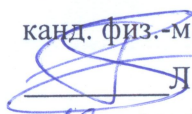


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Механико-математический факультет
Кафедра математического анализа и теории функций

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК

Руководитель ООП

канд. физ.-мат. наук

 Д. В. Гензе

« 16 » июня 2020г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

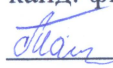
**АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ С S-УСРЕДНЕННОЙ
ХАРАКТЕРИСТИКОЙ**

по основной образовательной программе подготовки бакалавров
направление подготовки 02.03.01 – Математика и компьютерный науки

Бердалиева Мадина Алтынбековна

Руководитель ВКР

канд. физ.-мат. наук, доцент

 А. Н. Малютина

« 12 » 06 2020г.

Автор работы

студентка группы № 04602

 М. А. Бердалиева

Томск – 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1 Предварительные обозначения и терминология.....	6
2 Обобщенная производная.....	11
2.1 Определение обобщённой производной	11
2.2 Существование обычных и обобщённых производных	12
2.3 Свойства обобщённых производных.....	16
3 Отображения с s-усредненной характеристикой	17
3.1 Определение отображений с s-усредненной характеристикой.....	17
3.2 Вспомогательные оценки	17
3.3 Пример отображения с s-усредненной характеристикой	19
4 Основные результаты	22
4.1 Теорема о сходимости последовательностей отображений с KI, s - усредненной характеристикой к непрерывному отображению $f, f : D \rightarrow R^n$	22
4.2 О поведении отображения с s-усредненной характеристикой в окрестности особой изолированной точки	25
4.3 О непрерывности отображений с s-усредненной характеристикой	27
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	32
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	34

ВВЕДЕНИЕ

Теория плоских квазиконформных отображений, как обобщение классических конформных отображений, возникла в 30-х годов XX века в работах М.А. Лаврентьева [1] и Г. Греча [2]. Ее зарождение было обусловлено как внутренними потребностями комплексного анализа, так и его практическими приложениями к разным задачам гидродинамики [3, 4].

Понятие пространственного гомеоморфного квазиконформного отображения было введено М. А. Лаврентьевым [5] в 1938 г. Интерес к изучению класса пространственных квазиконформных отображений связан с тем, что он достаточно широк по сравнению с классом пространственных конформных отображений, который, согласно известной теореме Лиувилля (1850 г.), исчерпывается лишь преобразованиями Мебиуса, т.е. суперпозициями инверсий относительно сфер и плоскостей.

Начало интенсивных исследований в этой области пространственных квазиконформных отображений относится к концу 50-х и началу 60-х годов XX века. Одна из причин этого состояла в том, что методы, развитые для исследования плоских (не гомеоморфных) квазиконформных отображений, оказались непригодными для изучения пространственных квазиконформных отображений, так как они в основном основывались на теории конформных отображений. Поэтому появилась необходимость создания новых методов, заменяющих аппарат конформных отображений. Таким методом оказался метод модулей семейств кривых и поверхностей. Наиболее существенный вклад в развитие теории пространственных квазиконформных отображений в эти годы внесли М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, П.П. Белинский, Ю. Г. Решетняк, В. А. Зорич, Г. Д. Суворов, А. В. Сычев, И. П. Митюк, В. М. Гольдштейн, В. В. Кривов, В. М. Миклюков, С. Л. Крушкаль, Б. П. Куфарев, В. В. Асеев, С. К. Водопьянов, А. П. Копылов, Л. Альфорс, Ф. Геринг, О. Мартио, С. Рикман, Ю. Вайсяля, М. Вуоринен, Г. Андерсон, Р. Някки и др.

В эти же годы наряду с продолжающимся развитием теории квазиконформных отображений начинается изучение квазиконформных отображений в пространстве ($n \geq 3$), называемых отображениями с ограниченным искажением (или квазирегулярными отображениями). Аналитические методы исследования этих отображений были разработаны Ю.Г. Решетняком [6], а геометрический метод (как и в случае квазиконформных отображений) – метод модулей, основанный на свойстве квазиинвариантности конформной емкости конденсатора и модуля семейства кривых, был предложен Ю. Вайсяля, О. Мартио, С. Рикманом [7], А.В.Сычевым [8] и Е. А. Полецким [9].

Естественным обобщением квазиконформных отображений являются гомеоморфные отображения, квазиконформные в среднем, поскольку в пространстве ($n \geq 3$) существуют достаточно простые области, гомеоморфные шару, которые невозможно квазиконформно отображать на шар. Различные классы отображений, квазиконформных в среднем, рассматривались в работах С.Л. Крушкаля [10], В.М. Миклюкова [11], Ю.Ф. Стругова [12], В. М. Кругликова [13], А. Н. Малютиной [14].

Разработке же общих геометрических методов, использующих емкостную технику, и их применению при исследовании свойств отображений, квазиконформных в среднем, посвящен ряд статей В.И. Кругликова (см., напр., [15], [13]). Эти методы отражают законы искажения емкостей конденсаторов при отображениях, квазиконформных в среднем, и по своей значимости они подобны соответствующим геометрическим методам в теории квазиконформных отображений.

В последнее десятилетие XX века и до настоящего времени интенсивно изучаются различные отображения с конечным искажением [16, 17, 18, 19] и др., естественным образом обобщающие конформные, квазиконформные и квазирегулярные отображения. Во всех этих обобщениях, как и в классической теории, модульная техника играет ключевую роль. Имея в

виду такую значимость модульной техники и теоремы «Об оценке», профессор О. Мартио предложил следующую общую концепцию – теорию Q -гомеоморфизмов, основы которой были заложены в работах [20], [21], [22], а в работе [23] концепция Q гомеоморфизмов была распространена на отображения с ветвлением, так называемые Q -отображения. Основной целью теории Q гомеоморфизмов является изучение взаимосвязей свойств отображения f со свойствами мажоранты $Q(x)$, для отображений s -усредненной характеристикой. можно взять характеристику, когда $s = n$. для остальных s наш класс шире.

Выпускная квалификационная работа посвящена изучению отображений, имеющих обобщенную производную, суммируемую со степенью n , отображений с s -усредненной характеристикой, ставится задача:

- 1) доказать теорему о полунепрерывности отображений с s -усредненной характеристикой снизу,
- 2) доказать теорему о поведении отображения с s -усредненной характеристикой в окрестности изолированной особой точки,
- 3) исследовать непрерывность отображений с s -усредненной характеристикой, найти классы и подклассы отображений с s -усредненной характеристикой, удовлетворяющие этим условиям.

В настоящей выпускной квалификационной работе мы рассматриваем пространственное негомеоморфное отображение с s -усредненной характеристикой, как обобщение понятия квазиконформного в среднем отображения. Мы продолжаем развитие метода модулей для изучения аналитических свойств отображений с s -усредненной характеристикой, исследование классов отображений с s -усредненной характеристикой и установление взаимосвязей с другими классами, например, пространственных отображений класса $BL^{\frac{n}{2}}$, что позволит распространить некоторые свойства последних на класс исследуемых отображений.

1 Предварительные обозначения и терминология

Определение 1.1 Пусть даны два произвольных топологических пространства X и Y и непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$. Отображение f называется *открытым*, если для всякого открытого множества D в X множество $f(D)$ является открытым в Y . Если для всякого замкнутого $A \subset X$ образ $f(A)$ замкнут, то f называется *замкнутым* отображением.

Определение 1.2 *Изолированная точка* множества A в топологическом пространстве X есть такая точка $a \in A$, что пересечение некоторой ее окрестности с A состоит из единственной точки a . Если для всякой точки $y \in Y$ ее полный прообраз $f^{-1}(y)$ состоит лишь из изолированных точек, то f называется *изолированным отображением* [6].

Определение 1.3 Пусть D – область из $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $x \in D$, если существует линейное отображение $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, называемое *производной* f в точке x , такое, что

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + |h| \cdot \varepsilon(x, h),$$

где $\varepsilon(x, h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется дифференцируемым, если оно дифференцируемо в каждой точке $x \in D$ [6].

Определение 1.4 Норма в векторном пространстве V над полем вещественных или комплексных чисел это функционал $p : V \rightarrow R$, обладающий следующими свойствами:

1. $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0_V$;
2. $\forall x, y \in V, p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ (неравенство треугольника);
3. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in V, p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

Определение 1.5 Пусть $v_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, n$, а M - матрица, столбцами которой являются векторы $v_i : i = 1, 2, \dots, n$. Тогда $|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^n \|v_i\|_n$, где $\|\cdot\|_n$ -евклидова норма вектора, это неравенство называется *неравенство Адамара* [24].

