Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Физический факультет

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
д-р физ.-мат. наук, доцент

_____ О.Н. Чайковская
подпись
«_17_» ___июня___ 2021 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

БЕЗМАССОВАЯ СПИНОВАЯ ЧАСТИЦА С НЕПРЕРЫВНОЙ СПИРАЛЬНОСТЬЮ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

по направлению подготовки 03.04.02 Физика
направленность (профиль) «Фундаментальная и прикладная физика»

Ретунцев Иван Алексеевич

Руководитель ВКР
д-р физ.-мат. наук, профессор

_____С. Л. Ляхович
подпись
«_17_» ___июня___ 20_21_ г.

Консультант
канд. физ.-мат. наук

_____Д. С. Капарулин
подпись
«_17_» ___июня___ 20_21_ г.

Автор работы
студент группы № 051941

_____ И. А. Ретунцев
подпись
«_17_» ___июня___ 20_21_ г.

Томск – 2021

АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается классическая неприводимая безмассовая спиновая частица с непрерывной спиральностью. Такая частица имеет внутренние степени свободы и на квантовом уровне на ее пространстве состояний действует неприводимое унитарное представление группы Пуанкаре нулевой массы и ненулевого спина. Ставится задача изучить мировые листы такой частицы. Показано, что на классическом уровне множество положений частицы формирует поверхность в пространстве Минковского, называемую мировым листом. В случае трехмерного пространства эта поверхность является решением одного алгебраического уравнения, задающего параболический цилиндр с изотропной осью. Направление оси цилиндра дается импульсом частицы. Положение относительно оси и положение самой оси в пространстве определяется импульсом, полным угловым моментом и параметром модели, который связан с представлением группы Лоренца на пространстве внутренних степеней свободы. Фокусное расстояние совпадает со значением спина частицы. Были получены выражения, позволяющие обратно записать импульс и полный угловой момент частицы через параметры мирового листа, что в купе с вышесказанным позволяет интерпретировать безмассовую спиновую частицу с непрерывной спиральностью как параболический цилиндр с изотропной осью, а множество состояний такой частицы с различными импульсами и полными угловыми моментами как множество таких цилиндров. Затем было получено обыкновенное дифференциальное уравнение с высшими производными на траекторию частицы. Это уравнение носит чисто геометрический характер, то есть не вовлекает переменных, описывающих внутренние степени свободы. Система геометрических уравнений является нелагранжевой, но приводится к таковой после введения вспомогательных полей. Построенное гамильтоново действие имеет правильное число степеней свободы и описывает движение по параболическому цилиндру. Также был найден явный вид изотропной кривой, лежащей на параболическом цилиндре. В качестве

проверки полученных результатов было установлено соответствие построенной модели с уже известной моделью классической неприводимой безмассовой спиновой частицы с непрерывной спиральностью в трехмерном пространстве Минковского.

Актуальность данной работы заключается в том, что, как показывает детальный анализ, изменение сигнатуры квадрики, описывающей мировой лист значительно упрощает вывод уравнений движения, которые теперь допускают явное представление, в отличие от массивного случая. Это обстоятельство позволяет рассматривать безмассовую спиновую частицу с непрерывной спиральностью как удобную модель для исследования концепции мирового листа. А наличие гамильтоновой формулировки в купе с наглядностью, даваемой концепцией мирового листа, дают возможность ставить задачу о включение взаимодействия с различными полями, например электромагнитным и гравитационным. Еще можно добавить, что результаты исследования мировых листов имеют общий характер, и могут быть полезны для проверки и построения более конкретных моделей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3
1 Квантовая механика неприводимой спиновой частицы 7
2 Основные обозначения и полезные соотношения 10
3 Мировой лист 12
4 Геометрические уравнения движения 16
5 Гамильтонова формулировка 24
6 Соответствие с уже известной моделью 27
Заключение 29
Приложение 33

ВВЕДЕНИЕ

В квантовой теории под элементарной частицей понимается динамическая система, на пространстве состояний которой действует унитарное неприводимое представление группы Пуанкаре. Все такие представления классифицируются при помощи двух параметров: массы и спина. В зависимости от значения этих параметров различают массивные и безмассовые представления, а также представления с непрерывной спиральностью. Последняя опция может рассматриваться как особый вид безмассовой частицы с ненулевым значением собственного углового момента. Частицы с непрерывной спиральностью активно изучаются в последние годы, в частности, в контексте развития теории высших спинов [1], [2], [3].

Условие неприводимости группы Пуанкаре одновременно определяет уравнения движения системы. В случае динамических систем с бесконечным числом степеней свободы вывод соответствующих релятивистских волновых уравнений был сделан в 1948 г. [4]. Тогда же было установлено, что основные уравнения релятивистской квантовой теории описывают массивные и безмассовые частицы низших спинов. В случае динамической системы с конечным числом степеней свободы, обычно называемой классической спиновой частицей, задача построения уравнений движения с произвольным наперед заданным соотношением массы и спина была решена в 1996 г. в работе [5]. Большое количество частных результатов было получено ранее, например: [6], [7], [8], [9], [10]. Из более поздних можно привести в качестве примера работу [11].

Общая особенность уравнений движения классических спиновых частиц [5] и предшествующих исследований состоит в том, что конфигурационное пространство системы реализуется в виде локально тривиального расслоения, базой которого является пространство Минковского. Координаты на базы описывают положения частицы в пространстве, а внутренние переменные, принимающие значения на слоях, – спиновые степени свободы. Введение последних переменных может быть сделано разными спосо-

бами, что порождает большое разнообразие моделей спиновых частиц. В частности, известны векторные, тензорные, спинорные и твисторные модели спиновых частиц [12]. Модели спиновых частиц, в которых внутреннее пространство не вводится, называются геометрическими. В геометрических моделях динамика частицы описывается исключительно в терминах производных её траектории в пространстве Минковского.

Процедура построения геометрических уравнений, описывающих классическую частицу с произвольным значением массы и спина была предложена в 2017 г. Основная идея решения этой задачи состоит в систематическом исследовании следствий условий неприводимости группы Пуанкаре. В частности, демонстрируется, что классическая траектория спиновой частицы с необходимостью принадлежит некоторой цилиндрической поверхности в пространстве Минковского, называемой мировым листом спиновой частицы. Уравнения движения возникают из того факта, что пути частицы являются общими причинными траекториями на мировом листе. Задача построения уравнений движения массивной спиновой частицы с ненулевым значением спина в пространственно-временной размерности три и четыре решена в работах [13], [14], [15]. Было показано, что в трехмерном пространстве Минковского мировой лист массивной спиновой частицы является круговым цилиндром с времениподобной осью, а динамика системы описывается одним скалярным уравнением четвертого порядка, которое является настолько громоздким, что допускает представление только в неявном виде. В четырехмерном пространстве в дополнение появляется еще одно дифференциальное уравнение четвертого порядка – уравнение гиперплоскости.

В настоящей работе поставлена цель изучения мирового листа и уравнений движения частицы с непрерывной спиральностью в трехмерном пространстве Минковского. Мировой лист такой системы представляет собой параболический цилиндр с изотропной осью, совпадающей с направлением импульса, и фокусным расстоянием, определяемым значением спина. Как показывает детальный анализ, изменение сигнатуры квадрики, описываю-

щей мировой лист значительно упрощает вывод уравнений движения, которые теперь допускают явное представление. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать частицу с непрерывной спиральностью как удобную модель для исследования концепции мирового листа. Ценность исследования также объясняется тем, что до настоящего момента геометрических уравнений движения для частиц с непрерывной спиральностью известно не было. А наличие гамильтоновой формулировки в купе с наглядностью, даваемой концепцией мирового листа, дают возможность ставить задачу о включение взаимодействия с различными полями, например электромагнитным и гравитационным. Еще можно добавить, что результаты исследования мировых листов имеют общий характер, и могут быть полезны для проверки и построения более конкретных моделей.

