Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2024. № 77. С. 95–110.
Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science. 2024. 77. pp. 95–110.

Научная статья
УДК 160.1
doi: 10.17223/1998863X/77/8

О СООТНОШЕНИИ ЛОГИКИ И ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ КАНТА

Анатолий Геннадьевич Пушкарский

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, Россия, pushcarskiy@mail.ru

Аннотация. Логика и философия математики играют ключевую роль в адекватном понимании всей критической философии Канта. Особенности интерпретации Кантом формальной логики и выработанная им в его критической философии трансцендентальная логика, с одной стороны, обусловливает конструктивный и синтетический характер математического познания, с другой стороны, разработанная им нетривиальная философия математики представляет собой ответ на ограничения традиционной логики в представлении математических знаний и попытку их преодоления. Конструирование математических понятий в чистом созерцании чувственной интуиции позволяет выйти за пределы этих ограничений в математическом познании.
Ключевые слова: логика Канта, философия математики Канта, интенсиональный подход в логике, аналитическое, синтетическое, конструирование понятий

Благодарности: исследования проведены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № 075-15-2019-1929 «Кантианская рациональность и ее потенциал в современной науке, технологиях и социальных институтах», реализуемый на базе Балтийского федерального университета имени И. Канта (Калининград).

Для цитирования: Пушкарский А.Г. О соотношении логики и философии математики Канта // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2024. № 77. С. 95–110. doi: 10.17223/1998863X/77/8

Original article

ON THE RELATIONSHIP BETWEEN LOGIC AND PHILOSOPHY OF MATHEMATICS IN KANT

Anatoly G. Pushkarsky

Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russian Federation, pushcarskiy@mail.ru

Abstract. For Kant's theoretical philosophy, logic was not at all a separate or peripheral discipline. Quite the opposite, it can be argued that formal general logic became a kind of a paradigm of his transcendental philosophy, and its central ideas are due to the specific nature of Kant's logical concept. Kant's philosophy of mathematics is of particular interest, since one of the central questions of his *Critique of Pure Reason* is the question of how mathematics is possible as a science of universal and necessary truths. Kant's theoretical philosophy cannot be understood without his mathematical concept, since the type of synthesis that, according to Kant, underlies mathematics is the same as for all other objects of perception. In addition, in his transcendental philosophy, the difference between the philosophical and mathematical methods turns out to be fundamental. Undoubtedly, Kant's original logical concept, including the construction of a new and non-standard transcendental logic, could not but have a significant impact on the main characteristics of his philosophy of mathematics. Their mutual influence may be of interest to anyone who wants to find the key to understanding Kant's philosophy in a more general context. The following central provisions of Kant's philosophy of mathematics, formulated by him in "The Transcendental Aesthetic", "The Transcendental Doctrine of Method" and other small fragments of the *Critique of Pure Reason*, can be distinguished: firstly, it is the idea of formality of both mathematical and any rational cognition (just as formal logic is the basis of "empty" logical forms, mathematics is formal, since it deals with pure a priori forms of intuitions); secondly, it is the doctrine of the synthetic a priori character of mathematical truths; thirdly, it is his idea that mathematical knowledge is realized through the construction of concepts, and, finally, it is the idea of the direct and necessary connection of mathematical knowledge with pure forms of intuitions, i.e. with extremely general areas of empirical experience. At the same time, the apparatus of traditional logic available to Kant had significant limitations that did not make it possible to adequately represent mathematical knowledge. On the one hand, the features of Kant's interpretation of formal logic and the transcendental logic developed by him in his critical philosophy determine the constructive and synthetic nature of mathematical knowledge; on the other hand, the non-trivial philosophy of mathematics developed by him is a response to the limitations of traditional logic and an attempt to overcome them. The construction of mathematical concepts in pure *a priori* intuition allows one to go beyond the limits of these limitations in mathematical knowledge, which had exceptional consequences for the history of modern philosophy of mathematics and the history of the foundations of mathematics. It must be assumed that the key features of Kant's logical concept and his philosophy of mathematics have not yet exhausted their heuristic possibilities for topical research in these areas of science and philosophy.

Keywords: Kant's logic, Kant's philosophy of mathematics, intensional approach in logic, analytical, synthetic, construction of concepts

Acknowledgments: The research was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Project No. 075-15-2019-1929 "Kantian rationality and its potential in modern science, technology and social institutions", implemented at Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad).