Замечание 1.6 Если отображение $f = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)): D \rightarrow R^n$ имеет в точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ частные производные $df_j(x)/dx_i$, $i, j = \overline{1, n}$, то в этой точке определены следующие выражения: линейное отображение $f'(x): R^n \rightarrow R^m$, матрица которого есть матрица Якоби отображения f , якобиан отображения f $J(x, f) = \det \left(\frac{df_j(x)}{dx_i} \right)$, Неравенство Адамара для определителей, а также для произвольного вектора $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ определены следующие величины $f'(x)h = \sum_{i=1}^n \frac{df_i(x)}{dx_i} h_i$, норма производной

$$|f'(x)| = \max_{|h|=1} |f'(x)h|, \quad l(f'(x)) = \min_{|h|=1} |f'(x)h|, \quad |\nabla f(x)| = \left(\sum_{i,j=1}^n \left[\frac{df_{ij}}{dx_j}(x) \right]^2 \right)^{1/2}.$$

Определение 1.7 Пусть (X, B, μ) –пространство с мерой.

Функция $f: X \rightarrow B$ называется **-измеримой** (измеримой, если ясно ,о какой мере идет речь),если $\forall c \in B$ множество $X(f < c) := \{x \in X: f(x) < c\} \in B$, то есть является измеримым.

Определение 1.8 Пусть A – измеримое множество в R^n , f – измеримая вещественная функция, определенная на A . Полагаем для $p \geq 1$

$$\|u\|_{p,A} = \left(\int_A |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Предположим, что D есть открытое множество в пространстве R^n и u – измеримая функция, определенная в D . Будем говорить, что u **локально суммируема** в D со степенью p , и писать: $u \in L_{p,\text{loc}}(D)$, если $\|u\|_{p,A} < \infty$ для любого компактного множества $A \subset D$. Совокупность всех измеримых функций u , таких, что $\|u\|_{p,D} < \infty$, обозначим символом $L_p(D)$. В случае $D = R^n$ будем писать просто L_p . Мы приводим здесь известные свойства пространств $L_p(D)$ в частности неравенство Гельдера, полноту пространства $L_p(D)$ и т.д.

Определение 1.9 Пусть $(u_m), m=1,2,\dots$ — произвольная последовательность функций класса $L_{p,\text{loc}}(D)$. Будем говорить, что последовательность $(u_m), m=1,2,\dots$ ограничена в $L_{p,\text{loc}}(D)$, или, иначе, локально ограничена в $L_{p,\text{loc}}(D)$, если для всякого компактного $A \subset D$ последовательность норм $(\|u_m\|_{p,A}), m=1,2,\dots$ ограничена.

Определение 1.10 Будем говорить, что последовательность $(u_m), m=1,2,\dots$ функций класса $L_{p,\text{loc}}(D)$ сходится в $L_{p,\text{loc}}(D)$ к функции $u_0 \in L_{p,\text{loc}}(D)$, если для всякого компактного множества $A \subset D$ $\|u_m - u_0\|_{p,A} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Определение 1.11 Пусть функция $f(x) \geq 0$ измерима и почти всюду конечна на множестве $E \subset R^n$. Рассмотрим всевозможные измеримые подмножества $e \subset E$, имеющие конечную меру, на которых функция $f(x)$ ограничена, и положим $\int_E f(x)dx = \sup_e \int_e f(x)dx$, тем самым $\int_e f(x)dx \geq 0$. Если при этом $\int_E f(x)dx < +\infty$, то функция $f(x)$ называется *суммируемой* на множестве E .

Определение 1.12 Функция $\varphi(x)$ называется *абсолютно непрерывной* на $[a,b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для любой системы попарно не пересекающихся интервалов $(a_1, b_1) \dots (a_n, b_n)$ для которых

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^n |\varphi(b_k) - \varphi(a_k)| < \varepsilon.$$

Определение 1.13 Нижний предел последовательности — это точная нижняя грань множества частичных пределов последовательности.

Нижним пределом последовательности (a_n) называется $\liminf_{n \rightarrow \infty} f[a]$

Определение 1.14 Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* в окрестности точки **a**, если существует такое $M > 0$ ($M = \text{const}$) и такие, что

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$$

Определение 1.15

Посредством $W^{k,p}(\Omega)$ мы обозначим векторное подпространство в $D'(\Omega)$:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u(x) \in D'(\Omega): \partial^\alpha u(x) \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}. [25]$$

Определение 1.16 Посредством $W_0^{k,p}(\Omega)$ мы обозначим векторное пространство, полученное пополнением векторного пространства $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{k,p}$ пространства $W^{k,p}(\Omega)$. [25]

Теорема 1.17 Имеет место вложения: $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ при $N > p, p^* = \frac{Np}{N-p}$, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}(\bar{\Omega})$ при $N < p$. Причем имеют место следующие неравенства:

$$\|u\|_{p^*} \leq c \|\nabla u\|_p \quad \text{при } N > p; \sup |u(x)| \leq c (\text{meas } \Omega)^{\frac{1}{N} - \frac{1}{p}} \|\nabla u\|_p \quad \text{при } N < p. [25]$$

Определение 1.18

$F(X, U, P) = F(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_n, p_1, \dots, p_k)$ от трех групп аргументов. Для системы $n+k$ функций $u_1, u_2, \dots, u_n, p_1, p_2, \dots, p_k$ независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$ рассмотрим функционал

$$(u_i, p_j, \Omega, F) = \int_{\Omega} F(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_n, p_1, \dots, p_k) d\Omega, d\Omega = dx_1 \dots dx_m. [26]$$

Теорема 1.19

Пусть функция $F(X, U, P)$ определена при $X \in \Omega \subset \mathcal{R}^{(m)}$ и при любых $u_i, p_j (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k)$ и обладает следующими свойствами:

- 1) $F(X, U, P)$ непрерывна вместе со своими частными производными $F_{p_j} = \frac{\partial F}{\partial p_j} (j = 1, 2, \dots, k)$ по совокупности аргументов везде, где определена;
- 2) $F(X, U, P) \geq 0$ при $X \in \Omega \subset \mathcal{R}^{(m)}$ и любых u_i, p_j ;
- 3) $E(X, U, P, \bar{P}) = F(X, U, P) - F(X, U, \bar{P}) - \sum_{j=1}^n (p_j - \bar{p}_j) F_{p_j}(X, U, \bar{P}) \geq 0$ для всех $X \in \Omega$ и любых $U \in \mathcal{R}^{(n)}$; $P = (p_1, \dots, p_k)$; $\bar{P} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_k) \in \mathcal{R}^{(k)}$.
- 4) Пусть последовательность функций $\{u_i^\xi, \xi = 1, 2, \dots\}$ при $\xi \rightarrow \infty$ сходится сильно в $L_a(\Omega)$ соответственно к функциям u_i^0 для каждого $i=1, 2, \dots, n$, а последовательность $\{p_j^\xi, \xi = 1, 2, \dots\}$ сходится слабо в $L_a(\Omega)$ соответственно к функциям p_j^0 для каждого $j=1, 2, \dots, k^1$. Тогда
$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} (u_i^\xi, p_j^\xi, \Omega, F) \geq (u_i^0, p_j^0, \Omega, F) \text{ [26]}$$

Определение 1.20

Последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к x_* если $X \in X$ и X – банахово пространство, если $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x_* \rangle \quad \forall f \in X^*$ при $n \rightarrow \infty$.

В приложениях находит применение следующий критерий слабой сходимости. Последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к x_* тогда и только тогда, когда найдется положительное число c и множество $Y \subset X^*$, плотное в X^* , такие что

$$\|x_n\| \leq c \quad \forall n \quad \text{и} \quad \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x_* \rangle \quad \forall f \in Y \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

Если $X = L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, то в качестве плотного множества Y годится множество $D(\Omega)$ и множество ступенчатых функций.

2 Обобщенная производная

2.1 Определение обобщённой производной

Определение 2.1.1 Пусть D – произвольное открытое множество в R^n . Пусть $u: D \rightarrow R$ – функция класса $L_{1,loc}(D)$. Предположим, что существует функция $v \in L_{1,loc}(D)$ такая, что для всякой функции $\varphi \in C_0^k(D)$ выполняется равенство

$$\int_D D^\alpha \varphi(x) u(x) dx = (-1)^k \int_D \varphi(x) v(x) dx$$

где $k = |\alpha|$. В этом случае говорят, что v есть обобщенная производная $D^\alpha u$ функции u , $v = D^\alpha u$.

