения области применимости проведем численный эксперимент. Для этого будем сравнивать эмпирические распределения суммарного объема занимаемого ресурса, полученные в ходе работы программы имитационного моделирования $\hat{F}(v)$, и полученные в главах 1 и 2 аппроксимации. В качестве метрики используем расстояние Колмогорова

$$\Delta = \sup_{v \geq 0} |F(v) - \hat{F}(v)|.$$

5.2.1 Система с перераспределением ресурса

Сравним эмпирическое распределение с аппроксимацией (1.3), полученной в Главе 1. При описанных в главе 5.1 параметрах с перераспределением ресурса, в случае смены состояния среды, провели серию экспериментов при разных значениях асимптотического параметра N . Полученные расстояния Колмогорова приведены в таблице 5.1. Сравнение эмпирического и асимптотического распределений изображено на рисунке 12

Таблица 5.1 – Расстояния Колмогорова между эмпирическим и асимптотическим распределениями при различных значениях N

N	3	4	5	7	10
Δ	0.052	0.044	0.042	0.034	0.030

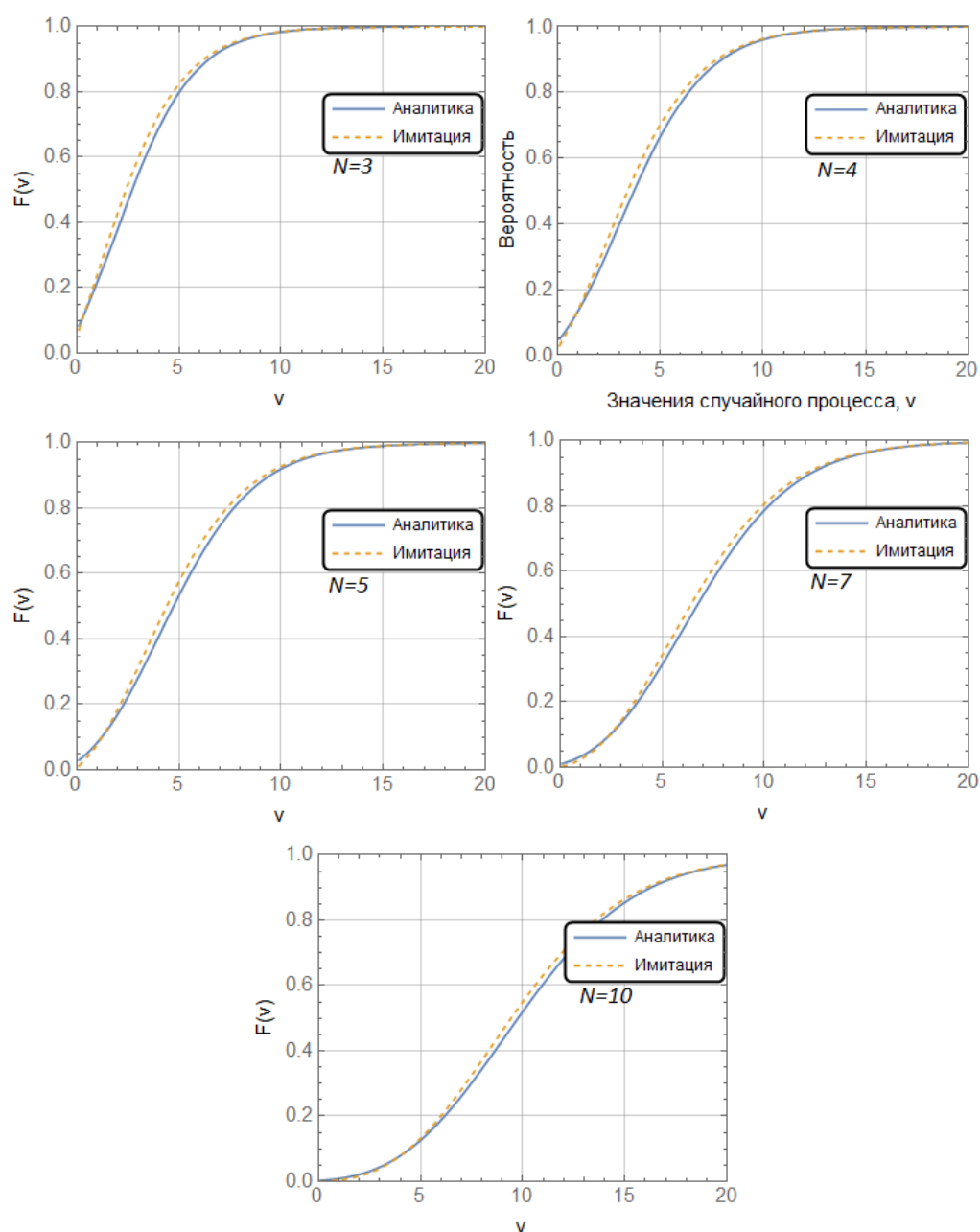


Рисунок 12 – Сравнение эмпирического (сплошная линия) и асимптотического (пунктирная линия) распределений при разных значениях N

Легко заметить, что расстояние Колмогорова уменьшается с ростом асимптотического параметра N . Таким образом, если принять погрешность $\Delta \leq 0.05$ аппроксимация (1.3) становится применима при $N \geq 4$.

