Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Механико-математический факультет
Кафедра математического анализа и теории функций

ДОПУСТИТЬ К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ ГЭК
Руководитель ООП
Д.-р.. физ.-мат. наук, профессор
__________А.В.Старченко
«_5_» _июня_ 2019 г.

НАУЧНЫЙ ДОКЛАД
об основных результатах подготовленной научно – квалификационной работы (диссертации)
КАРДИНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ В СТЕПЕНЯХ СТРЕЛКИ ЗОРГЕНФРЕЯ И ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ
ПО ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЕ ПОДГОТОВКИ НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ КАДРОВ В АСПИРАНТУРЕ
направление подготовки 01.06.01 – Математика и механика

Федоров Антон Александрович

Научный руководитель
д-р. физ.-мат. наук, профессор
__________С.П.Гулько
подпись
«_5_» _июня_ 2019 г.

Автор работы
аспирант
__________А.А. Федоров
подпись

Томск-2019

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Прямая Зоргенфрея или стрелка Зоргенфрея, или просто стрелка S – это вещественная прямая с топологией, где открытыми множествами являются все полуинтервалы [a;b). Она названа в честь Р.Зоргенфрея, в 1947 году представившего её как пример паракомпактного пространства, квадрат которого не нормален([6]). До этого в 1929 году П.С.Александровым и П.С. Урысоном было введено пространство «две стрелки», состоящего из двух множеств, прямой и обратной стрелок Зоргенфрея.

Прямая Зоргенфрея и производные от неё (например конечные и счётные степени) исследуется во многих работах, часто как контрпример к разным гипотезам. В частности, для всех конечных и счётной степени доказаны совершенность (Р.Хис и Е.Майкл [5]), субпаракомпактность (Д.Лутцер [8]), полнота по Чеху (Ф.Экертсон [6]). Также Д.Лутцером и Д.Бурке доказана [3] негомеоморфность различных конечных степеней стрелки друг другу.

Важным инструментом исследования топологических пространств являются кардинальные инварианты или кардинальные функции – функции, которые каждому топологическому пространству сопоставляют некоторый кардинал. В частности рассматривают плотность – наименьшую мощность всюду плотного подпространства, вес – наименьшую мощность базы пространства, сетевой вес - наименьшую мощность сети пространства, спред – супремум мощностей дискретных подпространств, экстент – супремум мощностей замкнутых дискретных подпространств, число Линделёфа – наименьший кардинал λ, такой, что из всякого открытого покрытия пространства можно извлечь подпокрытие мощности не больше λ. Также для каждого кардинального инварианта $\lambda(X)$ (например плотности пространства) рассматривают наследственный инвариант $h\lambda(X)$ (например, наследственная плотность)– супремум инварианта λ по всем подпространствам. Известно, что вес и мощность не меньше сетевого веса, сетевой вес не меньше наследственной плотности и наследственного числа Линделёфа, число Линделёфа и наследственная плотность не меньше экстента.

Про кардинальные инварианты степени стрелки Зоргенфрея известно следующее. Стрелка Зоргенфрея наследственна линделёфова и наследственна сепарабельна, то есть для неё и всех её подпространств наследственное число Линделёфа и наследственная плотность счётна. При этом квадрат стрелки Зоргенфрея, не линделёфов (число Линделёфа несчётно), так как он содержит замкнутое дискретное подпространство - антидиагональ $y= -x$, то есть экстент квадрата стрелки равен континууму. Также Д.Бурке и Дж.Мур доказали, что степень подпространства прямой Зоргенфрея линделёфова тогда и только тогда, когда не содержит дискретных подмножеств, подобных антидиагонали.

Данная работа частично восполняет пробел в знаниях о кардинальных инвариантах стрелки.

Другой важный вопрос при изучении топологического пространства – вопрос о его компактификациях. А.Емерик и В.Кульпа [7] доказали, что не существует связной компактификации стрелки Зоргенфрея. Как уже упоминалось Ф.Экертсон [6] доказал полноту по Чеху для стрелки Зоргенфрея и её степеней, то есть доказал, что нарост всякой компактификации у стрелки и её степеней имеет тип F_σ (представляется в виде счётного объединения замкнутых множеств). Одной из компактификаций прямой Зоргенфрея является упомянутое ранее пространство «две стрелки». Её нарост гомеоморфен самой прямой Зоргенфрея, и следовательно, имеет мощность равную континууму. Возникает вопрос о том, какой может быть мощность нароста компактификации прямой Зоргенфрея.