Определение 2.1.2 Пусть φ задана в области $\Omega \in R^n$ и суммируема по любой ограниченной области G такой, что $\bar{G} \in \Omega$. Рассмотрим функцию ψ , непрерывную со всеми производными до порядка l включительно и равную тождественно нулю вне некоторой ограниченной области V_ψ , такой что $\overline{V_\psi}$ входит в Ω . Если φ имеет непрерывные производные, то

$$\int_\Omega \left[\varphi \frac{\partial^l \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} + (-1)^{l+1} \psi \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right] dv = 0 \quad (2.1.2.1)$$

Пусть теперь мы нечего не знаем о существовании производных от φ и пусть существует функция $\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, суммируема по любой ограниченной области G такой, что $\bar{G} \subset \Omega$, и удовлетворяющая равенству

$$\int_\Omega \left[\varphi \frac{\partial^l \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} + (-1)^{l+1} \psi \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \right] dv = 0 \quad (2.1.2.2)$$

для всех функций ψ из рассматриваемого класса. Тогда обозначим

$$\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (2.1.2.3)$$

и будем называть $\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ *обобщенной производной* функции φ .

2.2 Существование обычных и обобщённых производных

Может существовать лишь одна обобщенная производная $\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ от φ функции. Если бы их было две : $\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(1)}, \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(2)}$, то на основании (2.1.2.2) имели бы

$$\int_{\Omega} (\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(1)} - \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(2)}) \psi dv = 0, \text{ откуда в силу произвольности } \psi$$

получили бы $\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(1)} = \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(2)}$ почти везде. Таким образом, обобщенная производная определяется однозначно (с точностью до множества меры нуль).

Докажем, что новое определение производной не совпадает с определением производной почти всюду.

Пример 2.2.1 Рассмотрим функцию $f(x) = |x| \quad f: R \rightarrow R$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} |x| = \frac{d}{dx} (\operatorname{sgn} x * x) = \operatorname{sgn} x - \text{разрывная в точке } x = 0. \text{ Итак,}$$

$$\frac{d}{dx} |x| = \operatorname{sgn} x \quad \forall x \in R \setminus \{0\}.$$

Докажем, что не существует обычная производная в точке $x = 0$. В самом деле

$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} \Delta x$ - не существует (так как имеет разные правосторонний и левосторонний пределы). Следовательно, в точке $x = 0$ функция $f(x)$ не имеет производных в обычном смысле.

Исследуем функцию $f(x)$ на существование обобщенной производной.

Пусть $f(x)$ суммируема на любом интервале $(a, b), -\infty < a < b < +\infty$.

Если функция $f(x)$ имеет обобщенную производную, то для всякой $\psi(x)$, непрерывной с первой производной и обращающейся в нуль вне

$(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ ($0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$), должно выполняться равенство

$$\int_a^b \left[f(x) \frac{d\psi}{dx} + \psi(x) \omega(x) \right] dx = 0 \quad (2.2.1.1)$$

$$\int_a^b f(x) \frac{d\psi}{dx} dx = - \int_a^b \omega(x) \psi(x) dx$$

Обозначим $\Omega(x) = \int_a^x \omega(\xi) d\xi$. Тогда $-\int_a^b \omega(x) \psi(x) dx = \int_a^b \Omega(x) \frac{d\psi}{dx} dx$

Получим $\int_a^b \frac{d\psi}{dx} [f(x) - \Omega(x)] dx = 0$.

В силу произвольности ψ , удовлетворяющей лишь условию $\int_a^b \frac{d\psi}{dx} dx = 0$, получим $f(x) = \Omega(x) + C$

$$|x| = \int_a^x \omega(\xi) d\xi + C$$

Дифференцируем полученное равенство $\operatorname{sgn} x = \omega(x) \quad \forall x \in R \setminus \{0\}$

Проверим, выполняется ли равенство (2.2.1.1) в точке $x = 0$

$$\int_a^b \left[|x| \frac{d\psi}{dx} dx + \psi(x) \omega(x) \right] dx = 0$$

$$\int_a^b \psi(x) \omega(x) dx = 0$$

В силу произвольности $\frac{d\psi}{dx}$, получим $\omega(x) = \omega(0) = 0$ для $x = 0$. Таким образом, функция $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$ не дифференцируема, а следовательно не имеет производной обычной, но мы доказали, что обобщенная производная существует на всей вещественной прямой R .

Пример 2.2.2 Докажем, что существует функция $f(x)$, которая не имеет обобщенной производной. В самом деле рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x}{|x|} : R \setminus \{0\} \rightarrow R$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{\operatorname{sgn} x \cdot x} = \frac{1}{\operatorname{sgn} x} = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Отметим, что функция $f(x)$ суммируема на любом ограниченном интервале (a, b) . Если бы существовала обобщенная производная $\omega(x)$ в любой ограниченной области $\Omega: a < x < b$, тогда для всякой $\psi(x)$, непрерывной с первой производной и обращающейся в нуль вне $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ ($0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$), имели бы равенство $\int_a^b f(x) \frac{d\psi}{dx} dx = - \int_a^b \omega(x) \psi(x) dx$

Пусть $\Omega(x) = \int_a^x \omega(\xi) d\xi$. Тогда $-\int_a^b \omega(x) \psi(x) dx = \int_a^b \Omega(x) \frac{d\psi}{dx} dx$, и, следовательно, $\int_a^b [f(x) - \Omega(x)] \frac{d\psi}{dx} dx = 0$.

$$\text{Получаем, что } f(x) = \Omega(x) + C \quad \frac{1}{\operatorname{sgn} x} = \int_a^x \omega(\xi) d\xi + C$$

Следовательно, получим противоречие : в левой части исходного равенства функция разрывная, а в правой – непрерывная. Значит, функция $f(x)$ не имеет обобщенной производной.

Таким образом, функция $f(x) = \frac{x}{|x|}$, разрывная в точке $x = 0$, и она имеет обычную производную в любой точке $x \in R \setminus \{0\}$, но не имеет обобщенную производную.

Пример 2.2.3 Докажем, что существует функция не абсолютно непрерывная, тогда она не имеет обобщенной производной

В самом деле пусть $\varphi(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, но не абсолютно непрерывна. Если бы $\varphi(x)$ имела обобщенную производную $\omega(x)$, то для всякой $\psi(x)$, непрерывной с первой производной и обращающейся в нуль вне $(\varepsilon, 1 - \varepsilon)$

$(0 < \varepsilon < \frac{1}{2})$, имели бы равенство $\int_0^1 \varphi \frac{d\psi}{dx} dx = - \int_0^1 \omega(x) \psi(x) dx$

Пусть $\Omega(x) = \int_0^x \omega(\xi) d\xi$. Тогда $-\int_0^1 \omega(x) \psi(x) dx = \int_0^1 \Omega(x) \frac{d\psi}{dx} dx$, и, следовательно, $\int_0^1 [\varphi - \Omega(x)] \frac{d\psi}{dx} dx = 0$, откуда в силу произвольности $\frac{d\psi}{dx}$, удовлетворяющей лишь условию $\int_0^1 \frac{d\psi}{dx} dx = 0$, вытекало бы, что

$$\varphi - \Omega(x) = C, \text{ т.е. } \frac{\partial(\varphi_1 \varphi_2)}{\partial x_1} = \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \text{ и, следовательно,}$$

$\varphi(x)$ абсолютно непрерывна, что противоречит предположению. Таким образом, $\varphi(x)$ не имеет обобщенной производной. Поэтому, если $\varphi(x)$ непрерывна, имеет почти везде производную $\frac{d\varphi}{dx}$, но не абсолютно непрерывна, то она не имеет обобщенной производной.

Вывод: Мы показали, что из существования производной почти везде не следует существования обобщенной производной.

Пример 2.2.4 В этом примере мы докажем, что существуют непрерывные на всей прямой, но нигде не дифференцируемые функции $\varphi(x, y)$ не имеющие производных в обычном смысле

Рассмотрим функцию двух переменных $\varphi(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$, где f_1, f_2 -непрерывные на всей прямой, но нигде не дифференцируемые функции; $\varphi(x, y)$ не имеет производных в обычном смысле, но обобщенная производная $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ существует и равна 0 в любом прямоугольнике Ω :

$a < x < b, c < y < d$. В самом деле,

$$\int_{\Omega} \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dv = \int_{\Omega} f_1(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dv + \int_{\Omega} f_2(y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dv \quad \text{Но} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ на границе } \Omega, \text{ и}$$

поэтому

$$\int_{\Omega} f_1(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dv = \int_a^b f_1(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dy dx = \int_a^b f_1(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{y=c}^{y=d} dx = 0$$

и аналогично $\int_{\Omega} f_2(y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dv = 0$. Следовательно, $\int_{\Omega} \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dv = 0$, что и

требовалось доказать.