5.2.2 Система без перераспределения ресурса

Проведем серию экспериментов при следующих параметрах

$$\mathbf{Q} = N \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Lambda} = N \cdot \text{diag}\{0, 1; 1; 10\}.$$

В качестве функции распределения времени обслуживания заявки возьмем гамма-распределение с параметрами

$$\boldsymbol{\alpha} = [1, 9; 0, 5; 0, 4], \quad \boldsymbol{\beta} = [2; 1; 3].$$

А для распределения занимаемого объема ресурса примем гамма-распределение с параметрами

$$\boldsymbol{\alpha} = [0, 5; 1, 5; 2], \quad \boldsymbol{\beta} = [0, 5; 1, 5; 2].$$

При смене состояния среды ресурс не будет перераспределяться заново, для заявок, которые уже находятся в обслуживании.

Сравним эмпирическое распределение с аппроксимацией (2.19), полученной в Главе 2 при разных значениях асимптотического параметра N . Полученные расстояния Колмогорова приведены в таблице 5.2. Сравнение эмпирического и асимптотического распределений изображено на рисунке 13

Таблица 5.2 – Расстояния Колмогорова между эмпирическим и асимптотическим распределениями при различных значениях N

N	5	10	15	20	25	50	100
Δ	0.085	0.061	0.051	0.045	0.041	0.033	0.023

Легко заметить, что расстояние Колмогорова уменьшается с ростом асимптотического параметра N . Таким образом, если принять погрешность $\Delta \leq 0.05$ аппроксимация (2.19) становится применима при $N \geq 20$.