Достижение цели работы требует решения следующих взаимосвязанных задач. На первом шаге исследования производится анализ следствий условий неприводимости представления группы Пуанкаре с непрерывной спиральностью и получается система алгебраических уравнений, описывающих мировой лист. На втором шаге исследования ставится задача получения системы дифференциальных уравнений, описывающих причинные траектории на мировом листе. В целях упрощения анализа, рассмотрение в работе ограничено классом времениподобных путей. Общая схема получения уравнений движения в целом следует стандартной процедуре классификации кривых, лежащих на заданном семействе поверхностей, известной в дифференциальной геометрии [16]. При расчете используется подвижный репер Френе [17] и метод результантов [18]. При этом, в отличие от путей на круговом цилиндре, уравнения движения частицы с непрерывной спиральностью допускают явное представление. Полученные геометрические уравнения являются нелагранжевыми, но с помощью расширения пространства состояний удается построить гамильтониан со связями [19], реализующий движение по мировому листу. В качестве проверки полученных результатов будет установлено соответствие с уже известной моделью такой частицы [11].

Работа организована следующим образом. Сначала будет рассмотрена квантовая механика неприводимой спиновой частицы в пространстве Минковского произвольной размерности и её следствия в классике. Затем обсуждаются основные обозначения и формулы, используемые в основной части работы. Основная часть работы состоит из следующих глав. Сначала будут получены и проанализированы уравнения мирового листа. Затем получены геометрические уравнения движения с высшими производными, описывающие динамику рассматриваемой частицы. После строится гамильтонова формулировка и показывается, что гамильтониан реализует движение по мировому листу. Предпоследняя глава посвящена установления соответствия с ранее известной моделью спиновой частицы в трехмерном пространстве Минковского. В заключении суммируются полученные в работе результаты. В приложение выносится объемная формула.

1 Квантовая механика неприводимой спиновой частицы

Рассмотрим квантовую механику свободной частицы в d-мерном пространстве Минковского с локальными координатами x^μ, $\mu = \overline{0, d-1}$ и метрикой $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, \ldots, +1)$. Действие группы Пуанкаре на пространстве физических состояний системы генерируется операторами импульса $\widehat{p}_\mu$ и полного углового момента $\widehat{J}_{\mu\nu}$. Представление группы Пуанкаре предполагается унитарным, тогда операторы $\widehat{p}_\mu, \widehat{J}_{\mu\nu}$ с необходимостью должны быть эрмитовыми. Масса m и спины $s^k, k = 2, \ldots, [(d-1)/2]$ частицы фиксируются собственными значениями операторов Казимира группы Пуанкаре

$$\widehat{p}_\mu \widehat{p}^\mu = -m^2 \widehat{1}\,, \quad C^k(p, J) = s^k \widehat{1}\,, \quad k = 2, \ldots, [(d-1)/2]\,. \tag{1}$$

Мы предполагаем, что частица является точечным объектом в пространстве Минковского, и как следствие, пространство состояний допускает представление через функции от координат частицы и, возможно, других переменных, относящихся к спиновым степеням свободы. В этом представлении, согласно квантовой теореме Нетер, импульс $\widehat{p}_\mu$ генерирует трансляции в пространстве Минковского

$$\widehat{p}_\mu x^\nu = i\hbar \delta_\mu^\nu \widehat{1}\,. \tag{2}$$

Полный угловой момент генерирует преобразования Лоренца всего пространства состояний. Поэтому полный угловой момент, можно представить в виде суммы орбитального и спинового момента

$$\widehat{J}_{\mu\nu} = \widehat{x}_\mu \widehat{p}_\nu - \widehat{x}_\nu \widehat{p}_\mu + \widehat{S}_{\mu\nu}. \tag{3}$$

В таком подходе оператор орбитального момента $\widehat{x}_\mu \widehat{p}_\nu - \widehat{x}_\nu \widehat{p}_\mu$ генерирует преобразования Лоренца пространства Минковского

$$(\widehat{x}_\mu \widehat{p}_\nu - \widehat{x}_\nu \widehat{p}_\mu) x^\sigma = (x_\mu \delta_\nu^\sigma - x_\nu \delta_\mu^\sigma) \widehat{1}. \tag{4}$$

Оператор тензора спина $\widehat{S}_{\mu\nu}$ генерирует преобразования Лоренца пространства спиновых степеней свободы и действует тривиально на состояния, зависящие только от координат на пространстве Минковского

$$\widehat{S}_{\mu\nu} f(x) = 0\,, \quad \forall f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{1,d-1}). \tag{5}$$

Можно также показать, что оператор спина коммутируют с оператором импульса

$$[\widehat{S}_{\mu\nu}, \widehat{p}_{\rho}] = 0 \tag{6}$$

и, кроме того, генерируют действие группы Лоренца на пространстве спиновых состояний частицы. Коммутационные соотношения для операторов спина совпадают с коммутационными соотношениями для генераторов представления группы Лоренца.

Для неприводимой спиновой частицы операторы $\widehat{p}_{\mu}, \widehat{J}_{\mu\nu}$ исчерпывают все физические наблюдаемые теории. Поэтому, каждая квантовая наблюдаемая может быть представлена как функция операторов импульса и полного углового момента $\widehat{F} = \widehat{F}(\widehat{p}, \widehat{J})$. В силу равенства (3) мы можем перейти к представлению наблюдаемой $F(\widehat{x}, \widehat{p}, \widehat{S})$ в терминах операторов $\widehat{x}_{\mu}, \widehat{p}_{\mu}, \widehat{S}_{\mu\nu}$, явно включающих спин. В частности, имеются наблюдаемые $G(\widehat{S})$, являющиеся функциями только операторов спина $\widehat{S}_{\mu\nu}$. Любая такая наблюдаемая, являющаяся функцией операторов Казимира группы Лоренца $C_l^L(\widehat{S}), l = 1, \ldots, [d/2]$ в силу соотношения (5), (6) коммутирует со всеми другими операторами представления

$$[G(C_l^L(\widehat{S})), \widehat{x}_{\mu}] = [G(C_l^L(\widehat{S})), \widehat{p}_{\mu}] = [G(C_l^L(\widehat{S})), \widehat{J}_{\mu\nu}] = 0\,. \tag{7}$$

Мы требуем, чтобы представление группы Пуанкаре на пространстве состояний спиновой частицы было неприводимо, тогда с необходимостью будет неприводимым представление группы Пуанкаре на пространстве Минковского и представление группы Лоренца на пространстве спиновых состояний. Тогда по лемме Шура все операторы Казимира представления группы Лоренца, действующей в пространстве состояний спина, должны быть кратны единичному оператору

$$C_l^L(\widehat{S}) = \varrho_l \widehat{1}\,, \quad l = 1, \ldots, [d/2]\,, \tag{8}$$

где ϱ_l – некоторые вещественные числа. В классическом пределе, с учетом определения спинового момента (3), условия неприводимости представления группы Лоренца на пространстве внутренних спиновых свободы определяют соотношения на возможные положения частицы с заданным импульсом и полным угловым моментом на пространстве Минковского

$$C_l^L(S(x,p,J)) = \varrho_l\,, \quad S_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} - x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu\,, \quad l = 1,\ldots,[d/2]\,, \tag{9}$$

где классический импульс и полный угловой момент частицы подчинены условиям массовой и спиновой оболочки

$$p_\mu p^\mu = -m^2\,, \quad C^k(p,J) = s^k\,, \quad k = 2,\ldots,[(d-1)/2] \tag{10}$$

и никаких других условий не возникает [13]. Для каждого выбранного классического значения $p_\mu, J_{\mu\nu}$ уравнения задают поверхность в пространстве Минковского – мировой лист спиновой частицы с заданными значениями импульса и момента импульса. Определяющие уравнения мирового листа зависят от представления, описываемого спиновой частицей, но не зависит от принятой схемы упорядочивания операторов квантовых наблюдаемых, так как все квантовые поправки в классическом пределе являются несущественными.

2 Основные обозначения и полезные соотношения

Далее мы будем изучать классическую механику в пространстве-времени и поэтому полезно обсудить обозначения, соглашения и некоторые полезные соотношения.