For citation: Pushkarsky, A.G. (2024) On the relationship between logic and philosophy of mathematics in Kant. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologiya. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science.* 77. pp. 95–110. (In Russian). doi: 10.17223/1998863X/77/8

Логика для теоретической философии Канта вовсе не была отдельной или периферийной дисциплиной. Совсем наоборот, можно утверждать, что формальная общая логика стала своеобразной парадигмой его трансцендентальной философии и ее центральные идеи обусловлены специфическим характером кантовской логической концепции. Особый интерес представляет философия математики Канта, поскольку одним из центральных вопросов первой критики Канта является вопрос, как возможна математика как наука о всеобщих и необходимых истинах. Теоретическую философию Канта невозможно понять без его математической концепции, поскольку тот тип синтеза, который, по мнению Канта, лежит в основе математики, такой же, как и для всех других объектов восприятия. К тому же в его трансцендентальной философии фундаментальным оказывается различие между философским и математическим методом. Несомненно, оригинальная логическая концепция Канта, включающая построение новой и нестандартной трансцендентальной логики, не могла не оказать значительного воздействия на основные характеристики его философии математики. Их взаимовлияние может представлять интерес для всех, кто хочет найти ключ к пониманию философии Канта, и в более общем контексте.

На первый и неискушенный взгляд кажется, что логика и философия математики Канта непосредственно связаны с общепринятой концепцией традиционной логики и потому ограничены ее рамками. И, соответственно, его понимание логики и математики должно быть признано архаичным и неадекватным их современному восприятию. Тем не менее, как бы ни отличались его представления об основных понятиях математики от нашего, как бы они не были запутанны, если сравнивать его с общепринятыми, основанными на современной логике и теории множеств, оценка его концепции логики и математики претерпела определенные и иногда существенные изменения в связи с историко-логическими и историко-философскими изысканиями последнего времени. И надо полагать, что ключевые особенности логической концепции Канта и его философии математики и сегодня не исчерпали своих эвристических возможностей для актуальных исследований в данных областях науки и философии.

О специфических особенностях логической концепции Канта

Основной целью теоретической философии Канта было построение априорной структуры сознания и выявления фундаментальных условий рационального познания. При этом главной характеристикой такого познания является способность познания общезначимых истин. Определением общих условий признания некоторых суждений как общезначимо истинных занимается логика. Поэтому в основание построения своей теории сознания Кант полагает общую чистую логику, которая понимается им как канон и негативный критерий истины. Собственно говоря, он сам напрямую на это указывает: «Общая логика построена по плану, совершенно точно совпадающему с делением высших познавательных способностей. Эти способности суть рассудок, способность суждения и разум. Поэтому общая логика трактует в своей аналитике о понятиях, суждениях и умозаключениях сообразно функциям и порядку упомянутых умственных способностей» [5. С. 216]. Однако общая чистая логика Канта «имеет дело исключительно с априорными принципами и представляет собой канон рассудка и разума, однако только в отношении того, что формально в их применении, тогда как содержание может быть каким угодно (эмпирическим или трансцендентальным)» [5. С. 156]. Эта логика не может быть использована в качестве органона, т.е. метода познания и получения нового знания, поскольку в ее экспликации «Кант опирался на специфическое понятие логической формы и в качестве основания для своего взгляда на логику выдвигал тезис о „пустоте“ логических форм. Анализ текстов Канта и сопоставление их с современными взглядами на логику и логическую форму намечают следующую цепочку: (А) „пустота“ логических форм → (Б) отвлечение от содержания и объектов мышления → (В) аналитичность общей логики, где стрелка обозначает отношение обусловливания» [1. С. 33]. По мнению Канта, общая чистая логика является вполне законченной и совершенной наукой, уже созданной Аристотелем, и служит для него непосредственным образцом для создания *трансцендентальной логики*, которая понимается им как наука, систематически излагающая способы построения, организации, преобразования и приращения априорного знания. Эта логика, по существу, представляет собой ядро трансцендентальной философии Канта и ее взаимосвязь с формальной логикой не ограничивается общими структурными сходствами с последней. Кант применяет методы формальной логики, например, в классификации суждений и для описания логических функций рассудка. Кроме того, критика каждой познавательной способности начинается с изложения учения о ней традиционной логики, т.е. логического применения данной познавательной способности. В отличии от общей логики трансцендентальная логика синтетична, т.е. имеет дело с априорными синтетическими суждениями, которые общая логика не знает «даже по названию» и дает нам позитивный критерий истины.