Цель работы: Найти минимальную мощность нароста любой компактификации прямой Зоргенфрея, исследовать кардинальные инварианты подмножеств степеней прямой Зоргенфрея, исследовать кардинальные инварианты подмножеств Cp(S)

Общая методика исследования. В диссертации используются методы и приёмы общей топологии и Cp-теории.

Научная новизна. Все основные результаты диссертационной работы являются новыми. Ниже перечислены основные результаты.

Мощность нароста всякой компактификации прямой Зоргенфрея имеет мощность не меньше континуума

Спред, экстент, число Линделёфа, наследственное число Линделёфа и наследственная плотность совпадают и равны супремуму мощностей множеств таких, что для любых двух точек x и y существует координата x_i, которая меньше координаты y_i

Сетевой вес подпространства P пространства Cp(S) лежит между мощностями множеств T_1 и T, где T_1 – объединение всех множеств точек разрыва относительно евклидовой топологии первого рода функций из P, T – объединение всех множеств точек разрыва относительно евклидовой топологии первого рода функций из P

Спред, наследственное число Линделёфа и наследственная плотность подпространства P пространства Cp(S) не превосходит кардинала $\lambda=\sup(s(X_n))$, где X_n - множество точек $(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset \mathbb{S}^n$, таких, что $\exists f \in A$, f имеет разрыв в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ относительно евклидовой топологии. Кроме того, если каждая функция $f \in A$ имеет разрывы только 1-го рода, то $\alpha(A) = \lambda$.

Теоретическая и практическая ценность. Данная работа теоретического характера. Результаты её могут использоваться в последующих исследованиях прямой Зоргенфрея, теории топологических пространств функций.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались на конференциях: Международная научная конференция "Александровские чтения-2016", Всероссийская конференция по математике и механике (Томск, 2018 год). По теме работы опубликована статья А. А. Фёдоров, “Некоторые свойства множеств отображений в топологии поточечной сходимости”, *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.,* 2014 Также они неоднократно докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры теории функций Томского государственного университета.

Содержание работы.

Прямая Зоргенфрея или стрелка Зоргенфрея S – это вещественная прямая с топологией, где открытыми множествами являются все полуинтервалы [a;b).

Компактификация или компактное расширение хаусдорфова пространства X – это пара (cX,c) – где cX – хаусдорфов компакт, c – гомеоморфное вложение X в cX и c(X) всюду плотно в cX. Пространство c(X) в компактификации обычно отождествляется с самим пространством X. Нарост компактификации – это пространство cX\X

В первой части этой работе доказывается, что нарост всякой компактификации прямой Зоргенфрея имеет мощность не меньше континуума. Для доказательства этого утверждения сначала доказывается простое обобщение равносильных условий полноты по Чеху из книги Энгелькинга:

Теорема 1. Следующие условия эквивалентны:

1) Нарост cX\c(X) всякой компактификации cX пространства X является F_λ-множеством в cX. (то есть является объединением семейства мощности λ замкнутых в cX множеств)
2) Нарост $\beta X \setminus \beta(X)$ является F_λ-множеством в βX
3) Существует компактификация cX пространства X, такая, что нарост cX\c(X) является F_λ-множеством в cX.

Для доказательства этой теоремы достаточно заменить F_σ-множества в доказательстве из книги на F_λ-множества, а счётные объединения на объединения мощности λ.

Известно, что одной из компактификаций прямой Зоргенфрея есть пространство «две стрелки». Нарост этой компактификации гомеоморфен прямой Зоргенфрея. Каждое компактное подмножество прямой Зоргенфрея не более чем счётно, поэтому её нельзя представить в виде является объединением семейства мощности λ компактных множеств, где λ меньше континуума. Отсюда следует, что нарост компактификации «две стрелки» не является F_λ-множеством в этой компактификации, так как каждое замкнутое подмножества компактного множества компактно. Используя теорему 1, получаем следующий результат:

Теорема 2. Нарост любой компактификации прямой Зоргенфрея не является F_λ-множеством в этой компактификации, где λ меньше континуума.