Мы рассматриваем трёхмерное пространство Минковского с локальными координатами $x^\mu, \mu = 0, 1, 2$. Сигнатура метрики выбирается в основном положительной

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)\,. \tag{11}$$

Все мировые индексы поднимаются и опускаются при помощи метрики Минковского. Написание индексов на разном уровне подразумевает суммирование

$$x^\mu y_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{2} x^\mu y_\mu = \sum_{\mu=0}^{2}\sum_{\nu=0}^{2} \eta_{\mu\nu}\, x^\mu y^\nu\,. \tag{12}$$

Скалярное произведение пары векторов обозначается круглыми скобками

$$(x, y) = x_\mu y^\mu\,. \tag{13}$$

Скалярное произведение является симметричным относительно перестановки аргументов

$$(x, y) = (y, x)\,. \tag{14}$$

Для скалярного квадрата вектора используется следующее специальное обозначение:

$$x^2 = (x, x)\,. \tag{15}$$

Вектор x называется времениподобным, если $x^2 < 0$; пространственноподобным, если $x^2 > 0$; изотропным, если $x^2 = 0$.

Символ Леви-Чивиты $\varepsilon_{\mu\nu\rho}$ в трёхмерном пространстве Минковского определен как полностью антисимметричный тензор со свойством

$$\varepsilon_{012} = 1\,. \tag{16}$$

Векторное произведение пары векторов введём соотношением

$$[x, y]_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho}\, x^\nu y^\rho \,. \tag{17}$$

Векторное произведение является антисимметричным относительно перестановки аргументов[1]

$$[x, y] = -[y, x] \,. \tag{18}$$

Имеет место следующее правило для раскрытия двойного векторного произведения:

$$[x, [y, z]] = z(x, y) - y(x, z) \,. \tag{19}$$

В данном случае эта формула является почти полным аналогом известного в евклидовом пространстве соотношения. Различие наблюдается в общем знаке перед правой частью равенства, который оказывается чувствительным к выборе сигнатуры метрики. Также используется правило для раскрытия квадрата векторного произведения

$$[x, y]^2 = (x, y)^2 - x^2 y^2 \,. \tag{20}$$

Смешанное произведение тройки векторов в пространстве Минковского определим по формуле

$$(x, y, z) = \varepsilon_{\mu\nu\rho}\, x^\mu y^\nu z^\rho \,. \tag{21}$$

Смешанное произведение является полностью антисимметричным относительно перестановок всех его аргументов.

$$(x, y, z) = -(x, z, y) = -(y, x, z) = (y, z, x) = (z, x, y) = -(z, y, x) \,. \tag{22}$$

Для выражения (22) имеется очевидное представление в терминах скалярного и векторного произведений

$$(x, y, z) = (x, [y, z]) = ([x, y], z) \,. \tag{23}$$

В дальнейшем мы используем формулы из этого раздела для проведения вычислений и записи результатов.

[1] Начиная с этого места мировые индексы у векторов будут опускаться из соображения компактности.

3 Мировой лист

Рассмотрим неприводимую безмассовую спиновую частицу с непрерывной спиральностью в трехмерном пространстве Минковского. В этом случае группа Пуанкаре имеет два оператора Казимира, которым на классическом уровне соответствуют условия массовой и спиновой оболочек на классический импульс p и полный угловой момент J частицы (10)

$$p^2 = 0\,, \quad (p, J) = \sigma\,. \tag{24}$$

Собственные значения этих операторов определяют массу $m = 0$ и спин σ частицы. Далее будем считать и это существенно, что $\sigma \neq 0$, так как случай безмассовой скалярной частицы не подходит под дальнейшие рассуждения и требует отдельного рассмотрения. В пространственно-временной размерности $d = 3$ условие неприводимости группы Лоренца на пространстве спиновых степеней свободы в классическом пределе (8) эквивалентно условию

$$S^2 = \varrho\,, \tag{25}$$

где S - это вектор спина[2]

$$S = J - [x, p]\,. \tag{26}$$

Величина ϱ, согласно данному подходу, понимается как параметр, различающий модели частиц с одним и тем же спином σ.

Для получения алгебраических уравнений мирового листа подставим вектор спина в виде (26) в условия неприводимости группы Лоренца (25). После упрощения полученного выражения с учетом условия массовой оболочки (24) имеем следующее уравнение:

$$(p, x)^2 + 2(v, x) + a = 0\,, \tag{27}$$

где введены обозначения

$$v = [J, p]\,, \quad a = J^2 - \varrho\,. \tag{28}$$

[2]В общей теории рассматривается антисимметричный тензор $S_{\mu\nu}$, но в трехмерном случае он эквивалентен вектору S_μ.

Из определения (28), условий массовой и спиновой оболочек (25) легко видеть, что вектора p и v подчинены условиям

$$(p,p) = (v,v) - \sigma^2 = (p,v) = 0\,. \tag{29}$$

Обсудим геометрический смысл уравнения (27), (29). Для этого выберем начальные данные p и v в виде

$$p = (1,0,1)\,, \quad v = \sigma(0,1,0) \tag{30}$$

и сделаем невырожденную замену координат

$$x = -x^1\,, \quad y = x^2 - x^0\,, \quad z = x^0\,. \tag{31}$$

Тогда (27) принимает вид уравнения параболического цилиндра с фокусным расстоянием σ

$$y^2 = 2\sigma x - a\,, \quad z \in R\,. \tag{32}$$

Данный результат можно получить для любых p и v, удовлетворяющим условиям (29), с помощью правильного выбора замены переменных. Поскольку уравнение (27) инвариантно относительно сдвигов вида

$$x \longrightarrow x + \gamma p\,, \quad \gamma \in R \tag{33}$$

приходим к выводу, что изотропный вектор p задает направление оси параболического цилиндра. Вектор v соединяет ось параболического цилиндра с его фокальной линией по кратчайшему пути в смысле метрики Евклида[3]. Оставшийся параметр a определяет положение оси цилиндра. Таким образом, мировой лист классической неприводимой безмассовой спиновой частицы с непрерывной спиральностью это параболический цилиндр, направляющий вектор оси которого изотропен и совпадает с импульсом частицы, а фокусное расстояние равно спину частицы. Положение оси цилиндра и самого цилиндра относительно оси определяется импульсом, полным угловым моментом и параметром модели. Из выражений (27), (28) видно, что, в отличие от массивного случая [14], [15], начальные данные p, v и

[3]Если изотропный вектор ортогонален пространственноподобному относительно метрики Минковского, то они ортогональны и относительно метрики Евклида.

параметр модели ϱ входят в уравнения мирового листа смешанным образом. В случае классической массивной неприводимой частицы со спином мы имели следующую ситуацию: импульс и полный угловой момент частицы определяют положение мирового листа в пространстве-времени, а параметр модели, вместе с массой и спином, задают его внутренние характеристики (радиус кругового цилиндра). Здесь же параметр модели ϱ, будучи вовлеченным в величину a, наравне с начальными данными определяют положение поверхности. В данном случаем характеристикой мирового листа является фокусное расстояние, которое, как показано выше, зависит только от спина частицы и не зависит от параметра модели ϱ.

Соотношения (28), (29) можно разрешить относительно вектора полного углового момента частицы J. Имеем связь следующего вида:

$$J = \frac{a+\varrho}{2\sigma} p + \sigma e \,, \tag{34}$$

где вектор e определяется условиями

$$(e,e) = (e,p) - 1 = (e,v) = 0 \,. \tag{35}$$

В результате имеем взаимно однозначное соответствие между множеством состояний безмассовой спиновой частицы p, J и множеством параболических цилиндров с изотропной осью в пространстве-времени p, v, a для каждой конкретной модели ϱ. Фиксация ϱ здесь существенна поскольку наборам p, J, ϱ и $p, J + \frac{b}{2\sigma}, \varrho + b$, где b – это некоторая константа соответствует один и тот же мировой лист.

Уравнение (27) можно разрешить параметрически. Решение записывается в виде суммы

$$x = y + d \,. \tag{36}$$

Здесь y – прямая с касательным вектором, совпадающим с вектором импульса частицы[4] – ось цилиндра

$$y = \frac{a+\varrho}{2\sigma}\big[e,p\big] + \lambda p \,, \tag{37}$$

[4]На самом деле положение оси $y_0 = y(0)$ ограничено лишь условием $(y_0, e) = 0$. Выбор $y_0 = \frac{a+\varrho}{2\sigma}[e,p]$ связан с требованием, чтобы y_0 соединяло ось и начало координат по кратчайшему пути.