Но насколько логическую концепцию Канта можно считать аристотелевской? Логическое учение Аристотеля – это в первую очередь его теория силлогизма. И традиционно она интерпретируется как дедуктивная система выводов на основе объемов понятий, представляющих собой термины категорических суждений, составляющих посылки и заключение силлогизма. И если мы обратимся к небольшой работе Канта «Ложное мудрствование в четырех фигурах силлогизма», то обнаружим, что в ней аристотелевский силлогизм подвергается суровой критике. В ней он сравнивает учение о фигурах и модусах силлогизма с колоссом, «голова которого скрывается в облаках древности, а ноги сделаны из глины» [4. С. 73], а саму силлогистику называет «атлетикой ученых», позволяющей «в ученом словопрении взять верх над неосмотрительным противником» и «искусством… которое в других отношениях, быть может и весьма полезно, но которое немного способствует интересам истины» [4. С. 73]. Кантовская критика кажется на первый взгляд необоснованной, но надо иметь ввиду, что «в истории логики складывался иной – альтернативный экстенсиональному – подход к интерпретации смыслов категорических суждений, которые составляют предмет исследования в силлогистических теориях. Суть этого подхода заключается в трактовке субъекта и предиката высказывания как понятийных конструкций и их анализе с точки зрения содержательных, а не объемных характеристик. Силлогистические константы при этом рассматриваются как знаки отношений между понятиями по содержанию» [10. С. 125]. В построении своей теоретической философии Кант практически всегда использует формы традиционного силлогизма, но дает свое определение умозаключения: «всякое суждение через опосредованный признак есть умозаключение» [4. С. 62]. Причем само суждение у Канта определяется следующим образом: «Высказывать суждение – значит сравнивать нечто как признак с какой-нибудь вещью» [4. С. 61]. По мнению В.Н. Брюшинкина, данное сведение умозаключений к суждениям у Канта как раз и «было вызвано особенностями его философских взглядов и, прежде всего, говорило о генетическом отношении между суждениями и умозаключениями» [1. С. 32]. В логике Кант принимает следующие два правила для всех умозаключений: «...первое и общее правило всех утвердительных умозаключений таково: признак признака есть признак самой вещи (nota notae est etiam nota rei ipsius), для всех отрицательных суждений: что противоречит признаку вещи, противоречит и самой вещи (repugnans notae repugnant rei ip si)» [4. С. 63]. Причем он предпочитает эти правила более традиционному Dictum de omni et nullo, которое утверждает, что все, что в понятии утверждается во всем объеме, утверждается и о каждом другом понятии, которое содержится в первом. Таким образом, как замечает Брюшинкин, «нетрудно заметить, что Nota notae главным образом говорит о содержании (признаках) рассматриваемых в умозаключении понятий, а Dictum – об объемах их. Поэтому первый принцип является существенно интенсиональным, второй – экстенсиональным. Кант настаивает на приоритете интенсиональных соображений и объявляет, что Dictum выводится из Nota notae, но не наоборот» [1. С. 34][1]. Сам Кант обосновывает это следующим образом: «Основание для доказательства этого правила ясно: то понятие, которое включается в другие, всегда обособлено от них как некоторый признак...» [4. С. 63–64]. Не сами силлогистические умозаключения, а их чисто экстенсиональные интерпретации оказываются неприемлемыми для него и «строго интенсиональный подход, выработанный Кантом в формальной логике, будет иметь важные следствия для его трансцендентальной логики, где он различает аналитические и синтетические суждения, что невозможно в рамках чисто экстенсионального подхода к логическим категориям» [8. С. 72].

Интенсиональную основу кантовской логики отмечает и Р. Ланье Андерсон, подробно разбирая кантовское понимание аналитичности и синтетичности в их применении к математическим объектам. Если исходить из правил деления понятий, данных Кантом в «Логике» Йеше, представляющих собой запись лекций Канта по логике, опубликованных в 1800 г.: «Относительно логического объема понятий имеют значение следующие общие правила:

1) что принадлежит или противоречит высшим понятиям, то принадлежит или противоречит и всем низшим понятиям, содержащимся под этим высшим: и

2) наоборот: что принадлежит или противоречит всем низшим понятиям, то принадлежит или противоречит и их высшему понятию» [6. С. 402], то «по сути, эти правила определяют условия эквивалентности для содержания и объема понятий. Они подразумевают, что понятия с одинаковым объемом также имеют такое же содержание и наоборот. Любые два таких понятия должны включать в себя те же самые признаки, „принадлежащие“ их содержанию или объему, но они также должны исключать те же самые признаки, которые „противоречат“ содержанию или объему… В этом смысле объем и содержание понятий не могут быть отделены друг от друга: любая разница в содержании влечет за собой разницу в его логическом объеме и наоборот» [13. P. 508]. Однако, как подчеркивает Андерсон в логике Канта, «характеристика как содержания, так и „логического объема“ является полностью „интенсиональной“ в нашем современном смысле…» [13. P. 508]. И более того, «интенсиональный характер трактовки Кантом отношений между понятиями не был естественным для ранней современной логики, и для него объем в логическом смысле всегда являеется множеством понятий, а не объектов» [13. P. 509, footnote 17].