Отсюда получаем:

Следствие. Нарост всякой компактификации прямой Зоргенфрея имеет мощность не меньше континуума.

Действительно, если нарост имеет мощность меньше континуума, то представив его как объединение одноточечных множеств получим, что нарост является F_λ-множеством в этой компактификации, где λ меньше континуума.

Во второй части данной работы вводятся несколько определений. Вводится частичный порядок на степенях прямой: $a \geq b$ тогда и только тогда, когда все координаты точки a больше или равны соответствующих координат точки b. Назовём дискретом множество, у которого любые две точки несравнимы относительно введённого частичного порядка. Правой (соответственно левой) топологией на степенях прямой будем называть топологию, в которой окрестностью точки a является множество $\{x; x \geq a\}$ ($\{x; x \leq a\}$), где $\geq$ - порядок, определённый выше.

Подмножество степени вещественной прямой является дискретом, тогда и только, тогда, когда оно является дискретным в правой топологии (это же верно для левой топологии). Дискреты являются замкнутыми дискретными множествами в топологии степени прямой Зоргенфрея.

В этой части доказывается, что число Линделёфа, экстент, спред, наследственное число Линделёфа и наследственная плотность для подмножеств степени прямой Зоргенфрея совпадают и равны супремуму мощностей дискретов, содержащихся в этом подмножеству, а также спреду, наследственному числу Линделёфа и наследственной плотности этого подмножества относительно правой и левой топологии. При этом все кардинальные инварианты считаются бесконечными.

В статье [7] доказано, что любая конечная степень прямой Зоргенфрея совершенна (любое открытое множество представляется в виде счётного объединения замкнутых множеств) и субпаракомпактна (в любое открытое покрытие можно вписать замкнутое σ-локально конечное). Из этих утверждений выводится субпаракомпактность любого подмножества конечной степени прямой Зоргенфрея, а также то, что число Линделёфа и наследственное число Линделёфа этого подмножества не превосходит спреда.

Доказывается обобщение теоремы из [4]: в любом несчётном дискретном множестве регулярной мощности содержится равномощный ему дискрет. Отсюда так как каждый дискрет замкнутое множество, экстент подмножества равен спреду, а так как число Линделёфа всегда больше или равно экстенту получаем, что экстент, спред, число Линделёфа и наследственное число Линделёфа для рассматриваемого множества совпадают.

Далее переходим к правой топологии и учитывая, что она слабее топологии степени Зоргенфрея, получаем равенство наледственного числа Линделёфа и спреда для подпространств степени прямой в правой топологии. Учитывая, что дискретные множества в правой топологии и левой топологии совпадают, получаем что спред рассматриваемых подпространств в правой и левой топологии совпадает. Используя теорему о наследственной плотности и наследственном числе Линделёфа, получаем равенство наследственного числа Линделёфа подпространства в левой топологии наследственной плотности в правой топологии. Отсюда получаем равенство наследственной плотности, наследственного числа Линделёфа и спреда в правой топологии.

Далее пользуясь тем, что правая топология слабее топологии степени прямой Зоргенфрея, получаем, что наследственная плотность множества в правой топологии не превосходит наследственной плотности в топологии степени Зоргенфрея. В обратную сторону неравенство доказывается построением всюду плотного множества с помощью разбиений пространства на брусы.

В третьей части рассматриваются кардинальные инварианты подпространств пространства Cp(S).

Доказывается следующая теорема, позволяющая получать оценки снизу:

Теорема 2. Пусть $T -$ *несчётное подмножество в* $\mathbb{R}, X = \{f_t\}_{t\in T} \subset M^{\mathbb{R}}$ – множество отображений из $\mathbb{R}$ в метрическое пространство M в топологии поточечной сходимости, α – несчётный регулярный кардинал, такой, что $\alpha \leq |T|$, $\forall t \in T \ \ \exists \lim_{x\to t-0} f_t(x) \neq f_t(t)$ (или $\forall t \in T \ \ \exists \lim_{x\to t+0} f_t(x) \neq f_t(t)$). Тогда существует $\tilde{T} \subset T$, такое, что $|\tilde{T}| \geq \alpha$ и для любой точки $t \in \tilde{T}$ существует окрестность U_t функции f_t, которая не содержит точек $s \in \tilde{T}$, таких, что $s > t$.