Можно сделать вывод, что понятия классической и обобщенной производной различны в том смысле, что из существования одной из них еще не следует существование другой.

2.3 Свойства обобщённых производных

1. Если φ_1 и φ_2 имеют обобщенные производные одного порядка $\frac{\partial^\alpha \varphi_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ и $\frac{\partial^\alpha \varphi_2}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, а c_1 и c_2 -постоянные, то $c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$ имеет обобщенную производную того же порядка

$$\frac{\partial^\alpha (c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = c_1 \frac{\partial^\alpha \varphi_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} + c_2 \frac{\partial^\alpha \varphi_2}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}. [8]$$

2. Если φ имеет обобщенную производную $\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \omega(x_1, \dots, x_n)$ и $\omega(x_1, \dots, x_n)$ имеет обобщенную производную $\frac{\partial^\beta \omega}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} = \lambda(x_1, \dots, x_n)$, то $\lambda(x_1, \dots, x_n)$ есть обобщенная производная от φ порядка $\alpha + \beta$:

$$\lambda = \frac{\partial^{\alpha+\beta} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1+\beta_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n+\beta_n}}. [8]$$

3. Если φ_1 и $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \in L_p$, φ_2 и $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \in L_p$, то произведение $\varphi_1 \varphi_2$ имеет обобщенную производную $\frac{\partial(\varphi_1 \varphi_2)}{\partial x_1} = \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} [8]$

3 Отображения с s-усредненной характеристикой

3.1 Определение отображений с s-усредненной характеристикой

Мы приводим аналитическое определение отображений s-усредненной характеристикой [27], [28].

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $f \in W_{n, \text{loc}}^1(D)$. Тогда п.в. D определены величины – характеристики отображения f (см. напр. [8], [29], [7]).

-внутренняя дилатация отображения f в точке x

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l^n(f, x)} \quad (3.1.1)$$

где

$$l(x, f) = l(f'(x)) = \min_{|h|=1} |f'(x)h|;$$

– внешняя дилатация отображения f в точке x

$$K_O(x, f) = \frac{L^n(x, f)}{|J(x, f)|}, \quad (3.1.2)$$

где

$$L(x, f) = |f'(x)| = \max_{|h|=1} |f'(x)h|;$$

а также

$$\lambda(x, f) = n^{\frac{-n}{2}} \frac{|\nabla f(x)|^n}{|J(x, f)|}, \quad (3.1.3)$$

$$K(x, f) = \frac{L(x, f)}{l(x, f)}. \quad (3.1.4)$$

3.2 Вспомогательные оценки

При этом справедливы оценки ([8,30])

$$K_I(x, f) \leq K_O^{n-1}(x, f), \quad (3.2.1)$$

$$K_o(x, f) \leq n^{\frac{n}{2}} \lambda(x, f) \leq n^{\frac{n}{2}} K_o(x, f) \leq n^{\frac{n}{2}} K_I^{n-1}(x, f) \quad (3.2.2)$$

и неравенства, связывающие характеристики между собой

$$\begin{aligned} K(x, f) &\leq \min(K_I(x, f), K_o(x, f)) \leq \\ &\leq K^{\frac{n}{2}}(x, f) \leq \max(K_I(x, f), K_o(x, f)) \leq K^{n-1}(x, f). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое, непрерывное, изолированное, $f \in W_{n, \text{loc}}^1(D)$, $s > 1/(n-1)$. Якобиан отображения $J(x, f)$ сохраняет знак почти всюду в D (для определенности возьмем $J(x, f) > 0$).

В каждой точке $x \in D$ определим величину $d\sigma_x = \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}$, где

$$|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Определим для открытого, непрерывного и изолированного отображения f , обладающего почти всюду в области D всеми частными производными $df_j(x)/dx_i$, $i, j = \overline{1, n}$, величины $K_I(x, f)$ – **внутреннюю дилатацию** отображения f , $K_o(x, f)$ – **внешнюю дилатацию отображения** f , полагая

$$K(x, f) = \inf H(x), \quad K_I(x, f) = \inf K(x), \quad K_o(x, f) = \inf P(x),$$

где точная нижняя грань берется, соответственно, по всем измеримым в D функциям $H(x) \geq 1, K(x) \geq 1, P(x) \geq 1$ $x \in D$, для которых почти всюду в D выполняются, соответственно, неравенства

$$J(x, f) \leq K(x) l^n(f'(x)), \quad |f'(x)|^n \leq P(x) J(x, f), \quad |f'(x)| \leq H(x) \cdot l(f'(x)).$$

Определение 3.2.4 Пусть D, D' – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $f \in W_{n, \text{loc}}^1(D)$ – открытое непрерывное изолированное отображение, $f: D \rightarrow D'$ и $J(x, f) > 0$ п. в. в D . Если существует постоянная $K_{I, s} \geq 0$ такая, что

$$K_{I,s}(f) = \left(\frac{1}{|D'|} \int_D K_I^s(x, f) J(x, f) dx \right)^{1/s} \leq K_{I,s} < \infty \quad (3.2.4.1)$$

где число $s > 0$, $|D'|$ – мера Лебега области D' , то отображение f называется отображением с $K_{I,s}$ – ограниченным в среднем искажением

Если существует постоянная $K_{O,s'} \geq 0$ такая, что

$$K_{O,s'}(f) = \left(\frac{1}{|D'|} \int_D K_O^{s'}(x, f) dx \right)^{1/s'} \leq K_{O,s'} < \infty \quad (3.2.4.2)$$

где число $s' > 0$, то отображение f называется отображением с $K_{O,s'}$ – ограниченным в среднем искажением.

Если выполнены оба неравенства (3.2.4.1) и (3.2.4.2), то f называется отображением с $K_{I,s}, K_{O,s'}$ – ограниченным в среднем искажением.

3.3 Пример отображения с s-усредненной характеристикой

Пример 3.3.1 Закручивание тора вокруг оси. [31, с.49]

В пространстве R^3 рассмотрим тор D , точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ которого удовлетворяют условиям $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, $|x_3| < 1$, где

$$x_1 = (R + r \cos \theta) \cos \varphi, x_2 = (R + r \cos \theta) \sin \varphi, x_3 = \sin \theta,$$

заданные при помощи криволинейных координат $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 < r < R$, $R < 1$.

В области D зададим отображение $f: D \rightarrow D'$

$$(r, \varphi, \theta) \rightarrow (r, \varphi, r^p \theta), r \neq 0, \quad (3.3.1.1)$$

где p – произвольное отрицательное число и $f(x) = x$, если

$$(x_1 - R)^2 + x_3^2 = 0.$$

Отображение f , очевидно, непрерывно и ограничено в D . При этом оно локально гомеоморфно в $x \in D, r \neq 0$. Все точки множества

$$D^1 = \{x: (x_1 - R)^2 + x_3^2 = 0\}, \quad (3.3.1.2)$$

отображение f переводит в себя и каждая окружность с центром на D^1 , лежащая в двумерной плоскости, ортогональной D^1 при отображении f также переходит в себя.

Отсюда легко видно, что отображение f непрерывно дифференцируемо в точках $x \in D \setminus D^1$ и $J(x, f) = r^p > 0$. Поскольку 2-мерная мера Лебега множества D^1 равна нулю и сужение f на любую прямую, не проходящую D^1 непрерывно дифференцируемо, то f есть *ACL* отображение. Если точка x обходит описанную выше окружность один раз в каком-либо направлении, то точка $f(x)$ обойдет ту же окружность в том же направлении $r^p > 1$ раз. Теперь возьмем компакт $F \subset D$, содержащий внутри себя некоторые точки из D^1 . Нетрудно видеть, что для некоторой точки

$$y = (y_1, y_2, y_3), \text{ где}$$

$$y_1 = (R + r \cos r^p \theta) \cos \varphi, \quad y_2 = (R + r \cos r^p \theta) \sin \varphi, \quad y_3 = r \sin r^p \theta.$$

Следовательно, на окружности $(y_1 - R)^2 + y_3^2 = r^2$ имеется не менее m прообразов множества F для этого надо выбрать r так, чтобы шар радиуса r с центром на D^1 лежал во множестве F и целая часть $[r^p]$ числа r^p была бы не меньше m . Это и означает, что ограниченность на компактах кратности отображения f не имеет места. Так как $J(x, f) > 0$ при $x \in D \setminus D^1$, то $N(y, f, G) = \mu(y, f, G)$ для всякой подобласти G , где $N(y, f, G)$ - кратность, а $\mu(y, f, g)$ - степень или топологический индекс отображения f относительно точки y и области G . Так как

$$\bar{G} \subset D, y \notin f(\partial D), y = (y_1, y_2, y_3), (y_1 - R)^2 + y_3^2 \neq 0.$$