Андерсон убедительно демонстрирует, в том числе и с помощью визуальных схем, что, поскольку кантовская логика, включающая в себя логику понятий, находящихся в строго иерархическом порядке наподобие древа Порфирия, строится на интенсиональных, содержательных отношения между такими понятиями, она была просто не в состоянии описать и обосновать современную Канту математическую практику. Он пишет: «Официально считается, что для Канта суждения являются аналитическими, если и только если предикат „содержится“ в субъекте. Я намерен защитить это включающее определение от распространенного обвинения в неясности и утверждаю, что

[1] Более подробно о приоритете правила Nota notae в общей логике Канта см. в [9].

арифметика в конечном смысле не может быть аналитической. В моем подходе используются два понятия традиционной логики: логическое деление и иерархия понятий. Деление родового понятия делит его на взаимно исключающие и полностью исчерпывающие его виды. Повторные деления создают иерархию, в которой низшие виды являются производными от их рода путем добавления видового отличия. Иерархии образовывают прямой смысл содержания: роды содержатся в образовавшихся из них видах. Затем тезис Канта сводится к утверждению, что никакая иерархия понятий, соответствующая правилам деления, не может выражать истины, такие как „7 + 5 = 12“. Кант прав. Понятия операции (<7 + 5>) имеют два отношения к понятиям чисел: <7> и <5> – входные данные, <12> – выходные данные. Чтобы охватить оба отношения, иерархии должны допускать совпадения понятий, нарушающих правило исключения. Таким образом, такие истины являются синтетическими» [13. P. 501][1]. Получается, что средств «обычной» формальной логики в ее кантовской интенсиональной трактовке не хватает даже для того, чтобы выразить такие простые математические понятия, как арифметическая операция сложения натуральных чисел, поскольку отношения между числами в арифметике превышает выразительные возможности одномерной иерархии и нарушает взаимозависимость содержания и объема, предписанных правилами деления: «Как оказалось, правила деления блокируют построение соответствующей иерархии, и поэтому арифметика должна быть синтетической» [13. P. 517]. Все это приводит Канта в конце концов к утверждению о синтетичности, а также конструктивности всех математических утверждений.

Еще одной специфической особенностью логической концепции Канта является то, что она предполагает не одну-единственную логику. В «Критике чистого разума» он подразделяется ее на логику частного применения рассудка, которая есть пропедевтика всех наук, и на логику общего применения рассудка, т.е. *logica specialis* как органон частных наук. Логика общего применения рассудка «содержит безусловно необходимые правила мышления, без которых невозможно никакое применение рассудка, и потому исследует его, не обращая внимания на различия между предметами, которыми рассудок может заниматься» [5. С. 155], а логика частного применения рассудка «содержит правила правильного мышления о предметах определенного рода» [5. С. 155]. И если трансцендентальная логика – это *logica specialis* метафизики, логика, «содержащая правила правильного мышления» об априорных структурах сознания, то *логикой математического познания* должна служить «логика частного применения рассудка, содержащая правила правильного мышления» о математических объектах[2]. Однако математика, по Канту, так-

[1] В этом отношении важным будет отметить, что одной из основных трудностей новаторов в математизации логики, например Г.В. Лейбница или И.-Г. Ламберта, было то, что они принимали интенсиональный подход к логике либо опирались на изоморфизм интенсиональной и экстенсиональной трактовки логических выражений. Как потом выяснилось, построение интенсиональных логик оказалось чрезвычайно трудной задачей, окончательно так и не завершенной. То же самое можно сказать и логиках, учитывающих иерархично классифицированные объекты познания. Об этом см., например, работы Нино Коккиареллы (*Cocchiarella N.* Sortals, natural kinds and re-identification // Logique et Analyse. 1977. 20. P. 438–474) или недавно вышедшую книгу Макса Фройда – Freund M.A. The Logic of Sortals. Switzerland : Springer Verlag, 2019.

[2] О возможности реконструкции кантовской логики математики см. статью Томаса Зеебома [3].

же наука априорная, но предметом ее познания являются чистые и априорные формы чувственности.