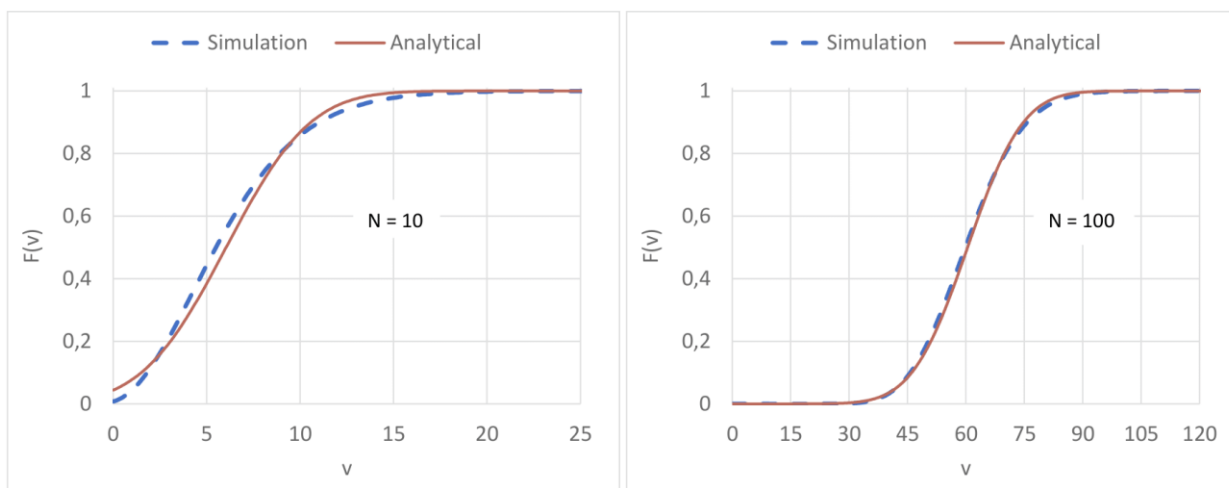


Рисунок 13 – Сравнение эмпирического (сплошная линия) и асимптотического (пунктирная линия) распределений при разных значениях N

5.3 Вычисление вероятности переполнения ресурса

Основным практическим интересом данной работы является нахождение вероятности того, что при определенных параметрах ресурс превысит определенное значение.

Рассмотрим модель без перераспределения ресурса при параметрах, описанных в Главе 5.2.2 при $N=25$. В ней будем изменять математическое ожидание распределения времени обслуживания для первого состояния среды m_{q_1} при фиксированном параметре формы, то есть изменяя только параметр масштаба. Найдем вероятности, того, что суммарный объем ресурса в системе превысит фиксированное значение R . Установим данное значение равным 25. Полученные результаты приведены в таблице 5.3, а также отображены на рисунке 14.

Таблица 5.3 – Вероятности переполнения ресурса

m_{q1}	m_2	K_{22}	Вероятность переполнения ресурса
1	0,592982	1,372906	0,041207
1,20	0,599298	1,388089	0,044516
1,40	0,605614	1,403198	0,047988
1,60	0,61193	1,418253	0,051624
1,80	0,618246	1,433267	0,055426
2,00	0,624561	1,44825	0,059396
2,50	0,640351	1,485608	0,070058
3,00	0,65614	1,522867	0,081776
3,50	0,67193	1,560063	0,09454
4,00	0,687719	1,597213	0,108327
...	...	...	...
8,00	0,814035	1,89367	0,249618