λ – произвольная функция. Вектор d является аналогом вектора разности, который имел место в массивном случае (теперь он не нормирован)

$$d = (n,e)e - \frac{(n,e)^2 + a}{2\sigma^2}\Big(n - (n,e)p\Big) - \frac{a+\varrho}{2\sigma}[e,p]\,, \tag{38}$$

где вектор n определяется соотношением

$$n = (x,p)p + v\,. \tag{39}$$

Легко видеть,что вектор n удовлетворяет тем же соотношением, что и вектор v

$$p^2 = 0\,, \quad n^2 = \sigma^2\,, \quad (p,n) = 0\,. \tag{40}$$

Из (35), (37), (39) следует, что

$$(x,p) = (n,e)\,, \quad \lambda = (y,e)\,. \tag{41}$$

При таком подходе вся динамика сводится к уравнениям на y и n

$$y = (y,e)p + \frac{a+\varrho}{2\sigma}[e,p]\,, \quad n = (n,e)p + v\,. \tag{42}$$

Им соответствуют обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\dot{y} = (\dot{y},e)p\,, \quad \dot{n} = (\dot{n},e)p\,. \tag{43}$$

Функции (n,e), (y,e) с учетом (36), (38), (42) имеют смысл параметров на поверхности. Далее мы будем ссылаться на полученные здесь уравнения. А именно, они будут служить проверкой правильности построенного гамильтониана.

Представление в параметрической форме также удобно тем, что с его помощью легко получить явный вид изотропных кривых[5] на параболическом цилиндре с изотропной осью. Изотропная траектория безмассовой спиновой частицы с импульсом p и полным угловым моментом J имеет следующий вид:

$$x(t) = te + \frac{t^2 + J^2 - \varrho}{2\sigma^2}\big[p,J\big] - \frac{t^3}{6\sigma^2}p\,. \tag{44}$$

Мы уже сталкивались с подобным упрощением описания кривых на мировом листе при наложении условия изотропности в массивном случае.

[5]Кривая называется изотропной, если ее касательный вектор изотропен в каждый момент времени.

4 Геометрические уравнения движения

В этом разделе мы получим обыкновенные дифференциальные уравнения (О. Д. У.) с высшими производными на траектории классической неприводимой безмассовой спиновой частицы с непрерывной спиральностью. Задача классификации траекторий классической неприводимой массивной частицы со спином для трехмерного случая была разобрана в [13], где был предложен конструктивный метод нахождения О.Д.У. Четырехмерный массивный случай был разобран в работах [14], [15]. В этих работах были найдены общие траектории, лежащие на двумерном круговом цилиндре с времени-подобной осью в $d = 3$ и $d = 4$ пространстве-времени соответственно. В данной работе будет использоваться тот же самый метод, но для случая параболического цилиндра с изотропной осью в $d = 3$ пространстве Минковского (безмассовая частица).

Указанный метод опирается на следующее рассуждение. Как только представление группы Пуанкаре оказывается неприводимым, то возможные положения частицы в пространстве Минковского подчинены уравнению (27), где постоянные p, v, a определяются импульсом, полным угловым моментом частицы и параметром модели соотношениями (28). Уравнение (27), задаёт параболический цилиндр с изотропной осью в $d = 3$ пространстве Минковского. Таким образом, траектории безмассовых неприводимых спиновых частиц с непрерывной спиральностью должны быть цилиндрическими кривыми. Под цилиндрической кривой будем понимать кривую, лежащую на некотором параболическом цилиндре с изотропной осью в пространстве Минковского. Если p, v, a представляют собой параметры цилиндра, то соотношение (27), должны быть выполнены в любой момент времени t, то есть

$$(x(t), p)^2 + 2(x(t), v) + a = 0\,, \quad \forall t \in R. \tag{45}$$

В данных формулах p, v, a задают все возможные положения параболического цилиндра в пространстве Минковского, а $x(t)$ – кривая на нем. В случае цилиндрической кривой общего вида параметры цилиндра p, v, a это

неизвестные постоянные величины. Сначала эти величины должны быть выражены в терминах характеристик траектории:

$$p = p(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}, \ldots)\,, \quad v = v(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}, \ldots)\,, \\ a = a(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}, \ldots)\,. \tag{46}$$

Здесь точками обозначены производные по параметру на кривой соответствующего порядка

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}\,, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{d^2t}\,, \quad \ldots\,. \tag{47}$$

Уравнения, с помощью которых определяются (46), являются дифференциальными следствиями уравнения (45). Подставляя выражения (46) в уравнение цилиндрической кривой (45), мы получаем дифференциальные уравнения цилиндрической кривой общего вида. Будем искать разложения (46), используя вместо вектора v вектор n, задаваемый соотношением (39). Триада p, n, a изоморфна триаде p, v, a. Вектор n позволяет записать уравнения, определяющие p, n, a в относительно более простой форме. Вектор n, как будет показано далее, задает касательное пространство к параболическому цилиндру.

Теперь приступим к нахождению p, n, a и уравнений движения. Замечание: мы отклонимся от общего метода, описанного выше[6], и добавим уравнения параболического цилиндра (45) к системе уравнений (46). Получим переполненную систему на неизвестные p, n, a. Тогда естественно условие совместности p, n, a с оставшимся уравнением принять за уравнение движения безмассовой спиновой частицы, обеспечивающее постоянство величин p, v, a. Говоря другими словами, условия совместности переполненной системы и дает нам О. Д. У на кривые, лежащие на мировом листе. Дифференцируя уравнение (45) с учетом определения вектора n (39) четыре раза, получаем

$$(\dot{x}, n) = 0\,, \quad (\ddot{x}, n) + (\dot{x}, p)^2 = 0\,, \quad (\dddot{x}, n) + 3(\dot{x}, p)(\ddot{x}, p) = 0\,, \\ (\ddddot{x}, n) + 4(\dot{x}, p)(\dddot{x}, p) + 3(\ddot{x}, p)^2 = 0. \tag{48}$$

[6]Такой подход обусловлен тем фактом, что величина a не содержится в дифференциальных следствиях уравнения параболического цилиндра и следовательно их невозможно определить, следуя описанному изначально методу, который хорошо работал в массивном случае.

Полученный набор соотношений вместе с (45) и (40) формируют систему уравнений для нахождения p, n, a в терминах $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}$ и О. Д. У. на траекторию частицы. Из первого уравнения системы (48) с учетом того, что вектор n – пространственноподобный следует, что касательное пространство к параболическому цилиндру с изотропной осью имеет сигнатуру пространства Минковского, то есть на данной поверхности могут лежать как времениподобные, так и пространственноподобные и изотропные траектории. Из соображений простоты мы ограничимся рассмотрением только времениподобных путей на параболическом цилиндре. Пусть $x(\tau)$ – времениподобная траектория безмассовой спиновой частицы, где τ представляет собой натуральный параметр на кривой, а именно

$$(\dot{x}, \dot{x}) = -1\,. \tag{49}$$

При расчетах будут полезные дифференциальные следствия этого условия

$$(\dot{x}, \ddot{x}) = 0, \quad (\dot{x}, \dddot{x}) + (\ddot{x}, \ddot{x}) = 0 \quad (\dot{x}, \ddddot{x}) + 3(\ddot{x}, \dddot{x}) = 0\,. \tag{50}$$

Выбор такого параметра $t = t(\tau)$ возможен, так как мы систематически исключаем из рассмотрения прямые на мировом листе. Это не ограничивает общность, так как прямые линии на цилиндре с изотропной осью с необходимостью являются изотропными кривыми. Однако есть и более общий аргумент, который не связан с времениподобностью рассматриваемых кривых, но связан с самой идеологией мировых листов. Действительно, прямые линии принадлежат одновременно бесконечному числу цилиндров и, как следствие, они не определяют единственное состояние p, J спиновой частицы.