Фундаментальным в теоретической философии Канта является различие между общим и единичным, а также между качественными и количественными характеристиками представлений. Первые присущи только понятиям логики и, соответственно, относятся к сфере рассудочной способности познания, а вторые – представлениям созерцания, т.е. сферы чувственности. Говоря иначе, в терминах современной логической семантики Кант строго различает интенсионал и экстенсионал любых представлений в мышлении. Такое понимание природы логического и предопределяет основные характеристики математического познания в философии математики Канта и, по существу, ложится в основу его концепции философии математики.

В интереснейшем и глубоком исследовании по истории логического позитивизма Альберто Коффа указывает на Германа Когена как на того, кто в своей «Теории опыта Канта»[1] впервые обратил внимание на неоднозначность использования Кантом понятий «аналитическое» и «синтетическое», которые, по существу, имеют два смысла: «Кант иногда имел в виду под синтетическим „предикат, немыслимый в субъекте“, а в других случаях он имел в виду „наличие интуиции в качестве основы для синтеза“. Однако вместо того, чтобы рассматривать это как результат и источник нескольких недоразумений, Коген счел эту двусмысленность еще одним доказательством тонкости Канта. Согласно Когену, первое определение будет номинальным, тогда как второе – реальным. Различие между этими двумя видами определений можно проиллюстрировать на примере почтенного Вольфа, который объяснил в своей логике, что номинальное определение часов будет „машина, которая показывает часы“, тогда как „если я укажу на ее структуру, я дам реальное определение“. Очевидно, реальное определение должно выявлять причины или источники свойств (определяемого), просто приписываемых номинальным определением. Вывод состоит в том, что второе определение Канта „аналитического“ не эквивалентно первому, но идет гораздо глубже, он определяет сущность аналитичности» [14. P. 58][2]. Однако, несмотря на несколько иронический тон Коффы, кажется, что для понимания взаимовлияния логики и философии математики Канта представления Когена об «аналитическом» и «синтетическом» у Канта совсем не лишены оснований.

О специфических особенностях математической концепции Канта

Кант попытался преодолеть недостатки схем познания, в том числе и математического, предложенных рационализмом и эмпиризмом эпохи Просвещения, разработав новую концепцию активности познающего субъекта. Одним из основных в кантовской философии стал вопрос «как возможна математика», т.е. как возможны всеобщие и необходимые математические суждения? Сам он прямо заявляет, что одна из главных целей его Первой критики – убедительно обосновать, как возможно синтетическое априорное познание, в том числе и математическое. Однако в главном трактате Канта

[1] См. Часть 11 «Теории опыта Канта» Германа Гогена [7. С. 395–426].

[2] См. русский перевод книги: *Коффа А.* Семантическая традиция от Канта до Карнапа: к Венскому вокзалу. М. : Канон+ РООИ, 2019. С. 81–82.

по теоретической философии нет никакой отдельной части, посвященной подробному объяснению того, как именно устроено само математическое познание, за исключением многочисленных и относительно коротких отрывков.

За последние десятилетия появился целый ряд оригинальных и глубоких работ, посвященных проблемам кантовской философии математики. Например, Дэниел Сазерленд вслед за признанным авторитетом в исследованиях по данной проблематике Ч. Парсонсом отстаивает положение о том, что философия математики Канта в значительной степени опирается на его теорию величин, которая в свою очередь основана на теории пропорций Евдокса. В частности, он обращается к аксиомам интуиции, в которых Кант рассматривает математическое познание как познание *количественно однородных величин*. Аргументация Сазерленда строится следующим образом: «Поскольку его взгляд на величины происходит из евклидовой традиции, его представление о математическом знании опирается на познание, которое делает возможной теорию пропорций. Оно должно включать познание отношений сравнительных размеров посредством познания равенства и отношений части – целого. А также содержать в себе познание отношений величин композиций части и целого. В теории Канта композиционные отношения части и целого познаются путем применения категорий количества – единства, множественности и целокупности – к интуиции. Таким образом, количественные категории обеспечивают мереологическую основу математического познания» [22. P. 539]. И далее: «Основное внимание Кант обращает на сочетание и суммирование математически однородных величин. Он полагает, что условием такой формы математического познания является представление числовых различений без какого-либо их качественного различия. Он утверждает, что многообразие числовых, но некачественных различений отличает количество и величину (quantity) от качества (quality). Представления однородности выражает такую форму познания, которая вообще не позволяет представить какие-либо качественные различия…» [22. P. 539]. Но понятия у Канта, как мы отмечали выше, сами по себе могут представлять только *качественные различия*, и, следовательно, они не могут выражать *однородное многообразие*. Напротив, *созерцание* может представлять разницу в числах без их *качественного* различения, и тогда именно созерцание позволяет представлять математические величины: «Форма математического познания есть причина того, что оно может быть направлено только на количества. В самом деле, конструировать, т.е. представить *a priori* в созерцании, можно только понятия величины, а качества можно показать не иначе как в эмпирическом созерцании» [5. С. 601].