И следовательно, ограниченность на компактах степени для отображения f - отображения с s - усредненной характеристикой не имеет места. Покажем далее, что сходятся интегралы, характеризующие отображение с s - усредненной характеристикой. Пусть $\alpha > 0, \beta > 0$ - произвольные числа. Убедимся, что можно подобрать $p > 0$ так, чтобы

$$\int_D K_I^\alpha(x, f) J(x, f) dx < \infty, \int_D K_O^\beta(x, f) dx < \infty$$

Если $x \in D^1$, то

$$K_O^\beta(x, f) = K_I(x, f) = J(x, f) = 1.$$

Если же $x \in D \setminus D^1$, то

$$J(x, f) = r^p, K_O(x, f) < (3 + 4\pi^2 p^2)^{3/2} r^{2p}, \text{ и так как}$$

$$K_I(x, f) \leq K_O^2(x, f) \leq (3 + 4\pi^2 p^2)^{\frac{3}{2}} r^{2p}, \text{ следовательно}$$

$$\int_D K_I^\alpha(x, f) |J(x, f)| dx \leq c_2 \int_0^1 r^{2\alpha p + p + 1} dr < \infty$$

$$\text{Если } 0 > p > -\frac{2}{2\alpha+1},$$

$$\int_D K_I^\beta(x, f) dx < c_3 \int_0^1 r^{4\beta p + 1} dr < \infty$$

$$\text{если } 0 > p > -\frac{2}{4\beta} = -\frac{1}{2\beta}.$$

Таким образом, оба этих интеграла конечны одновременно, если $0 > p > \max\left\{-\frac{1}{2\beta}, -\frac{2}{2\alpha+1}\right\}$.

4 Основные результаты

4.1 Теорема о сходимости последовательностей отображений с $K_{I,s}^*$ - усредненной характеристикой к непрерывному отображению $f, f : D \rightarrow R^n$

Определение 4.1.1[32] Неравенство Гёльдера

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две произвольные интегрируемые на сегменте $[a, b]$ функции, пусть p и q – два числа, превосходящие единицу, и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда справедливо неравенство Гёльдера для интегралов

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.1.1.1)$$

Теорема 4.1.2 Пусть $f : D \rightarrow D'$ и пусть $D_m \subset D', m=1,2,\dots$ – ограниченные области, $|D'| \leq R < \infty$. Пусть $f_m : D \rightarrow D_m$ – последовательность отображений с $K_{I,s}$ – усредненной характеристикой $s \geq 1$ и последовательность $\{f_m\}$ сходится равномерно внутри D к непрерывному отображению $f, f : D \rightarrow R^n$.

Тогда $f \in W_n^1(D)$, и $K_{I,s}^*(f) = \left(\int_D K_I^s(x, f) J(x, f) d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} K_{I,s}^*(f_m)$, откуда следует, что отображений с $K_{I,s}$ - усредненной характеристикой являются полунепрерывными снизу [33].

Доказательство.

Рассмотрим характеристику отображения f . Для каждого номера $m = 0, 1, 2, \dots$, согласно определению (2.2), имеем

$$K_{O,s}(f_m) = \left(\int_D K_O^s(x, f_m) d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K_{O,s} \quad (4.1.2.1)$$

Применяя к интегралу (4.1.2.1) неравенство Гельдера (4.1.1.1) с показателями $p = \frac{sn}{s+1}$, $q = -s$ и оценку (3.1.3) с использованием характеристики $\lambda(x, f)$, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_D K_O^s(x, f_m) d\sigma_x &\leq n^{ns/2} \int_D \lambda^s(x, f_m) d\sigma_x = \int_D \frac{|\nabla f_m|^{sn}}{|J(x, f_m)|^s} d\sigma_x = \int_D |\nabla f_m|^{sn} |J(x, f_m)|^{-s} d\sigma_x \leq \\ &\leq \left(\int_D |\nabla f_m|^{\frac{sn}{s+1}} d\sigma_x \right)^{s+1} \cdot \left(\int_D |J(x, f_m)|^{-s(-1/s)} d\sigma_x \right)^{-s} \leq \left(\int_D |\nabla f_m|^{\frac{sn}{s+1}} d\sigma_x \right)^{s+1} \cdot \left(\int_D |J(x, f_m)| d\sigma_x \right)^{-s}, \end{aligned}$$

где

$$\left(\int_D |J(x, f_m)| d\sigma_x \right)^{-s} = R^{-s}$$

В силу ограниченности $D_m \subset D'$, $m=0,1,2,\dots$, имеем

$$\int_D K_O^s(x, f_m) d\sigma_x \leq \left(\int_D |\nabla f_m|^{\frac{sn}{s+1}} d\sigma_x \right)^{s+1} \cdot R^{-s}$$

Следовательно, для каждого $m=0,1,2,\dots$, имеет место следующая оценка

$$\left(\int_D |\nabla f_m|^{sn/(n+1)} d\sigma_x \right)^{s+1} \geq R^s \int_D K_O^s(x, f_m) d\sigma_x = R^s K_{O,s}^s(f_m) \quad (4.1.2.2)$$

Обозначим $d = \varliminf_{m \rightarrow \infty} K_{O,s}(f_m)$. Из общей последовательности отображений

выберем подпоследовательность $\{f_m\}$ такую, что $K_{O,s}(f_m) \rightarrow d$ при $m \rightarrow \infty$. Однако в силу справедливости – оценки, следующей из (4.1.2.1) имеем

$$\int_D K_O^s(x, f_m) d\sigma_x \leq K_{O,s}^s \quad (4.1.2.3)$$

Из равномерной сходимости f_m к непрерывной функции f внутри D и неравенства (4.1.2.3), следует, что из последовательности $\{f_m\}$ можно выбрать подпоследовательность, которая сходится сильно в $L_p(D)$, слабо в $W_p^1(D)$, с $p = sn(s+1)^{-1}$ (по теореме вложения Соболева(ссылку)); последовательность характеристик $K_m = K_O^s(x, f_m)$ слабо сходится в $L_1(D)$ к некоторой функции $K(x)$

и якобиан $J(x, f_m)$ сходится слабо в $L_1(D)$ к $J(x, f)$. Таким образом, существует предельное отображение $f \in W_p^1(D)$.

Возьмем теперь шар $B(x, r)$ в R^n с центром в точке x и радиусом r , $x \in D$ произвольная точка области D и r такие, что $B(x, r) \subset D$. Из теоремы Казиминова [26] о полунепрерывности интегралов вариационного исчисления следует, что

$$\int_{B(x, r)} |\nabla f|^p d\sigma_x \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{B(x, r)} |\nabla f_m|^p d\sigma_x$$

В силу слабой сходимости K_m к $K(x)$, $J(x, f_m)$ к $J(x, f)$ и неравенств (3.2.2), (4.1.2.2), (4.1.2.3) получаем следующую оценку

$$\begin{aligned} \int_{B(x, r)} |\nabla f|^p d\sigma_x &\leq \int_{B(x, r)} |\nabla f|^{sn/(s+1)} d\sigma_x = \int_{B(x, r)} |\nabla f|^{n \frac{s}{s+1}} d\sigma_x = \\ &= \int_{B(x, r)} n^{\frac{ns}{2(s+1)}} \lambda(x, f)^{\frac{s}{s+1}} |J(x, f)|^{\frac{s}{s+1}} d\sigma_x \leq \\ &\leq n^{\frac{ns}{2(s+1)}} \left(\int_{B(x, r)} \left[\lambda(x, f)^{\frac{s}{s+1}} \right]^{s+1} d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s+1}} \left(\int_{B(x, r)} |J(x, f)| d\sigma_x \right)^{\frac{s}{s+1}} \leq \\ &\leq n^{\frac{p+n}{2}} \left(\int_{B(x, r)} K_0^s(x, f) d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s+1}} \cdot \left(\int_{B(x, r)} |J(x, f)| d\sigma_x \right)^{\frac{s}{s+1}}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\int_{B(x, r)} |\nabla f|^p d\sigma_x \leq n^{\frac{p+n}{2}} \left(\int_{B(x, r)} K_0^s(x, f) d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s+1}} \left(\int_{B(x, r)} |J(x, f)| d\sigma_x \right)^{\frac{s}{s+1}} \quad (4.1.2.4)$$