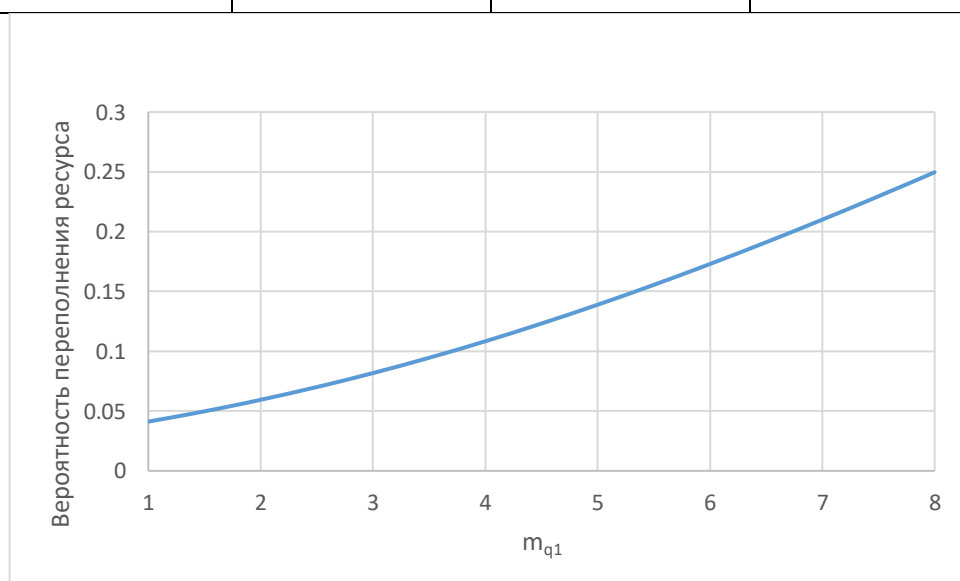


Рисунок 14 – Распределение вероятности переполнения ресурса

Заключение

В работе были рассмотрены ресурсные системы массового обслуживания, функционирующие в случайной среде. Для модели с перераспределением ресурса была получена аппроксимация характеристической функции распределения суммарного объема занимаемого ресурса в условии растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояния среды. На ее основе была выведена асимптотическая функция распределения суммарного объема занимаемого ресурса в стационарном режиме. Для модели без перераспределения ресурса была найдена аппроксимация характеристической функции распределения суммарного объема занимаемого ресурса в условии растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояния среды, показано, что распределение суммарного объема занимаемого ресурса может быть аппроксимировано гауссовским распределением. В программе Mathcad для модели с перераспределением ресурса было получено распределение суммарного объёма занимаемого ресурса, для модели без перераспределения ресурса были найдены параметры гауссовской аппроксимации. Было спроектировано и реализовано приложение для имитационного моделирования ресурсных систем массового обслуживания, функционирование которых зависит от состояния случайной среды с возможность выбора опции перераспределения ресурса при смене состояния среды. Также были проведены численные эксперименты, в результате которых были оценены, погрешности аппроксимаций и выявлены их области применимости. В качестве примера задачи, решаемой с использованием полученных результатов, для модели без перераспределения ресурса была рассмотрена задача нахождения вероятности переполнения ресурса. Таким образом, все задачи выполнены, цель работы достигнута.

Результаты данных исследований были представлены на 3 международных конференциях, опубликованы в 2 работах, в том числе 1 – в изданиях, индексируемых Scopus [14, 15].

Литература

1. Моисеев А.Н., Синяков М.В. Разработка объектно-ориентированной модели системы имитационного моделирования процессов массового обслуживания // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1 (10). С. 89–94.
2. Назаров А.А., Баймеева Г.В. Исследование системы $M/M/\infty$ в полумарковской случайной среде // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 11/3. С. 198–204.
3. Cordeiro, J., Kharoufeh, J. The Unreliable $M/M/1$ Retrial Queue in a Random Environment // Stochastic Models. 2013. Vol. 28. P. 29–48.
4. D'Auria, B. $M/M/\infty$ queues in semi-Markovian random environment // Queueing Systems. 2008. Vol. 58. P. 221–237.
5. D'Auria, B. Stochastic decomposition of the $M/G/\infty$ queue in a random environment // Operations Research Letters. 2007. Vol. 35. P. 805–813.
6. Lisovskaya, E., Moiseev, A., Moiseeva, S., Pagano, M. Modeling of Mathematical Processing of Physics Experimental Data in the Form of a Non-Markovian Multi-Resource Queuing System // Russian Physics Journal. 2019. Vol. 62. P. 2188–2196.
7. Liu, Z., Yu, S. The $M/M/C$ queueing system in a random environment // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2016. Vol. 436, Iss. 2. P. 556–567.
8. Naoumov, V., Samuilov, K., Samuilov, A. On the total amount of resources occupied by serviced customers // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77. P. 1419–427.
9. Sophia, S. Praba, B. Steady-state behavior of an $M/M/1$ queue in random environment subject to system failures and repairs // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2015. Vol. 102. P. 267–279.

10. Sopin, E., Vikhrova, O., Samouylov, K. LTE network model with signals and random resource requirements // 2017 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), Munich, 2017. P. 101–106.
11. Tikhonenko, O. Queuing system with processor sharing and limited resources // Automation and Remote Control. 2010. Vol. 72. P. 803–815.
12. Moiseev, A., Nazarov, A.: Queueing network MAP – $(GI/\infty)^K$ with high-rate arrivals. European Journal of Operational Research 254(1), 161–168 (2016).
13. Lisovskaya, E.Y., Moiseev, A.N., Moiseeva, S.P., Pagano, M.: Modeling of mathematical processing of physics experimental data in the form of a non-markovian multi-resource queueing system. Russian Physics Journal 61(12), 2188–2196 (2019).
14. Krishtalev N., Lisovskaya E., Moiseev A. Resource Queueing System M/GI/ ∞ in a Random Environment // Lecture Notes in Computer Science. 2021. Vol. 13144. P. 211-225.
15. Krishtalev N., Lisovskaya E., Moiseev A. Resource Queueing System M/M/ ∞ in Random Environment // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь. DCCN-2021 = Distributed computer and communication networks: control, computation, communications. DCCN-2021 : материалы XXIV Международной научной конференции (20–24 сентября 2021 г., Москва, Россия). Москва: ИПУ РАН, 2021. P. 269-274. 1 электрон. опт. диск (CD-R).

Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: Кришталев Н А
Проверяющий: Кришталев Никита (krishtalevnik@gmail.com / ID: 10031206)
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://users.antiplagiat.ru>

С результатами ознакомлен *Молсеев А.Н.*

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 1
Начало загрузки: 06.06.2022 09:28:14
Длительность загрузки: 00:01:05
Корректировка от 06.06.2022 09:48:44
Имя исходного файла: КришталевВКР.docx
Название документа: КришталевВКР
Размер текста: 1 кБ
Символов в тексте: 41319
Слов в тексте: 4423
Число предложений: 293

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 06.06.2022 09:29:20
Длительность проверки: 00:01:46
Комментарии: не указано
Поиск с учетом редактирования: да
Модули поиска: ИПС Адилет, Библиография, Сводная коллекция ЭБС, Интернет Плюс, Сводная коллекция РГБ, Цитирование, Переводные заимствования (RuEn), Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu), Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (KkRu), Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (KyRu), Переводные заимствования по Интернету (EnRu), Переводные заимствования по Интернету (KkRu), Переводные заимствования по Интернету (KyRu), Переводные заимствования (KkEn), Переводные заимствования (KyEn), Переводные заимствования издательства Wiley (RuEn), eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ, Медицина, Диссертации НББ, Перефразирования по eLIBRARY.RU, Перефразирования по Интернету, Перефразирования по коллекции издательства Wiley, Патенты СССР, РФ, СНГ, СМИ России и СНГ, Шаблонные фразы, Кольцо вузов, Издательство Wiley, Переводные заимствования



ЗАИМСТВОВАНИЯ
17,65%

САМОЦИТИРОВАНИЯ
0%

ЦИТИРОВАНИЯ
8,2%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
74,15%

Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа.
Самоцитирования — доля фрагментов текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа, по отношению к общему объему документа.
Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.
Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объему документа.
Заимствования, самоцитирования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.
Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Источник	Актуален на	Модуль поиска	Комментарии
[01]	2,43%	Асимптотические методы исследования ресурсных СМО с непуассоновскими входящими потоками http://ams.tsu.ru	02 Окт 2018	Интернет Плюс	
[02]	0%	Асимптотические методы исследования ресурсных СМО с непуассоновскими входящими потоками http://ams.tsu.ru	01 Дек 2020	Интернет Плюс	
[03]	7,24%	не указано	13 Янв 2022	Библиография	
[04]	0,17%	Диссертация на тему «Асимптотические методы исследования ресурсных СМО с непуассоновскими входящими потоками», скачать бесплатно автореферат по специальности ВАК РФ 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ https://dissercat.com	18 Окт 2020	Интернет Плюс	
[05]	2,85%	https://esu.citis.ru/dissertation/3cqN000KCwg515JGbE2clb00 https://esu.citis.ru	20 Мар 2018	Интернет Плюс	
[06]	0,14%	http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/services/Download/vtls:000644348/SO URCE1 (2/2) http://vital.lib.tsu.ru	24 Янв 2020	Интернет Плюс	
[07]	0,79%	http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/services/Download/vtls:000668711/SO URCE1 (2/2) http://vital.lib.tsu.ru	13 Мар 2020	Интернет Плюс	
[08]	0,09%	Скачать полнотекстовую версию http://journals.tsu.ru	30 Дек 2019	Интернет Плюс	
[09]	0,39%	http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/services/Download/vtls:000661775/SO URCE1 (2/2) http://vital.lib.tsu.ru	24 Янв 2020	Интернет Плюс	
Диссертация на тему «Разработка методов исследования					