В отличие от геометрии арифметика имеет отношение к числам как дискретным величинам, т.е. множествам отдельных и несвязанных элементов. Но и такое понимание арифметики встраивается Кантом в более общую теорию величин. Но указывает, что соединение, сумма как «синтез многообразного, части которого не необходимо принадлежат друг к другу» есть «синтез однородного во всем, что можно исследовать математически» [5. С. 237]. Поскольку это такой синтез, под который попадают только однородные величины, а именно представление их суммы в созерцании, он необходим как в арифметике, так и в восприятии непрерывных величин. Из таблицы категорий в «Критике чистого разума» следует, что арифметическое дискретное число попадает под категорию чистого рассудка – категорию целокупности, поскольку для такого числа требуется не просто множество частей, но восприятие целого, которое становится возможным благодаря ее применению. Однородность частей, которые делают их сумму некоторой величиной, означает, что они подпадают под определенное общее понятие. Только тогда такое понятие придает единство множеству частей, так что они составляют единое целое. Именно поэтому, полагает Кант, мы в состоянии различать целое, имеющее определенное множество частей, от самого множества частей самого по себе.

Естественно, что Кант не мог знать работ Георга Кантора по теории множеств и придерживался обычной для того времени точки зрения, согласно которой число в арифметике означает просто конечное число. Если бы величина (*quantum*) была континуумом, то его понятие не могло бы определять количество бесконечного[1] множества его частей, т.е. понятие континуума не может определять все его части. Пространство и время, по Канту, являются определенными парадигмами континуума (непрерывного continua). И он считает части пространства и времени не точками, а также пространствами и временами. Если все реальные величины (quanta) делимы до бесконечности, то применение арифметики, так же как и алгебры, требует, чтобы некоторые величины были представлены как дискретные. Таким образом, должно быть понятие, определяющее части дискретной величины, которое не останавливает их дальнейшее деление, так как возможно их дальнейшее деление, хотя полученные части такого дальнейшего деления уже больше и не подпадают под данное понятие. Это необходимо, если мы хотим придать смысл терминам, выражающим свойства кардинальных чисел. Кант иногда трактует такое понятие как *понятие не подлинной величины* (количества), как такую величину, которая будет непрерывной, даже если ее возможное деление на части может рассматриваться как дискретное: «Величина дискретна если все ее части рассматривался как единицы, когда же все ее части рассматриваются как множества, она называется континуумом. Мы также можем рассматривать континуум как дискретный; например, я могу рассматривать минуту как единицу часа, но также как множество, которое само содержит единицы, а именно 60 секунд»[2]. Из всего этого следует, что без априорных форм чувственности – пространства и времени – невозможно понять, как однородное множество может вместе составлять единое.

Главной специфической особенностью всех математических рассуждений является тезис Канта о том, что математическое познание происходит путем конструирования понятий: «…математическое знание есть познание

[1] В отличие от Лейбница Кант понимает традиционную логику понятий в значительной степени более ограниченной, для него термин субъекта аналитического суждения не может иметь бесконечное содержание. Это еще одна значимая характеристика логики Канта, оказавшая существенное влияние на его концепцию математики. Как отмечает М. Фридман, «в явном противостоянии Лейбницу, Кант принимает эти логические формы строго ограниченными… для Канта нет никаких „полных понятий“ Лейбница, включающих в себя… бесконечное множество других понятийных репрезентаций. Но математические репрезентации (включая математическое представление пространства) могут и действительно содержат в себе бесконечное множество дополнительных (математических) репрезентаций (как в представлении бесконечной делимости). Таким образом, такие репрезентации для Канта не являются и не могут быть понятиями» [17. P. 238].

[2] [Metaphysik Volckmann, p. 423] цитируется по: [19. P. 144].