Переходя в (4.1.2.4) к пределу при $r \rightarrow 0$ по теореме Лебега, получаем, что для почти всех $x \in D$ справедливо

$$|\nabla f|^p \leq n^{\frac{p+n}{2}} K(x)^{\frac{1}{s+1}} \cdot |J(x, f)|^{\frac{s}{s+1}} \quad (4.1.2.5)$$

После возведения обеих частей (4.1.2.5) в степень $s+1$ и деления на $|J(x, f)|^s > 0$, получаем

$$\left(\frac{|\nabla f|}{|J(x, f_m)|} \right)^s \leq K(x) \cdot n^{\frac{n}{2}}$$

Отсюда, в силу неравенства (3.2.2) имеем

$$K_o^s(x, f) \leq n^{\frac{n}{2}} K(x)$$

Теорема доказана. [Для отображений с ограниченным искажением см. 34]

4.2 О поведении отображения с s -усредненной характеристикой в окрестности особой изолированной точки

Определение 4.2.1 Точка $x_0 \in \bar{D}$ называется *особой* для отображения $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\operatorname{vrai} \max_{x \in B^n(x_0, \varepsilon) \cap D} \lambda(x, f) = \infty$,

где $\lambda(x, f) = n^{-n/2} |\nabla f(x)|^n |J(x, f)|^{-1}$. [35]

Определение 4.2.2 Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что во множестве $\bar{B}^n(x_0, \varepsilon) \cap \bar{D}$ других, отличных от x_0 особых точек нет, то x_0 называется *изолированной особой* точкой.

Определение 4.2.3 Кольцевую область $D_\varphi = D_\varphi(a)$, $a > 1$, называют *кольцевой областью Грёча*, если ее граничными компонентами являются сфера $S^n(0, 1)$ и луч $\{x : a \leq x_1 \leq \infty, x_2 = \dots = x_n = 0\}$.

Положим $\left(\omega_{n-1} \left(M \left(\Gamma_{D_\varphi(a)} \right)^{-1} \right) \right)^{\frac{1}{n-1}} = \ln \Phi(a)$, где $\Gamma_{D_\varphi(a)}$ — семейство всевозможных кривых, соединяющих граничные компоненты кольцевой области Грёча $D_\varphi(a)$, а $M \left(\Gamma_{D_\varphi(a)} \right)$ — конформный модуль этого семейства. [35]

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — множество. Обозначим $R(x, A) = \sup_{y \in A} |x - y|$.

Лемма 4.2.4 Функция $\frac{\Phi(a)}{a}$ является неубывающей при $1 < a < \infty$, причем $1 \leq \frac{\Phi(a)}{a} \leq \lambda$, где λ – некоторая постоянная. [8]

Лемма 4.2.5 (лемма Грѣча) Пусть D_r – кольцевая область такая, что $C_0 = \overline{B}^n$ и C_1 содержит точку $\{\infty\}$ и точку Q , $|Q|=1$, $r > 1$.

Тогда $M(\Gamma_{D \setminus \{r\}}) = \inf M(\Gamma_{D_r})$, где $\inf$ берется над классом всевозможных кольцевых областей D_r . [30]

В следующей теореме мы исследуем поведение отображения с s -усредненной характеристикой в изолированной точке.

Теорема 4.2.6 Пусть $f : D \rightarrow D^*$ – отображение с s -усредненной характеристикой. Тогда для всякой точки $x_0 \in D$ и точки $x \in B^n(x_0, d)$, $d = \rho(x_0, \partial D)$ справедлива следующая оценка

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \lambda R^* e^{-t(x, x_0)} \quad (4.2.6.1)$$

где $R^* = \rho(f(x_0), f[B^n(x_0, d)])$, λ – некоторая величина, зависящая только от $t(x, x_0) = \left[\omega_{n-1}^{-1} \int_D r^n(|x - x_0|, y) K_1(y, f) d\sigma_x \right]^{1/(1-n)}$, и $r(t, y)$ – произвольная метрика, допустимая для семейства $\Gamma([0, t], S^n(s_0, d); B^n(x_0, d))$, $0 < t < d$. [43]

Доказательство.

Если интеграл в определении функции $t(x, x_0)$ расходится, то $t(x, x_0) = 0$ и оценка (4.2.6.1) тривиальна. Пусть существует метрика $r(t, y)$ такая, что соответствующая функция $t(x, x_0) > 0$.

Рассмотрим кольцевую область $B^n(x_0, d) \setminus [0, |x_0 - x|]$. Ее образ при отображении f обозначим $B^* \setminus \gamma$. Из лемм 4.2.4 и 4.2.5 следует, что

$$\begin{aligned} & \omega_{n-1} \left(\ln \lambda R^* - \ln |f(x) - f(x_0)| \right)^{1-n} \leq \\ & \leq M \left(\Gamma \left([0, |f(x_0) - f(x)|], S^n(f(x_0), d); B^n(f(x_0), R^*) \right) \right) \leq M(\Gamma^*), \end{aligned}$$

где Γ^* – образ $\Gamma([0, |x_0 - x|], S^n(x_0, d); B^n(x_0, d))$ при отображении f . В силу теоремы об оценке модуля, получаем

$$M(\Gamma^*) \leq \int_D r^n(|x_0 - x|, y) K_1(y, f) d\sigma_x = \frac{\omega_{n-1}}{t^{n-1}(x, x_0)}.$$

Значит,

$$t(x, x_0) \leq \ln \frac{\lambda R^*}{|f(x) - f(x_0)|}.$$

Теорема доказана. [Для отображений с ограниченным искажением см. 14]

4.3 О непрерывности отображений с s -усредненной характеристикой

Определение 4.3.1 Звездная область, относительно фиксированной точки O – подмножество D евклидова пространства, R^n , такое, что отрезок, соединяющий любую точку области D с точкой O , целиком принадлежит этой области. Подмножество называется просто звездной областью, если существует точка, относительно которой это подмножество звездное. [36]

По известной теореме вложения С. Л. Соболева [25, с. 89], если область G звездная относительно шара, принадлежащего области G и $f \in W_{n,loc}^1 p > n$, то непрерывна в G .

В нашей работе доказывается непрерывность f при $1 < s \leq n$, но при некоторых дополнительных условиях на функцию f .

Пусть область $G \subset R^n$, $f : G \rightarrow R^n$, $f \in W_n^1(G)$, $1 < s < n$, пусть для любого $y \in G$ выполняется неравенства

$$\int_G (\lambda(x, f))^s k(|x - y|) d\sigma_x < M \quad (4.3.1.1)$$

$$\int_G (\lambda^*(x, f))^s k(|x - y|) d\sigma_x < M^* \quad (4.3.1.2)$$

где функция $k(t)$, определена при $t > 0$, положительна, не возрастает и $\lim_{t \rightarrow 0+} k(t) = +\infty$. В случае (4.3.1.1) будем говорить, что отображение $s(s, k)$ - усредненной характеристикой, а в случае (4.3.1.2) - отображение $s(s^*, k)$ - усредненной характеристикой, где функция $f \in W_n^1(G, k, M)$, $1 < s < n$.

Теорема 4.3.2

Если $f \in \tilde{W}_{n,loc}^1(D)$, $f^{-1} \in \tilde{W}_{n,loc}^1(D')$, $1 < s \leq n$ и для любой точки $y \in G$

$$I\left(\int_D \left(\frac{|\nabla f|^n}{J(x, f)}\right)^s \|x - y\|^{-\alpha} d\sigma_x\right)^s < M \quad (4.3.2.1)$$

если $\alpha > n - s$, то на любом компакте A из области G функция f эквивалентна некоторой непрерывной функции. [44]

Доказательство.

Доказательство теоремы следует из теоремы Арцела. Для этого построим равностепенно непрерывную и равномерно ограниченную на K последовательность функций, сходящихся к функции f почти везде в G .

Рассмотрим последовательность ε -усреднений функции f по С.Л. Соболеву при достаточно малых ε .