Мы будем искать вектора p, n, a, используя подвижный репер Френе. Тройка векторов e_i , $i = 1, 2, 3$ базиса Френе, адаптированная для описания времениподобных кривых, выглядит следующим образом [17]:

$$e_1 = \dot{x}, \quad e_2 = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{(\ddot{x}, \ddot{x})}}\,, \quad e_3 = \frac{[\dot{x}, \ddot{x}]}{\sqrt{(\ddot{x}, \ddot{x})}}\,. \tag{51}$$

Поскольку $x(\tau)$ не является прямой линией, то эти вектора линейно неза-

висимы. Попарные скалярные произведения базисных векторов имеют вид

$$
\begin{gathered}
-(e_1, e_1) = (e_2, e_2) = (e_3, e_3) = 1, \\
(e_1, e_2) = (e_1, e_3) = (e_2, e_3) = 0\,.
\end{gathered}
\tag{52}
$$

Как видно из этих соотношений, вектора e_2, e_3 – пространственноподобные в то время, как e_1 – времениподобный, а также, что все вектора попарно ортогональны. Уравнения Френе для подвижного репера (51) имеют вид

$$
\dot{e}_1 = \varkappa_1 e_2\,, \quad \dot{e}_2 = \varkappa_1 e_1 + \varkappa_2 e_3\,, \quad \dot{e}_3 = -\varkappa_2 e_2\,,
\tag{53}
$$

где функции $\varkappa_1, \varkappa_2$ называются кривизной и кручением кривой $x(\tau)$ соответственно. Эти величины выражаются как

$$
\varkappa_1 = \sqrt{(\ddot{x}, \ddot{x})}\,, \quad \varkappa_2 = \frac{(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x})}{\sqrt{(\ddot{x}, \ddot{x})}}\,.
\tag{54}
$$

Формулы Френе (53) также фиксируют следующие разложения для производных $x(\tau)$ в терминах базисных векторов репера Френе, кривизны, кручения и их производных:

$$
\begin{gathered}
\dot{x} = e_1\,, \quad \ddot{x} = \varkappa_1 e_2\,, \\
\dddot{x} = \varkappa_1^2 e_1 + \dot{\varkappa}_1 e_2 + \varkappa_1 \varkappa_2 e_3\,, \\
\ddddot{x} = 3\dot{\varkappa}_1 \varkappa_1 e_1 + (\ddot{\varkappa}_1 + \varkappa_1^3 - \varkappa_1 \varkappa_2^2) e_2 + (2\dot{\varkappa}_1 \varkappa_2 + \varkappa_2 \dot{\varkappa}_2) e_3\,.
\end{gathered}
\tag{55}
$$

Вид этих разложений довольно прост в $d = 3$ и $d = 4$ случаях, но надо учитывать, что определение кривизн и кручения в разных измерениях различно и зависит от типа кривой (времениподобная, пространственноподобная или изотропная).

Перейдем теперь к уравнению параболического цилиндра и его дифференциальным следствиям. Вектора p, n могут быть разложены по базису Френе (51)

$$
p = \sum_{k=1}^{3} p_k\, e_k\,, \quad n = \sum_{k=1}^{3} n_k\, e_k\,,
\tag{56}
$$

где p_k, n_k неизвестные коэффициенты. Вектора p, n должны удовлетворять условиям (40). После подстановки разложений (56) для векторов p и n в

уравнения (40) и их разрешения получаем следующее представление для искомых векторов:

$$p = \gamma(e_1 - \beta e_2 + \alpha e_3)\,, \quad n = \sigma(\alpha e_2 + \beta e_3)\,, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1\,. \tag{57}$$

Здесь коэффициенты α, β, γ – неизвестные величины, которые будут определены из оставшихся уравнений. Подставим разложения (57), (55) векторов p, n и производных траектории $x(\tau)$ по базису Френе (55) в дифференциальные следствия уравнения цилиндра (48) и обезразмерим их с помощью спина σ. С учетом (52) получаем следующие уравнения на коэффициенты α, β, γ:

$$\begin{gathered}
\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0\,, \quad \sigma\varkappa_1\alpha + \gamma^2 = 0\,, \\
\sigma^2\dot{\varkappa}_1\alpha + \sigma^2\varkappa_1\varkappa_2\beta + 3\sigma\varkappa_1\gamma^2\beta = 0\,, \\
\sigma^3(\ddot{\varkappa}_1 + \varkappa_1^3 - \varkappa_1\varkappa_2^2)\alpha + \sigma^3(2\dot{\varkappa}_1\varkappa_2 + \varkappa_1\dot{\varkappa}_2)\beta + \\
+4\sigma^2\gamma^2(\dot{\varkappa}_1\beta - \varkappa_1\varkappa_2\alpha) + \sigma^2\varkappa_1^2\gamma^2(3\beta^2 + 4) = 0\,.
\end{gathered} \tag{58}$$

Первое уравнение (48) удовлетворено автоматически в силу определения и свойств вектора n. Введем обозначения

$$\begin{gathered}
A = \sigma\varkappa_1\,, \quad B = \sigma^2\dot{\varkappa}_1\,, \quad C = \sigma^2\varkappa_1\varkappa_2\,, \\
D = \sigma^3(2\dot{\varkappa}_1\varkappa_2 + \varkappa_1\dot{\varkappa}_2)\,, \quad E = \sigma^3(\ddot{\varkappa}_1 + \varkappa_1^3 - \varkappa_1\varkappa_2^2)\,.
\end{gathered} \tag{59}$$

Тогда система (58) примет более компактный вид

$$\begin{gathered}
\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0\,, \quad A\alpha + \gamma^2 = 0\,, \\
B\alpha + C\beta + 3A\gamma^2\beta = 0\,, \\
E\alpha + D\beta + 4\gamma^2(B\beta - C\alpha) + A^2\gamma^2(3\beta^2 + 4) = 0\,,
\end{gathered} \tag{60}$$

где A, B, C, D, E - функции кривизны, кручения и их производных или, другими словами, функции характеристик кривой $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}$. Мы получили переполненную систему уравнений, содержащую 4 уравнений на 3 неизвестных α, β, γ. Одно из уравнений системы можно интерпретировать как условие совместности, которое гарантирует постоянство векторов p и v. В этом случае положение частицы в каждый момент времени τ принадлежит

одному и тому же параболическому цилиндру. Другими словами, любое из уравнений последней системы можно понимать как уравнение на траектории при α, β, γ, разрешенных относительно остальных уравнений. Систему (60) можно легко решить относительно α, β

$$\alpha = -\frac{\gamma^2}{A}\,, \quad \beta = \frac{B\gamma^2}{A(3A\gamma^2 + C)}\,. \tag{61}$$

Параметр $\gamma = \gamma(A, B, C, D, E)$ известен и находится как общий корень двух полиномов $P_1(\gamma)$ и $P_2(\gamma)$ восьмой и двенадцатой степени соответственно. Полином

$$P_1(\gamma) = 9A^2\gamma^8 + 6AC\gamma^6 + (B^2 + C^2 - 9A^4)\gamma^4 - 6A^3C\gamma^2 - A^2C^2 \tag{62}$$

является результатом последовательного исключения переменных α, β из системы

$$\begin{gathered} \alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0\,, \quad A\alpha + \gamma^2 = 0\,, \\ B\alpha + C\beta + 3A\gamma^2\beta = 0\,. \end{gathered} \tag{63}$$

Полином

$$\begin{gathered} P_2(\gamma) = 9A^2\gamma^{12} + 24A\gamma^{10} + (6AE + 16C^2 + 16B^2 - 42A^4)\gamma^8 + \\ +(8DB + 56A^3C - 8CE)\gamma^6 + \\ +(49A^6 + E^2 + D^2 - 14A^3E - 16B^2A^2)\gamma^4 - 8A^2BD\gamma^2 - A^2D^2 \end{gathered} \tag{64}$$

в свою очередь является результатом последовательного исключения переменных α, β из системы

$$\begin{gathered} \alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0\,, \quad A\alpha + \gamma^2 = 0\,, \\ E\alpha + D\beta + 4\gamma^2(B\beta - C\alpha) + A^2\gamma^2(3\beta^2 + 4) = 0\,. \end{gathered} \tag{65}$$