посредством конструирования понятий. Но конструировать понятие – значит показать *a priori* соответствующее ему созерцание» [5. С. 600]. Причем Кант различает конструирование понятий в арифметике и алгебре, и в геометрии. Если в геометрии это будет «остенсивная конструкция», основанная на представлении пространственных геометрических фигур в чистом созерцании, то алгебра имеет дело с «символической конструкцией»: «…только в математике имеются демонстрации, так как она выводит свои знания не из понятий, а из конструирования их, т.е. из созерцания, которое может быть дано *a priori* соответственно понятиям. Даже действия алгебры с уравнениями, из которых она посредством редукции получает истину вместе с доказательством, представляют собой если не геометрическое, то все же конструирование с помощью символов, в котором понятия, в особенности понятия об отношении между величинами, выражены в созерцании знаками, и, таким образом, не говоря уже об эвристическом [значении этого метода], все выводы гарантированы от ошибок тем, что каждый из них показан наглядно» [5. С. 614].

Однако было бы неверным рассматривать данное кантовское различие с современной точки зрения, как, например, это понимается в аксиоматических логико-математических исчислениях, где преобразование символических конструкций происходит безотносительно любой их возможной интерпретации. Для Канта «символическая» конструкция в алгебре просто символизирует некоторую остенсивную конструкцию для представления некоторой конкретно конструируемой сущности, такой, например, как отрезок. Так что в любой символической конструкции будет проявляться кантовское созерцание, поскольку «процедура и результат всех математических построений для Канта фундаментально остенсивны: для построения математического понятия с необходимостью требуется созерцание, в котором явным образом демонстрируются его особенности» [21. P. 101]. В этом отношении Кант опирается на понимание алгебры математиками эпохи Просвещения, которые рассматривали ее как инструмент для решения и арифметических, и геометрических задач и связывали ее с теорией пропорций Евдокса. Именно применяя алгебру к геометрическим задачам, Декарт разработал свою аналитическую геометрию, понимая алгебру как общую теорию уравнений и пропорций. В ней он видел mathesis universalis, всеобщую математику, которая должна стать ключом к математическому постижению мира. Картезианской традиции в понимании алгебры придерживался и Христиан Вольф, по учебникам которого Кант преподавал математику. «Я буду отстаивать положение, – начинает свою статью Дэниел Сазерленд, – что Кант считал алгебру всеобъемлющей универсальной математикой, которая включает в себя арифметику. Она принимает величины в качестве объекта изучения и является выражением теории пропорций Евдокса. Кроме того, с точки зрения Канта, созерцание играет решающую роль в арифметике, позволяя представлять дискретные величины» [22. P. 534]. С одной стороны, как замечает Лиза Шабель, для Канта «упоминание об алгебре и ее „символических конструкциях“ позволяет расширить его теорию математического познания, включив в нее так называемые „аналитические искусства“ математической практики восемнадцатого века и тем самым показать, как в алгебраическом методе также применяются синтетические суждения» [20. P. 131]. С другой стороны, Кант, вопреки взглядам своих предшественников, прежде всего Лейбница и Вольфа, намеревался продемонстрировать, что математический метод, позволяющий достигать необходимых и универсальных истин, обладает своей особой уникальностью и не может быть согласован с чисто аналитическим методом философии. Как говорит об этом сам Кант, что если в своем познании математик «руководствуясь все время созерцанием… цепью выводов приходит к совершенно очевидному и вместе с тем общему решению вопроса» [5. С. 602], то «философское же познание неизбежно лишено этого преимущества, так как ему приходится рассматривать общее всегда in abstracto (посредством понятий), тогда как математика может исследовать общее *in concreto* (в единичном созерцании) и тем не менее с помощью чистого представления *a priori*, причем всякая ошибка становится очевидной» [5. С. 614]. Проводя различие между математическим и философским методом, Кант вырабатывает оригинальную философию математики, которая, будучи когерентной его логической концепции, соответствует главным целям его теоретической философии и согласуется с математической практикой его времени.

Философия математики Канта: от логического позитивизма до современных исследований

Исторически сложилось так, что почти все важные философские разработки начиная с XIX в. были определенным ответом Канту. И это особенно верно в отношении логической семантики, философии математики и оснований математики уже в XX в. Особое внимание к Канту со стороны научно ориентированных философских направления было, видимо, обусловлено тем, что «решение Кантом эпистемологической проблемы было в то же время последним, где наука играла какую-то роль. Более поздние философские системы окончательно утратили связь с наукой своего времени… Спекулятивные и рационалистически-аналитические компоненты кантовской системы были сохранены, близость же с естественными науками утрачена» [12. С. 12].