[10]	0,15%	математических моделей немарковских систем обслуживания с неограниченным числом приборов и непуассоновскими входящими потоками», скачать бесплатно автореферат по специальности ВАК РФ 05.13.18 - Матема... https://dissercat.com	11 Фев 2021	Интернет Плюс
[11]	0%	Диссертация на тему «Разработка методов исследования математических моделей немарковских систем обслуживания с неограниченным числом приборов и непуассоновскими входящими потоками», скачать бесплатно автореферат по специальности ВАК РФ 05.13.18 - Матема... https://dissercat.com	28 Мар 2021	Интернет Плюс
[12]	0,23%	http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/services/Download/vtls:000661797/SO URCE1 http://vital.lib.tsu.ru	27 Янв 2020	Интернет Плюс
[13]	2,35%	Лисовская, Екатерина Юрьевна Асимптотические методы исследования ресурсных СМО с непуассоновскими входящими потоками : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 05.13.18 Томск 2018 http://dlib.rsl.ru	22 Фев 2019	Сводная коллекция РГБ
[14]	2,48%	BKP_Cyбач-2.docx	11 Июн 2021	Кольцо вузов
[15]	0%	VKR_Subach-2.docx	16 Июн 2021	Кольцо вузов
[16]	0%	VKR_Subach-2-2.docx	17 Июн 2021	Кольцо вузов
[17]	0%	Диплом Беляк.pdf	17 Июн 2021	Кольцо вузов
[18]	0,58%	3334-5355-1-SM.pdf	22 Июл 2021	Кольцо вузов
[19]	0%	BKP_Cyбач.docx	26 Янв 2022	Кольцо вузов
[20]	0,23%	https://lib.tsu.ru/win/produkcija/metodichka/pril1.pdf https://lib.tsu.ru	25 Мая 2022	Интернет Плюс
[21]	0%	Суммарный объем занятого ресурса в системе с параллельным обслуживанием и входящим ММРР-потоком – тема научной статьи по математике читайте бесплатно текст научно-исследовательской работы в электронной библиотеке КиберЛенинка https://cyberleninka.ru	06 Июн 2022	Интернет Плюс
[22]	0%	Полнотекстовая версия журнала (PDF-файл, 3,3 Mb) (2/2) http://ipiran.ru	23 Мая 2018	Интернет Плюс
[23]	0,94%	Моисеев, Александр Николаевич Исследование математических моделей систем и сетей массового обслуживания с высокоинтенсивными непуассоновскими входящими потоками : диссертация ... доктора физико-математических наук : 05.13.18 Томск 2016 http://dlib.rsl.ru	27 Дек 2019	Сводная коллекция РГБ
[24]	0,11%	TOWARDS THE ANALYSIS OF THE QUEUEING SYSTEM OPERATING IN THE RANDOM ENVIRONMENT WITH RESOURCE ALLOCATION https://yandex.ru	21 Авг 2019	Интернет Плюс
[25]	0%	http://konfpmfi.omgtu.ru/wp-content/uploads/Prezentatsia_Bushkova_Omsk.pdf http://konfpmfi.omgtu.ru	10 Июн 2021	Интернет Плюс
[26]	0%	Суммарный объем занятого ресурса в системе с параллельным обслуживанием и входящим ММРР-потоком. http://elibrary.ru	23 Сен 2020	eLIBRARY.RU
[27]	0%	Численный анализ суммарного объема занятого ресурса на блоках системы с параллельным обслуживанием и входящим ММРР-потоком. http://elibrary.ru	12 Мар 2019	eLIBRARY.RU
[28]	0,96%	не указано	13 Янв 2022	Шаблонные фразы
[29]	0%	Асимптотический анализ многофазной бесконечнолинейной ресурсной системы массового обслуживания с входящим ММРР потоком. http://elibrary.ru	15 Янв 2018	eLIBRARY.RU
[30]	0,49%	Исследование бесконечнолинейных СМО с групповым обслуживанием. http://elibrary.ru	12 Мар 2019	eLIBRARY.RU
[31]	0%	Кирилина, преддиплом. практика	10 Мая 2021	Кольцо вузов
[32]	0,02%	http://os-russia.com/SBORNIKI/RF-KON-4.pdf http://os-russia.com	12 Окт 2020	Интернет Плюс
[33]	0,17%	https://nauchkor.ru/uploads/documents/5f43e9ebcd3d3e0001583baf.pdf https://nauchkor.ru	24 Мая 2022	Интернет Плюс
[34]	0%	Национальное Общество Имитационного Моделирования : Статьи 2010 года (А...Я) http://simulation.su	25 Мар 2019	Интернет Плюс
[35]	0,51%	Ресурсные системы массового обслуживания с произвольным обслуживанием. http://elibrary.ru	25 Янв 2019	eLIBRARY.RU