Где ε – усреднением функции f по С.Л. Соболеву [37, с. 34] называется функция

$$f_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-u}{\varepsilon}\right) f(u) du = \varepsilon^{-n} \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) f(x-u) du$$

Из [9, с. 79] $f_\varepsilon = 0$ вне области G . Известно [37, с. 34], что функция f_ε бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$ и $\|f_\varepsilon - f\|_p, \mathbb{R}^n \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Существуют открытые множества G_1 и G_2 такие, что компакт

$$K \subset G_1 \subset G_2, \bar{G}_1 \subset G_2, \bar{G}_2 \subset G$$

где G_i – замыкание множества $G_i, i = 1, 2$. Покажем, что для достаточно малых ε

$$I\left(\int_G \left(\frac{|\nabla f|}{J(x, f)}\right)^n, G_2, y\right) < M, y \in G_2$$

Известно [37, с. 172], что $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\varepsilon$. Используя обобщенное неравенство Минковского [37, с. 27] с показателем $p = s$ и условие (4.3.2.1) получим

$$\begin{aligned} I\left(\int_{G_2} \left(\frac{|\nabla f_\varepsilon|}{J(x, f)}\right)^n, G_2, y\right) &= \\ &= \left[\int_{G_2} \varepsilon^{-n} \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \left(\frac{|\nabla f(x-u)|}{J(x, f)}\right)^n du \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right]^{\frac{1}{s}} \\ &\leq \varepsilon^{-n} \int_{B(0,\varepsilon)} \left[\int_{G_2} \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \left(\frac{|\nabla f(x-u)|}{J(x, f)}\right)^n \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right]^{\frac{1}{s}} du \\ &\leq \varepsilon^{-n} \int_{B(0,\varepsilon)} \left[\varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \int_{G_2} \left(\frac{|\nabla f(x-u)|}{J(x, f)}\right)^n \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right]^{\frac{1}{s}} du \\ &\leq \varepsilon^{-n} M \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) du = M \quad (4.3.2.2) \end{aligned}$$

если $(y-u) \in G$, т.е. при $\varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 меньше расстояния от границы множества G_2 до границы G .

Из неравенства (4.3.2.2) следует, что $\forall u \in G_2$ выполнено неравенство:

$$\int_{B(y,r)} \left| \frac{|\nabla f_\varepsilon(x)|^n}{J(x,f)} \right|^s d\sigma_x < n^{\frac{n}{2}} M r^\alpha \quad \text{если } B(y,r) \subset G_2. \quad (4.3.2.3)$$

Из (4.3.2.3) следует, что непрерывные функции f_ε при $\varepsilon < \varepsilon_0$ удовлетворяют условию леммы Ч. Морри [38, с. 11], поэтому для любых точек x, y таких, что шар

$$B\left(\frac{x+y}{2}, \frac{3}{2}|x-y|\right) \subset G_2; |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| < N|x-y|^\beta$$

где $\beta = \frac{\alpha-n+s}{s}$ и N зависит от M, n, s, α .

Таким образом семейство функций f_ε при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на K равномерно непрерывно. Покажем, что функции f_ε при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на K ограничены одним числом. Существует функция $\eta \in D$ такая, что ее носитель лежит в G_2 и

$$\eta(x) = 1 \text{ для } x \in G_1 \text{ [39, с. 16].}$$

Функция $f\eta \in W_p^1(\mathcal{R}^n)$. Доопределим $f(x)=0$ вне области G . Для $\varphi \in D$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}^n} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} f + \eta \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \varphi dx &= \int_G \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} f + \eta \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \varphi dx = \int_G \frac{\partial \eta}{\partial x_i} f \varphi dx + \int_G \eta \varphi \frac{\partial f}{\partial x_i} dx \\ &= \int_G \frac{\partial \eta}{\partial x_i} f \varphi dx - \int_G f \frac{\partial(\eta \varphi)}{\partial x_i} dx = - \int_G f \eta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \end{aligned} \quad (4.3.2.4)$$

Из (4.3.2.4) следует, что обобщенная производная

$$\frac{\partial(\eta, f)}{\partial x_i} = \frac{\partial \eta}{\partial x_i} f + \eta \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (4.3.2.5)$$

Покажем, что для функции ηf

$$I \left[\left| \frac{|\nabla \eta f|^n}{J(x,f)} \right|^s \|x-y\|^{-\alpha} \right] < M \quad \text{для } \forall u \in K$$

Из (4.3.2.5) следует, что

$$I \left[\left| \frac{|\nabla \eta f|^n}{J(x, \eta f)} \right|^s \|x - y\|^{-\alpha} \right] \leq I \left[\left| \frac{|\nabla \eta|^n}{J(x, \eta f)} f \right|^s \|x - y\|^{-\alpha} \right] + I \left[\left| \eta \frac{|\nabla f|^n}{J(x, \eta f)} \right|^s \|x - y\|^{-\alpha} \right] \leq I \left[\left| \frac{|\nabla \eta|^n}{J(x, \eta f)} f \right|^s \|x - y\|^{-\alpha} \right]_{y \in G_1} + I \left[\left| \eta \frac{|\nabla f|^n}{J(x, f)} \right|^s \|x - y\|^{-\alpha} \right]_{y \in G_2} \leq A d^{\frac{-\alpha}{s}} + CM = M_1 \quad (4.3.2.6)$$

$$A = \max \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad x \in G_2$$

$$C = \max \eta(x) \quad x \in G_2$$

d -расстояние между границами G_1 и G_2

Известно, что [40, с. 147] поэтому функция ηf_ε удовлетворяет условиям теоремы, и, применяя условие Гельдера и оценки (4.3.2.6) получаем.

$$\begin{aligned} \left| \eta(x) \frac{|\nabla f_\varepsilon|^n}{J(x, f)} \right| &= \frac{1}{\omega_{n-1} \mathbb{R}_n} \int \frac{|\nabla \eta f_\varepsilon|^n}{J(x, f)} (x - y) \frac{y_i}{\|y\|^n} d\sigma_y \leq \\ &\frac{1}{\omega_{n-1} G_2} \int \frac{|\nabla \eta f_\varepsilon|^n}{J(y, f^{-1})} \frac{d\sigma_y}{\|y - x\|^{n-1}} \leq \\ &\frac{1}{\omega_{n-1}} \left(\int_{G_2} \left(\frac{|\nabla \eta f_\varepsilon|^n}{J(y, f^{-1})} \right)^p |y - x|^{-\alpha} d\sigma_y \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{G_2} |y - x|^m d\sigma_y \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq M_2 \end{aligned}$$

Где $m = \frac{np-p-\alpha}{p-1}$, $m + n > 0$, M_2 зависит от M_1, n и диаметра области G_2 .

Для $x \in K$ $\eta(x) \nabla f_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x)$ и $|f_\varepsilon| \leq M_2$ следовательно равномерно ограничена.

Таким образом, на K семейство функций f_ε , $\varepsilon < \varepsilon_0$ равномерно непрерывно, равномерно ограничено, следовательно по т. Арцела из семейства можно выделить подпоследовательность функций $|f_n(x)|$ равномерно сходящуюся на K к некоторой непрерывной функции ψ . Таким образом, получившиеся функции f и ψ эквивалентны.

Замечание 4.3.3 Построенные У.К. Асанбековым и А.Н. Малютиной [41,42] примеры показывают, что в рассматриваемых подмножествах функций класса $W_p^1(G)$ с $p = n$ существуют функции не принадлежащие ни одному из классов $W_l^1(G)$ при $l > n$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что поставленные задачи решены:

- 1) показано, что понятия классической и обобщенной производной различны в том смысле, что из существования одной из них не следует существование другой. Приведены соответствующие примеры,
- 2) доказана полунепрерывность снизу отображений с $K_{I,s}$ - усредненной характеристикой,
- 3) исследовано поведение отображений с s -усредненной характеристикой в окрестности изолированной особой точки и доказана оценка для модуля непрерывности отображения,
- 4) доказана непрерывность отображения с (s, k) - усредненной характеристикой.

Публикации (2, индексированных в РИНЦ) и выступления на конференциях:

- 1) Бердалиева М. А., Малютин А.Н. Теорема о полунепрерывности снизу для отображений с s -усредненной характеристикой // Сборник тезисов Всероссийской молодежной науч. конф. «Все грани математики и механики». 24-28 апреля 2018 г./ Томский гос. ун-т. – Томск: Издательский Дом Томского гос. ун-та, 2018.
- 2) Бердалиева М.А. Обобщенная производная и отображения с s -усредненной характеристикой: примеры // Материалы 56-й Междунар. науч. студ. конф. 22-27 апреля 2018 г./ Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018. -228 с.
- 3) Бердалиева М. А. Полунепрерывность снизу отображений с s -усредненной характеристикой // Сборник тезисов Всероссийской конференция по математике и механике: 2-4 октября 2018 г. – Томск: Издательский Дом Томского гос. ун-та, 2018. - 136 с.
- 4) Бердалиева М.А. Малютин А.Н. Полунепрерывность снизу отображений с s -усредненной характеристикой // В сборнике:

Прикладные задачи математики: материалы XXVI междунар. научн. -техн. конф. / Севастоп. гос. ун-т; научн. ред. С. О. Папков – Севастополь, 2018. – 265 с.