Выражение для γ в терминах A, B, C, D, E громоздко и здесь не приводится. После подстановки найденных выше γ, A, B, C, D, E в (61), (57) и учитывая соотношения (53), (54) получим искомые вектора, выраженные через характеристики кривой $p = p(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x})$, $n = n(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x})$. Отсюда находим вектор v. Из определения (39) следует, что

$$v = n(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}) - (x, p(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}))p(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x})\,. \tag{66}$$

Последний параметр a определяется из оставшегося уравнения параболического цилиндра (45) подстановкой p и v в терминах $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}$

$$a = -(x, p(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}))^2 - 2(x, v(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x})) \tag{67}$$

При таком подходе условие совместности системы уравнений или, другими словами, О. Д. У. цилиндрической кривой сводится к условию совместности полиномов $P_1(\gamma)$ и $P_2(\gamma)$. Необходимым и достаточным условием для выполнения данного требования является равенство нулю результанта [18] этих полиномов

$$F(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}) \equiv \mathrm{res}_\gamma(P_1, P_2) = 0. \tag{68}$$

Это уравнения относительно громоздко и будет вынесено в главу **Приложение**.

Таким образом, мы выразили величины p, n в терминах характеристик траектории $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}$. Эти выражения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} p &= \gamma\left(\dot{x} - \frac{\gamma^2(\ddot{x}, \ddot{x})\ddot{x}}{\sigma^3(\ddot{x}, \dddot{x})\big(3(\ddot{x}, \ddot{x})\gamma^2 + \sqrt{(\ddot{x}, \ddot{x})}(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x})\big)} - \frac{\gamma^2[\dot{x}, \ddot{x}]}{\sigma(\ddot{x}, \ddot{x})}\right), \\ n &= \gamma^2\left(\frac{\gamma^2(\ddot{x}, \ddot{x})[\dot{x}, \ddot{x}]}{\sigma^2(\ddot{x}, \dddot{x})\big(3(\ddot{x}, \ddot{x})\gamma^2 + \sqrt{(\ddot{x}, \ddot{x})}(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x})\big)} - \frac{\ddot{x}}{(\ddot{x}, \ddot{x})}\right), \end{aligned} \tag{69}$$

где функция $\gamma = \gamma(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x})$ известна. Зная эти величины находим параметры v и a

$$v = n - (x, p)\,, \quad a = -(x, p)^2 - 2(x, v)\,. \tag{70}$$

Мы здесь их не выписываем из-за их громоздкости. В итоге имеем начальные данные (интегралы движения, параметры мирового листа) и параметр модели p, v, a выраженными в терминах радиус вектора и его производных до четвертого порядка включительно. Исходный вектор полного углового момента $J = J(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x})$ восстанавливается согласно выражению (34), где вектор $e = e(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x})$ является решением системы (35). Выражение для J объемно и здесь также не приводится. Траектории на параболическом цилиндре описываются одним скалярным уравнением четвертого

порядка (см. приложение), записанным в терминах инвариантов кривой – кривизны, кручения и их производных. Это уравнение является геометрическим в том смысле, что в него не вовлечены координаты на пространстве внутренних степеней свободы.

5 Гамильтонова формулировка

В данном разделе будет построен гамильтониан, реализующий движение частицы по мировому листу. В предыдущей секции было получено дифференциальное уравнение четвертого порядка на траекторию частицы. Это уравнение не является лагранжевым, но его можно свести к таковому с помощью расширения состава переменных. Будет предложен гамильтониан со связями и показано, что система имеет правильное число степеней свободы, а соответствующие гамильтоновы уравнения движения описывают траекторию общего вида на параболическом цилиндре с изотропной осью.

Пусть 12-мерное фазовое пространство задается векторами y и n и сопряженными к ним импульсами P и π. Координаты и импульсы связаны каноническими коммутационными соотношениями

$$\begin{gathered}
\{y_\mu, P_\nu\} = \eta_{\mu\nu}\,, \quad \{n_\mu, \pi_\nu\} = \eta_{\mu\nu}\,, \\
\{y_\mu, y_\nu\} = 0\,, \quad \{P_\mu, P_\nu\} = 0\,, \\
\{n_\mu, n_\nu\} = 0\,, \quad \{\pi_\mu, \pi_\nu\} = 0\,, \\
\{y_\mu, n_\nu\} = 0\,, \quad \{y_\mu, \pi_\nu\} = 0\,, \\
\{P_\mu, n_\nu\} = 0\,, \quad \{P_\mu, \pi_\nu\} = 0\,,
\end{gathered} \tag{71}$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ – скобка Пуассона

$$\{\varphi, \psi\} = \frac{\partial\varphi}{\partial y^\mu}\frac{\partial\psi}{\partial P_\mu} + \frac{\partial\varphi}{\partial n^\mu}\frac{\partial\psi}{\partial \pi_\mu} - \frac{\partial\psi}{\partial y^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial P_\mu} - \frac{\partial\psi}{\partial n^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial \pi_\mu}\,. \tag{72}$$

Будем стартовать со следующего первичного гамильтониана со связями:

$$\begin{gathered}
H^{(1)} = \frac{\lambda_1}{2}\theta_1 + \frac{\lambda_2}{2}\theta_2 + \frac{\lambda_3}{2}\theta_3 + \lambda_4\theta_4 + \lambda_5\theta_5 + \lambda_6\theta_6\,, \\
\theta_1 = (P,P)\,, \quad \theta_2 = (n,n) - A\,, \quad \theta_3 = (\pi,\pi) - C\,, \\
\theta_4 = (P,n)\,, \quad \theta_5 = (P,\pi) - B\,, \quad \theta_6 = (\pi,n)\,,
\end{gathered} \tag{73}$$

где A, B, C – постоянные параметры, $\theta_i\,, i = 1,2,3,4,5,6$ – связи, а $\lambda_i\,, i = 1,2,3,4,5,6$ – неопределенные множители Лагранжа. После проведения га-

мильтонова анализа со связями [19] было установлено, что среди первичных связей 4 связи второго рода

$$\theta_2\,, \quad \theta_3\,, \quad \theta_4\,, \quad \theta_6 \tag{74}$$

и 2 связи первого рода

$$\theta_1\,, \quad \theta_2 + 2\frac{A}{B}\theta_5\,. \tag{75}$$

Из требования сохранения первичных связей новых связей не возникает (либо они сохранятся тождественно, либо определяется множитель Лагранжа). Число степеней свободы равно $\frac{1}{2}(12-4*1-2*2) = 2$, что соответствует известным представлениям о безмассовой спиновой частице в трехмерном пространстве Минковского. В итоге гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{e}{2}(P,P) + \frac{\lambda}{2}\big((n,n) + 2\frac{A}{B}(P,\pi) - 3A\big)\,, \tag{76}$$

где e, λ – это новые обозначения для оставшихся множителей. Соответствующие уравнения движения имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} \dot{y} = eP\,, \quad \dot{n} = \frac{A}{B}\lambda P\,, \\ \dot{P} = 0\,, \quad \dot{\pi} = -\lambda n\,, \\ (P,P) = 0\,, \quad (n,n) + 2\frac{A}{B}(P,\pi) - 3A = 0\,. \end{gathered} \tag{77}$$

Причем начальные данные P_0, n_0, π_0 подчинены соотношениям

$$\begin{gathered} (n_0,n_0) - A = 0\,, \quad (\pi_0,\pi_0) - C = 0\,, \\ (P_0,n_0) = 0\,, \quad (\pi_0,n_0) = 0\,. \end{gathered} \tag{78}$$

Не трудно показать, что в частном случае[7] положение частицы определяется системой

$$\begin{gathered} y = (y,e)P_0 + y_0\,, \quad n = (n,e)P_0 + n_0\,, \\ (P_0,P_0) = 0\,, \quad (n_0,n_0) - A = 0\,, \quad (P_o,n_0) = 0\,, \quad (y_0,e) = 0\,. \end{gathered} \tag{79}$$

где вектор e определяется условиями

$$(e,e) = 0\,, \quad (e,P_0) = 1\,, \quad (e,n_0) = 0\,. \tag{80}$$

[7]Ограничения $(y_0,e) = 0$ на y_o и $(e,e) = 0$ на e здесь неоткуда не следуют и накладывается искусственно.