[36]	0%	Distribution sensitivity in a highway flow model https://doi.org	30 Ноя 2009	Перефразирования по коллекции издательства Wiley
[37]	0,76%	Исследование бесконечнолинейных СМО с групповым обслуживанием. http://elibrary.ru	12 Мар 2019	Перефразирования по eLIBRARY.RU
[38]	0%	https://events.sci.pfu.edu.ru/event/45/attachments/84/290/itmm-2020.pdf https://events.sci.pfu.edu.ru	18 Мая 2022	Интернет Плюс
[39]	0,13%	http://media-publisher.ru/wp-content/uploads/2017/05/%D0%A1%D0%91%D0%9E%D0%A0%D0%9D%D0%98%D0%A-%D0%A2%D0%A0%D0%A3%D0%94%D0%9E%D0%92-%D0%A2%D0%98%D0%9E-2018-%D0%A2%D0%9E%D0%9C-2.pdf http://media-publisher.ru	16 Апр 2020	Интернет Плюс
[40]	0%	Труды Томского государственного университета. – Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы II Всероссийской молодежной научной конференции. Томск, 16–17 мая 2014 г. Т https://e.lanbook.com	22 Янв 2020	Сводная коллекция ЭБС
[41]	0%	Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем. Материалы II Всероссийской молодежной научной конференции. Томск, 16–17 мая 2014 г. http://bibliorossica.com	26 Мая 2016	Сводная коллекция ЭБС
[42]	0%	68277 http://e.lanbook.com	09 Мар 2016	Сводная коллекция ЭБС
[43]	0%	Мокров, Евгений Владимирович Построение моделей и анализ показателей эффективности системы доступа со случайными требованиями к ресурсам беспроводной сети : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 05.13.17 Москва 2018 http://dlib.rsl.ru	01 Янв 2018	Сводная коллекция РГБ
[44]	0%	Вагнер, Дмитрий Викторович Высокочастотные электромагнитные характеристики композиционных радиоматериалов на основе гексагональных ферритов : диссертация ... кандидата технических наук : 01.04.03 Томск 2019 http://dlib.rsl.ru	27 Дек 2019	Сводная коллекция РГБ
[45]	0%	Семенова, Инна Анатольевна диссертация ... кандидата физико-математических наук : 05.13.18 Томск 2012 http://dlib.rsl.ru	раньше 2011	Сводная коллекция РГБ
[46]	0%	Бесчастный, Виталий Александрович Исследование показателей эффективности обслуживания трафика в беспроводных мобильных сетях с многоадресными соединениями : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 05.13.17 Москва 2020 http://dlib.rsl.ru	16 Июн 2021	Сводная коллекция РГБ
[47]	0,18%	https://tspu.ru/upload/iblock/488/4880713d42b29096a469e11358198c35.pdf https://tspu.ru	04 Июн 2020	Интернет Плюс
[48]	0%	Моисеева, Светлана Петровна Разработка методов исследования математических моделей немарковских систем обслуживания с неограниченным числом приборов и непугассоновскими входящими потоками : диссертация ... доктора физико-математических наук : 05.13.18 То.. http://dlib.rsl.ru	12 Окт 2017	Сводная коллекция РГБ
[49]	0%	Distribution sensitivity in a highway flow model https://doi.org	30 Ноя 2009	Издательство Wiley
[50]	0%	Текст диссертации (4/4) http://education.vorstu.ru	05 Янв 2017	Перефразирования по Интернету
[51]	0,36%	Исследование системы $M M ∞$ в полумарковской случайной среде. http://elibrary.ru	06 Авг 2015	eLIBRARY.RU
[52]	0%	Чан Ань Нгиа Исследование чувствительности характеристик надёжности дублированных систем в случайной среде : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 05.13.18 Москва 2015 http://dlib.rsl.ru	22 Авг 2019	Сводная коллекция РГБ
[53]	0,39%	Разработка объектно-ориентированной модели системы имитационного моделирования процессов массового обслуживания. http://elibrary.ru	12 Янв 2011	Перефразирования по eLIBRARY.RU
[54]	0,09%	https://cyberrus.com/wp-content/uploads/2019/02/29-37-428-18_4-Budko.pdf https://cyberrus.com	26 Мая 2020	Интернет Плюс
[55]	0,32%	Алгоритмы расчета характеристик некоторых классов систем массового обслуживания с коррелированными потоками http://dep.nlb.by	11 Ноя 2016	Диссертации НББ
[56]	0,29%	Горбатенко, Анна Евгеньевна диссертация ... кандидата физико-математических наук : 05.13.18 Томск 2010 http://dlib.rsl.ru	раньше 2011	Сводная коллекция РГБ
[57]	0%	Инженерные и научные приложения на базе технологий NI NIDays – 2014 https://e.lanbook.com	22 Янв 2020	Сводная коллекция ЭБС
[58]	0%	Machine Learning for the Diagnosis of Parkinson's Disease: A Review of Literature	06 Мая 2021	СМИ России и СНГ