- 5) Малютина А.Н., Бердалиева М.А., Асанбеков У.К. О непрерывности отображения с s -усредненной характеристикой // Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2020» / под ред. В. А. Костина. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2020 – 340 с.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Grötzsch . Über die Verzerrung bei Schlichten nichtkonformen Abbildungen. — Ber. Sachs. Akad. Wiss., 1928, 80, 503—507.
2. М. А. Лаврентьев . Sur une méthode géométrique dans la représentation conforme. — Atti Congr. internat. Bologna, 1928, 3, 241
3. М. А. Лаврентьев . Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М., изд-во «Наука», 1962, стр. 1—136.
4. М. А. Лаврентьев . Les problèmes de Γ hydro dynamique et les modèles mathématiques. — Proc. Internat. Congr. Appl. Mech. Stanford, 1969, p. 43—49.
5. Лаврентьев М.А. Об одном дифференциальном признаке гомеоморфности отображений трехмерных областей // ДАН СССР, 20, № 4. 1938. — С. 241-242.
6. Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. — Новосибирск: Наука, 1982. — 288 с.
7. Martio O., Rickman S. Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings. // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. 1969. — № 448, p. 1-40.
8. Сычев А.В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983. — 152 с.
9. Полецкий Е.А. Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. Сборник. 1970. — Т.83 (125), № 2 (10) С. 261-273.
10. Крушкаль С.Л. Об отображениях, квазиконформных в среднем. // Докл. АН СССР. — 1964, 157, № 3. — С. 517-519.
11. Миклюков В.М. Об искажении емкости при отображениях, квазиконформных в среднем // Материалы итог. науч. конф. по мат. и мех. за 1970 г. Т.1. — Томск: Изд-во Томск. ун-та. — 1970. — С. 43-45
12. Стругов Ю.Ф. Отображения, квазиконформные в среднем. Новосибирск: 1979. — 39 с. (Пре- принт СО АН СССР. Ин-т математики).

- 13.Кругликов В.И., Пайков В.И. Непрерывные отображения с конечным интегралом Дирихле // Докл. АН СССР. 1979. – Т. 249, № 5. – С. 1049-1052.
- 14.Малютина А.Н. Особенности отображений с s -усредненной характеристикой // Вестник ТГУ. Томск: Изд. ТГУ. 2003. – № 280, С. 65-70.
- 15.Кругликов В.И. Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сборник. 1986. – Т. 130, № 2. – С. 185-206.
- 16.T. Iwaniec and V. Šverák On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), p. 181–188.
- 17.Astala K., Iwaniec T., Koskela P. and Martin G. Mappings of BMO-bounded distortion // Math. Annalen 317 (2000), p. 703–726.
- 18.Koskela P. and Onninen J. Mappings of finite distortion: capacity and modulus inequalities // Dept.Math. Stat., University of Jyväskylä, Preprint 257 (2002), p. 1–32.
- 19.Игнатьев А.А., Рязанов В.И. Конечное среднее колебание в теории отображений // Український математичний вісник Том 2 (2005), № 3, С. 395 – 417.
- 20.Мартіо О., Рязанов В., Сребро У. и Якубов Э. К теории Q -гомеоморфизмов // ДАН России. 2001 – Т. 381, № 1, С. 20-22.
- 21.Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Q -homeomorphisms, Contemporary Math. 2004. – V. 364, p. 193-203.
- 22.Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. On Q -homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. 2005. – V. 30, № 1, p. 1-21.
- 23.Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math. 2004. – V. 93, p. 215-236.
- 24.R. Bellman, Introduction to Matrix Analysis, SIAM, Philadelphia, PA, USA, Ch. 8, § 7, 1997.

- 25.Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
- 26.Казимиров В.И. О полунепрерывности интегралов вариационного исчисления // УМН. 1956. – Т. XI, вып. 3 (69).
- 27.Малютина А.Н., Елизарова М.А. Дифференциальные свойства отображений с s -усредненной характеристикой // Вестник ТГУ. Томск: Изд-во науч.-техн. лит. – № 300 (I). – 2007 г. – С. 124-129
- 28.Малютина А.Н., Елизарова М.А. Теоремы о полунепрерывности снизу отображений с s -усредненной характеристикой // Вестник ТГУ. Математика и механика. Томск: Изд-во науч.-техн. лит. 2009. – № 4(8), С.46-52.
- 29.Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. – 288 с.
- 30.Väisälä J. Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings. – Lectures and Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New-York, 1971. – 144 p.
- 31.Асанбеков У.К., Малютина А.Н. Примеры отображений с s -усредненной характеристикой/ Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского/ Материалы Тринадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции.-Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 21-27 августа 2017.-Т. 54-420 с
- 32.Ильин В. А. и др. Математический анализ. Начальный курс/В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Под ред. А. Н. Тихонова,— 2-е изд., перераб., — М.: Изд-во МГУ, 1985. — 662 с.
- 33.Бердалиева М. А., Малютина А. Н. Обобщенная производная и отображения с s -усредненной характеристикой // Материалы 56-й Междунар. науч. студ. конф. 22-27 апреля 2018 г./ Новосиб. гос. ун-т. — Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018. -228 с.
- 34.Малютина А.Н., Елизарова М.А. Теоремы о полунепрерывности снизу отображений с s -усредненной характеристикой // Вестник ТГУ.

- Математика и механика. Томск: Изд-во науч.-техн. лит. 2009. – № 4(8), С.46-52.
35. Кудьявин В. С. Поведение класса отображений, квазиконформных в среднем, в изолированной особой точке // ДАН СССР. 1984. – Т. 277, № 5, С. 1056-1058.
36. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. Общие принципы квантовой теории поля / под общ. ред. Суханова А. Д.. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 744 с. — ISBN 5-9221-0612-0.
37. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., Наука, 1969.
38. Малютина А. Н., Асанбеков У. К. О модуле непрерывности отображений с s -усредненной характеристикой // Вестник Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2019. №59 с. 11-15.
39. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М., Наука, 1976.
40. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., Мир, 1973.
41. Асанбеков У.К., Малютина А.Н. Вычисление модуля сферического кольца // В сборнике: Комплексный анализ и приложения материалы VIII Петрозаводской международной конференции. 2016. С. 103-106.
42. Асанбеков У.К., Малютина А.Н. Нахождение сферического модуля некоторых семейств кривых // В сборнике: ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА С. Г. КРЕЙНА - 2016 материалы международной конференции. Под редакцией В. А. Костина. 2016. С. 57-60.
43. Бердалиева М.А. Малютина А.Н. Полунепрерывность снизу отображений с s -усредненной характеристикой // В сборнике: Прикладные задачи математики: материалы XXVI междунар. научн. -техн. конф. / Севастоп. гос. ун-т; научн. ред. С. О. Папков – Севастополь, 2018. – 265 с.

44. Малютина А.Н., Бердалиева М.А., Асанбеков У.К. О непрерывности отображения с s -усредненной характеристикой // Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2020» / под ред. В. А. Костина. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2020 – 340 с.

Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: Berdalieva Madina berdalieva_madina@mail.ru / ID: 7487999
Проверяющий: Berdalieva Madina (berdalieva_madina@mail.ru) / ID: 7487999
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»- <http://users.antiplagiat.ru>

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 4
Начало загрузки: 16.06.2020 09:47:03
Длительность загрузки: 00:00:05
Имя исходного файла: Диплом 16.06.2020.pdf
Название документа: ВКР Бердалиева М.А.
Размер текста: 1 кБ
Символов в тексте: 46256
Слов в тексте: 7140
Число предложений: 592

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 16.06.2020 09:47:09
Длительность проверки: 00:01:44
Комментарии: не указано
Модули поиска: Модуль поиска Интернет



ЗАИМСТВОВАНИЯ

29,77%

САМОЦИТИРОВАНИЯ

0%

ЦИТИРОВАНИЯ

0%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ

70,23%

Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа.
Самоцитирования — доля фрагментов текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа, по отношению к общему объему документа.

Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.

Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.

Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.

Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объему документа.

Заимствования, самоцитирования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Источник	Ссылка	Актуален на	Модуль поиска
[01]	2,18%	Диссертация на тему «Некоторые свойства отображений с s-усредненн...	http://dissercat.com	06 Мар 2019	Модуль поиска Интернет
[02]	8,68%	Некоторые свойства отображений с s-усредненной характеристикой - с...	http://fizmathim.com	18 Мая 2016	Модуль поиска Интернет
[03]	0%	http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/services/Download/vtls:000396382/SOURCE1	http://vital.lib.tsu.ru	13 Мар 2020	Модуль поиска Интернет

Еще источников: 17
Еще заимствований: 18,91%