Таким образом, мы видим, что построенный гамильтониан описывает траектории на параболическом цилиндре с изотропной осью (40), (42). Для этого нужно зафиксировать начальные данные

$$P_0 = p\,, \quad n_0 = v\,, \quad y_0 = \frac{a+\varrho}{2\sigma}[e,p] \tag{81}$$

и положить $A = \sigma^2$.

6 Соответствие с уже известной моделью

Выше были получены уравнения, которые определяют траекторию общего вида на мировом листе. Затем был построен гамильтониан, реализующий эти уравнения. В качестве проверки полученных в работе результатов мы покажем, что построенный в предыдущем разделе гамильтониан эквивалентен уже известному гамильтониану спиновой частицы в трехмерном пространстве Минковского.

Рассмотрим еще раз гамильтониан (73). Разрешим связи $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ с помощью изотропного вектора $\xi(\tau)$

$$
\begin{gathered}
n = \frac{\sqrt{A}}{(\xi, P)}[\xi, P] - \alpha P\,, \\
\pi = \frac{B}{(\xi, P)}\xi + \left(\frac{C}{2B} - \frac{B\alpha^2}{2A}\right)P + \frac{B\alpha}{\sqrt{A}(\xi, P)}[\xi, P]\,, \\
\xi = \big(1, \sin\varphi(\tau), \cos\varphi(\tau)\big)\,,
\end{gathered}
\tag{82}
$$

где параметр α определяет произвол в решении связей. Построим гамильтоново действие с учетом (82)

$$
\begin{aligned}
S &= \int d\tau\big[(\dot{y}, P) + (\dot{n}, \pi) - H^{(1)}\big] = \\
&= \int d\tau\Bigg[(\dot{y}, P) + \frac{\sqrt{A}B}{(\xi, P)}\dot{\varphi} - \frac{B\alpha}{(\xi, P)}(\xi, \dot{P}) + \\
&+ \left(\frac{\sqrt{A}C}{2B} + \frac{B\alpha^2}{2\sqrt{A}}\right)\frac{(\xi, \dot{P}, P)}{(\xi, P)} - \frac{e}{2}(P, P)\Bigg]\,.
\end{aligned}
\tag{83}
$$

Затем сделаем замену переменных[8]

$$
y = x - \left(\frac{\sqrt{A}C}{2B} + \frac{B\alpha^2}{2\sqrt{A}}\right)\frac{[\xi, P]}{(\xi, P)}\,,
\tag{84}
$$

положим[9] $A = \sigma^2, B = 1$, проинтегрируем по частям и воспользуемся произволом в определении действия. В итоге имеем следующее гамильтоново

[8] Замена подобного вида ожидаема. Поскольку в нашем гамильтониане y – координата на оси цилиндра ("движение центра масс системы"), а в работе [11] x – координата самой частицы в пространстве.

[9] На самом деле положить $B = 1$ можно было с самого начала (73). Действительно, существует замена $P \to BP$, которая не меняет A и C.

действие:

$$S = \int d\tau \left[(\dot{x}, P) + \frac{\sigma}{(\xi, P)} \dot{\varphi} + \alpha \frac{(\partial_\varphi \xi, P)}{(\xi, P)} \dot{\varphi} - \frac{e}{2} (P, P) \right] . \tag{85}$$

Видим, что параметр C тоже оказывается несущественным. Такой функционал действия для релятивистской безмассовой спиновой частицы в трехмерном пространстве известен и был построен в работе[10] [11]. В работе [11] были найдены импульс и полный угловой момент. Они имеют вид

$$p = P \,, \quad J = [x, p] + S \equiv [x, p] + \left(\frac{\sigma}{(\xi, P)} + \alpha \frac{(\partial_\varphi \xi, P)}{(\xi, P)} \right) \xi - \alpha \partial_\varphi \xi \,. \tag{86}$$

Для которых имеют место следующие соотношения:

$$p^2 = 0 \,, \quad (p, J) = \sigma \,, \quad (S, S) = \alpha \,, \tag{87}$$

как и должно быть по построению. Как мы видим параметр α, который отвечает за произвол в решении связей имеет смысл акцессорного параметра ϱ.

[10] В этой работе рассматривается массивная частица, но легко видеть, что действие имеет хороший безмассовый предел $ms = \sigma$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе были изучены некоторые общие свойства моделей неприводимой безмассовой спиновой частицы с непрерывной спиральностью в трехмерном пространстве Минковского. Было показано, что пространство состояний безмассовой спиновой частицы с непрерывной спиральностью находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством поверхностей в пространстве-времени. Это соответствие можно организовать таким образом, чтобы в каждом заданном состоянии классическая траектория частицы в каждый момент времени принадлежала некоторому представителю множества поверхностей, причём все причинные траектории, кроме прямых линий, допустимы. Это приводит нас к концепции мирового листа как класса эквивалентности всех причинных мировых путей в пространстве-времени. Вложение мирового листа частицы с заданным импульсом и полным угловым моментом в пространство Минковского описывается одним алгебраическим уравнением, которое задает параболический цилиндр, направляющий вектор оси которого изотропен и совпадает с импульсом частицы, а фокусное расстояние равно спину частицы. Положение оси цилиндра и самого цилиндра относительно оси определяется импульсом, полным угловым моментом и параметром модели.

Далее продемонстрировано, что один факт принадлежности классической траектории мировому листу однозначно определяет классические уравнения движения частицы. Из соображения краткости и наглядности, были рассмотрены только случаи времениподобных и изотропной траекторий на мировом листе. Показано, что движение частицы описывается одним скалярным уравнением четвертого порядка, записанным в терминах инвариантов кривой - кривизны, кручения и их производных. Эти уравнения имеют чисто геометрический характер, то есть спиновые степени свободы в них не вовлечены и, в отличие от массивного случая, полученные уравнения имеют относительно компактный вид и могут быть выписаны явно. Выражения для интегралов движения такой частицы в терминах ха-

рактеристик траектории в данном случае найдены в неявном виде с использованием вспомогательного параметра, который на уравнениях движения при необходимости всегда может быть выписан. Вид изотропной кривой на параболическом цилиндре с изотропной осью был получен явно.

Полученные уравнения являются нелагранжевыми, но допускают формулировку в терминах гамильтониана после расширения состава переменных. Построенный гамильтониан описывает систему с правильным числом степеней свободы, а соответствующие ему уравнения движения описывают кривые общего вида на мировом листе. В качестве проверки результатов было установлено, что наш гамильтониан эквивалентен уже известному гамильтониану релятивистской спиновой частицы в трехмерном пространстве, построенному из других соображений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Schuster, P. Continuous-spin particle field theory with helicity correspondence / P. Schuster, N. Toro // Phys. Rev. D – 2015. – Vol. 91. – P.025023.

[2] Bekaert, X. Elementary particles with continuous spin / X. Bekaert, E.D. Skvortsov // International Journal of Modern Physics A – 2017. – Vol. 32. – P.1730019.

[3] Najafizadeh, M. Modified Wigner equations and continuous spin gauge field / M. Najafizadeh // Phys. Rev. D – 2018. – Vol. 97. – P.065009.

[4] Bargmann, V. Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations / V. Bargmann, E. Wigner // PNAS – 1948. – Vol. 34. – P.221-223.

[5] Lyakhovich, S.L. Universal model of a D=4 spinning particle/ S.L. Lyakhovich, A.Yu. Segal, A.A. Sharapov // Phys. Rev. D – 1996. – Vol. 54. – P.5223-5238.

[6] Frenkel, J. Die Elektrodynamik des rotierenden Elektrons / J. Frenkel // Z. Phys. – 1926. – Vol. 37. – P.243-262.

[7] Ramos, E. W-symmetry and the rigid particle / E. Ramos, J. Roca // Nucl. Phys. B. –1995. – Vol. 436. - P.529-541.