		https://frontiersin.org			
[59]	0%	Пищинский_Павел_Алексеевич_Диплом.pdf	30 Мая 2017	Кольцо вузов	
[60]	0%	Фицов_канд_дис_Модели и методы проектирования сетевой архитектуры глубокой инспекции пакетов	24 Мая 2021	Кольцо вузов	
[61]	0%	Об оценке качества оптического потока для обнаружения препятствий. http://elibrary.ru	01 Фев 2021	eLIBRARY.RU	
[62]	0%	Planare Mehrfrequenzantenne - Fraunhofer-Gesellschaft zur Förderung der angewandten Forschung e.V., 80686 http://freepatentsonline.com	07 Ноя 2016	Патенты СССР, РФ, СНГ	
[63]	0%	RAND - STEG: an integer wavelet transform domain digital image random steganography using knight's tour https://doi.org	10 Сен 2015	Издательство Wiley	
[64]	0%	An integrated framework for wireless sensor network management https://doi.org	25 Авг 2014	Издательство Wiley	
[65]	0%	An efficient and adaptive channel handover procedure for cognitive radio networks https://doi.org	25 Фев 2015	Издательство Wiley	
[66]	0%	Cooperative communications using relay nodes for next-generation wireless networks with optimal selection techniques: A review https://doi.org	31 Мая 2019	Издательство Wiley	
[67]	0%	https://postgraduate.tusur.ru/system/file_copies/files/000/002/511/original/dissertadya_Barysheva.pdf https://postgraduate.tusur.ru	13 Apr 2022	Интернет Плюс	
[68]	0%	Научный журнал ФилФ ТГУ поднялся до Q1 в базе данных Scopus https://tsu.ru	06 Июнь 2022	Интернет Плюс	
[69]	0%	Базылев, Дмитрий Николаевич Адаптивные алгоритмы оценивания переменных состояния электромеханических систем : диссертация ... кандидата технических наук : 05.13.01 Санкт-Петербург 2018 http://dlib.rsl.ru	22 Фев 2019	Сводная коллекция РГБ	
[70]	0%	diplom_pred2	12 Июнь 2018	Кольцо вузов	
[71]	0%	https://elib.bsu.by/bitstream/123456789/241087/1/57-70.pdf https://elib.bsu.by	06 Июнь 2022	Интернет Плюс	
[72]	0%	Интегральные преобразования для уравнений математической физики в примерах и задачах. Применение интегрального преобразования Фурье - Интегральные преобразования уравнений матфизики https://studbooks.net	06 Июнь 2022	Интернет Плюс	Источник исключен. Причина: Маленький процент пересечения.
[73]	0%	http://rmebrk.kz/journals/3432/67673.pdf http://rmebrk.kz	03 Июнь 2022	Интернет Плюс	Источник исключен. Причина: Маленький процент пересечения.
[74]	0%	Dashboard, индикаторные панели [Реферат №9111] https://evkova.org	06 Июнь 2022	Интернет Плюс	Источник исключен. Причина: Маленький процент пересечения.