Используя эту теорему, а также используя доказательство теоремы про сетевой вес из книги [1], доказываем теорему:

Теорема 3. Пусть $P \subset C_p(\mathbb{S})$ – подпространство пространства непрерывных функций из прямой Зоргенфрея в топологии поточечной сходимости. Рассмотрим функции из P как функции из $\mathbb{R}$ в евклидовой топологии. Пусть T – объединение всех множеств точек разрыва функций из P, T_1 – объединение всех множеств точек разрыва первого рода функций из P. Тогда $|T_1| \leq nw(P) \leq |T|$.

Доказательство следующей теоремы основано на §1.4 из книги[1]

Теорема 4. Пусть $A \subset C_p(\mathbb{S}), \alpha \in \{s, hd, hl\}, \lambda = \sup\,(s(X_n))$, где X_n - множество точек $(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset \mathbb{S}^n$, таких, что $\exists f \in A$, f имеет разрыв в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ относительно евклидовой топологии. Тогда $\alpha(A) \leq \lambda$, кроме того, если каждая функция $f \in A$ имеет разрывы только 1-го рода, то $\alpha(A) = \lambda$.

Литература

[1] Архангельский А.В. Топологические пространства функций. - М.: Издательство МГУ. – 1989. – 222с.

[2] Энгелькинг Р. *Общая топология (пер. с англ.)* / Р.Энгелькнг. – М.: Мир. – 1986. -751с.

[3] Burke, D.K. *On powers of certain lines* / D.K. Burke, D.J. Lutzer // Topology and its applications/ - Vol.26. – 1987. – C.251-261.

[4] Burke, D.K. *Subspaces of the Sorgenfrey line* / D.K.Burke, J.T. Moore // Topology and its applications/ - Vol.90. – 1998. – C.57-68

[5] Heath, R.W *A property of the Sorgenfrey line*/ R.W Heath, E.A.Michael// Compositio Math/ - Vol.23. – 1971. – C.185-188

[6] Eckertson, F.W. Sums, products, and mappings of weakly pseudocompact spaces/ F.W. Eckertson // Topology and its applications/ - Vol.72. – 1996. – C.179-187

[7] Emeryk, A. *The Sorgenfrey line has no connected compactification* / A. Emeryk, W. Kulpa // Comment Math. Univ. Carolin. - Vol.18, No.3.. – 1977. – C.483-487

[8] Lutzer, D.J. *Another property of the Sorgenfrey line/* D.J. Lutzer // Compositio Math/ - Vol.24. – 1972. – C.359-363

[9] Michael, E.A. *Paracompactness and the Lindelof property in finite and countable Cartesian products* / E.A.Michael // Compositio Math/ - Vol.23. – 1971. – C.199-214

[10] Sorgenfrey, R.H. *On the topological products of paracompact spaces* / R.H. Sorgenfrey// Bull. Amer. Math. Soc.

АНТИПЛАГИАТ
ТВОРИТЕ СОБСТВЕННЫМ УМОМ

Отчет о проверке на заимствован

Автор: antfed1991@yandex.ru / ID: 6894176
Проверяющий: (antfed1991@yandex.ru / ID: 6894176)

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»- http://users.ar

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 2
Начало загрузки: 21.06.2019 00:51:59
Длительность загрузки: 00:00:00
Имя исходного файла: научный доклад Федоров
Размер текста: 417 кБ
Символов в тексте: 14341
Слов в тексте: 1816
Число предложений: 172

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 21.06.2019 00:52
Длительность проверки: 00:00:01
Комментарии: не указано
Модули поиска: Модуль поиска Ин

ЗАИМСТВОВАНИЯ	ЦИТИРОВА
6,91%	0%

Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, ко
Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но сист
документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выра
правовой документации.
Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или
Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиск
Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных
документа.
Заимствования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и
Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого
система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правом

проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Источник
[01]	**0%**	vestmim_2014_6_beta.pdf
[02]	**4,95%**	НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ В ТОПОЛО
[03]	**0,73%**	Непрерывные отображения прямой Зоргенфрея на веществе