[8] Ramos, E. Extended gauge invariance in geometrical particle models and the geometry of W-symmetry /E. Ramos, J. Roca // Nucl. Phys. B. –1995. – Vol. 452. - P.705-723.

[9] Plyushchay, M.S. Massive relativistic point particle with rigidity / M.S. Plyushchay // Int. J. Mod. Phys. A. – 1989. – Vol. 4. – P.3851-3865.

[10] Plyushchay, M.S. Massless Point Particle With Rigidity / M.S. Plyushchay // Mod. Phys. Lett. A. – 1989. – Vol. 4. – P.837-847.

[11] Gorbunov, I.V. On the Minimal Model of Anyons / I.V. Gorbunov, S.M. Kuzenko, S.L. Lyakhovich // Int. J. Mod. Phys. A. –1997. – Vol. 12. - P.4199-4215.

[12] Frydryszak, A. Lagrangian Models of the Particles with Spin: The First Seventy Years / A. Frydryszak // From Field Theory To Quantum Groups / A. Frydryszak. – World Scientific Publishing., 1996. – P.151-172.

[13] Lyakhovich, S.L. World sheets of spinning particles / S.L. Lyakhovich, D.S. Kaparulin // Phys. Rev. D –2017. – Vol. 96. – P.105014.

[14] Kaparulin, D.S. World Sheet of a Massive Spinning Particle in $d = 4$ Minkowski Space / D.S. Kaparulin, S.L. Lyakhovich, I.A. Retuntsev // Journal of Physics: Conference Series –2019. – Vol. 1337. – P.012005.

[15] Kaparulin, D.S. Geometrical model of massive spinning particle in four-dimensional Minkowski space / D.S. Kaparulin, S.L. Lyakhovich, I.A. Retuntsev // Russian Physics Journal –2019. – Vol. 61. – P.2145–2154.

[16] Дубровин, Б.А. Современная геометрия: Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 760 с.

[17] Walrave, J. Curves and surfaces in Minkowski space, PhD thesis, K. U. Leuven, Fac. of Science, Leuven, 1995.

[18] Прасолов, В.В. Многочлены / В.В. Просолов – М.: МЦНМО, 2003. — 335 с.

[19] Гитман, Д.М. Каноническое квантование полей со связями / Д.М. Гитман, И.В. Тютин – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 216 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$$F(\dot{x},\ddot{x},\dddot{x},\ddddot{x}) = 6561A^{16}(50C^5EDB - 720CA^7DB^3 + 1440CA^{11}DB+$$

$$+18CEB^5D + 90CA^3DB^5 + 12CAB^3D^3 + 9B^6D^2 + 30C^4AE^3+$$

$$+25C^4B^2D^2 + 34C^4B^2E^2 - 54CA^5DBE^2 + 18CA^2D^3EB + 36CAB^3E^2D+$$

$$+18CA^2E^3DB - 432CA^8DBE + +36CA^4DB^3E + 1593A^8E^2C^2+$$

$$+9A^2B^2D^4 - 1026C^3A^4EDB - 594A^4E^2C^4 + 7056A^{14}C^2+$$

$$+3640A^6B^2C^4 - 72A^5D^2C^2E - 288A^5D^3BC - 234A^5D^2B^2E+$$

$$+63A^4D^2B^2C^2 + 3042A^7EB^2C^2 + 576A^7C^3DB - 662B^3C^3A^3D-$$

$$-468B^2C^2A^4E^2 - 470B^2C^4A^3E - 1296A^{12}D^2 + 3760A^6C^6+$$

$$+4176A^7EC^4 - 5544A^{11}EC^2 + 9A^2B^2E^2D^2 + 1593A^6B^4C^2-$$

$$-10416A^{10}C^4 - 5832A^{10}B^2C^2 + 18AEB^4D^2 + 1440A^8D^2C^2-$$

$$-144A^4D^2C^4 - 81A^6D^2E^2 - 153A^4D^2B^4 + 648A^9D^2E+$$

$$+792A^8D^2B^2 + 9C^2A^2E^4 - 400C^8A^2 - 144B^6C^2A^2 - 680C^6A^3E-$$

$$-198A^5E^3C^2 - 112B^4C^4A^2 + 656B^2C^6A^2 + 25C^6E^2 + 34C^2D^2B^4+$$

$$+9C^2E^2B^4 + 54C^2AD^2B^2E + 9C^2A^2D^2E^2 + 18C^2AE^3B^2+$$

$$+68C^3B^3ED - 414B^4C^2A^3E - 992C^5A^3DB + 72C^3AE^2DB)^2$$

$$(-50C^5EDB + 4560CA^7DB^3 + 5472CA^{11}DB - 50CEB^5D+$$

$$+950CA^3DB^5 - 60CAB^3D^3 + 25B^6D^2 + 30C^4AE^3+$$

$$+25C^4B^2D^2 + 50C^4B^2E^2 + 486CA^5DBE^2 - 18CA^2D^3EB+$$

$$+60CAB^3E^2D - 18CA^2E^3DB - 3024CA^8DBE - 1380CA^4DB^3E+$$

$$+1593A^8E^2C^2 + 9A^2B^2D^4 + 1410C^3A^4EDB - 594A^4E^2C^4+$$

$$+7056A^{14}C^2+4280A^6B^2C^4-72A^5D^2C^2E+288A^5D^3BC+$$

$$+198A^5D^2B^2E-2049A^4D^2B^2C^2-1998A^7EB^2C^2-8256A^7C^3DB+$$

$$+2710B^3C^3A^3D+396B^2C^2A^4E^2-550B^2C^4A^3E-1296A^{12}D^2+$$

$$+3760A^6C^6+4176A^7EC^4-5544A^{11}EC^2+9A^2B^2E^2D^2-$$

$$-695A^6B^4C^2-10416A^{10}C^4+3576A^{10}B^2C^2-30AEB^4D^2+$$

$$+1440A^8D^2C^2-144A^4D^2C^4-81A^6D^2E^2-105A^4D^2B^4+$$

$$+648A^9D^2E-936A^8D^2B^2+9C^2A^2E^4-400C^8A^2-400B^6C^2A^2-$$

$$-680C^6A^3E-198A^5E^3C^2-1200B^4C^4A^2-1200B^2C^6A^2+$$

$$+25C^6E^2+50C^2D^2B^4+25C^2E^2B^4+150C^2AD^2B^2E+$$

$$+9C^2A^2D^2E^2-30C^2AE^3B^2-100C^3B^3ED+$$

$$+130B^4C^2A^3E+1760C^5A^3DB-120C^3AE^2DB)^2\,.$$

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: Ретунцев Иван Алексеевич
Проверяющий: (retuncev.ivan@gmail.com / ID: 6794044)

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - users.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 7
Начало загрузки: 11.06.2021 18:04:14
Длительность загрузки: 00:00:01
Имя исходного файла:
Диплом_маг_Ретунцев.pdf
Название документа: Диплом_маг_Ретунцев
Размер текста: 48 кБ
Тип документа: Магистерская диссертация
Символов в тексте: 50509
Слов в тексте: 6512
Число предложений: 401

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 11.06.2021 18:04:15
Длительность проверки: 00:00:01
Корректировка от 11.06.2021 18:21:09
Комментарии: не указано
Модули поиска: Интернет

ЗАИМСТВОВАНИЯ	САМОЦИТИРОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
0,95%	0%	0%	99,05%

Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа.
Самоцитирования — доля фрагментов текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа, по отношению к общему объему документа.
Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.
Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объему документа.
Заимствования, самоцитирования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.
Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Источник	Актуален на	Модуль поиска
[01]	0,27%	Geometrical model of massive spinning particle in four-dimensional Minkowski space http://arxiv.org	19 Мар 2020	Интернет
[02]	0,42%	World sheets of spinning particles http://arxiv.org	03 Дек 2018	Интернет
[03]	0,26%	http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/services/Download/vtls:000667023/SOURCE1 http://vital.lib.tsu.ru	29 Окт 2020	Интернет

Научный руководитель
доц. С.П. Пахович