Сама же философия математики Канта оказала значительное влияние на концепции математики Г. Фреге, Б. Рассела, Э. Гуссерля и особенно на основателя математического интуиционизма Л.Э.Я. Брауэра. Последний вообще утверждал, что необходимо восстановить в правах идею Канта об интуиции времени как априорной форме чувственности, обосновывающей истинность арифметических истин. Что касается современных исследователей философии математики Канта, то практически все они едины в опровержении такой традиционной точки зрения, которая первоначально была выдвинута Расселом[1] в его «Принципах математики» и Р. Карнапом в его «Философских основаниях физики», согласно которой развитие современной логики в 19 и 20 вв., открытие неевклидовых геометрий и формализация математики делают основанную на чувственной интуиции теорию математики и основанной на ней философию математики устаревшей или неактуальной. Саму суть ма-

[1] Тем не менее Рассел счел важным отметить, что «Кант, бесспорно, заслуживает уважения за две вещи: во-первых, за понимание того, что мы имеем априорное знание, которое не является чисто „аналитическим“, т.е. таким, противоположность которого есть противоречие, и, во-вторых, за то, что он сделал очевидной философскую важность теории познания. Он понял, что не только связь причины и следствия, но и все утверждения арифметики и геометрии являются „синтетическими“, т.е. не аналитическими: во всех этих предложениях никакой анализ субъекта не раскроет предиката» [11. С. 77].

тематической концепции логического позитивизма Карнап выразил в краткой формуле – в математике не существует синтетических априорных высказываний, все высказывания математики аналитичны. Однако начиная с 60-х гг. XX в., после публикаций работ Якко Хинтикки, Чарльза Парсонса, Филипа Китчера[1] по философии математики Канта, начинает наблюдаться все возрастающий интерес к тщательному исследованию по проблемам оснований математической концепции в системе Канта.

Например, в пику представителям логического позитивизма Л. Бек полагает, что Кант не отрицал и даже мог утверждать, что математический вывод является логическим или аналитическим. Его основная задача состояла в определении статуса предпосылок или аксиом таких выводов. Геометрия является синтетической именно потому, что ее основные аксиомы синтетические. Синтетические теоремы геометрии затем выводятся чисто логически или аналитически: «Настоящий спор между Кантом и его критиками заключается не в том, являются ли теоремы аналитическими в смысле их строго [логической] выводимости, и в не том, должны ли они называться аналитическими сейчас, когда признается, что они дедуцируемы из определений, но в том, существуют ли какие-нибудь первоначальные элементарные пропозиции, которые являются синтетическими и интуитивными. Кант утверждает, что аксиомы не могут быть аналитическими… потому что они должны установить такую связь, которая может быть показана только в чувственной интуиции» [15. P. 89–90]. Разъясняя такую точку зрения, Майкл Фридман пишет: «Кажется, что Кант говорит о том, что поскольку вывод теоремы из аксиом (правильно) воспринимается как аналитический, сами аксиомы (неправильно) считать аналитическими. Но эти аксиомы действительно синтетические; по этой причине (и только по этой причине) так же дело обстоит и для теорем. Поэтому Кант согласился бы с Расселом в том, что условное высказывание „Аксиомы → Теоремы“ является логической или аналитической истиной; его точка зрения заключается просто в том, что основание этого условного высказывания является синтетическим» [16. P. 82]. А, например, относительно отличия алгебраического метода от геометрического и арифметического в математике, вызывающего горячие дискуссии среди исследователей философии математики Канта, Лиза Шабель отмечает: «Алгебраические понятия не создают препятствия для аргументации Канта, что синтетические априорные математические суждения обусловлены построением математических понятий в интуиции: алгебраические понятия конструируются в чувственной интуиции так же, как и геометрические понятия, хотя их построение символизируется просто ради ясности и легкости» [20. P. 131].

Конечно, обладая мощным логико-математическим аппаратом, можно скептически относиться к математической концепции Канта с современной математической точки зрения, но надо иметь ввиду, что, как указывает

[1] Работы Хинтикки «Кант о математическом методе» 1967 г., Китчера «Кант и основания математики» 1975 г. и Парсонса «Арифметика и категории» 1984 г. были включены в сборник под редакцией Карла Пози – Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. Необходимо отметить, что интерпретация философии математики Канта Хинтиккой известна как «логическая», а Парсонса – как «феноменологическая», и на современные исследования по философии математики Канта значительное влияние оказала продолжительная дискуссия между ними.

М. Фридман в своей основательной работе «Кант и точные науки»[1], «в рамках простой силлогистической логики невозможно адекватно представить основную идею бесконечного или неопределенного расширения числового ряда: такая идея требует многоместной квантификации в зависимости от формы ∀... ∀∃. Например, такое как отношение плотного порядка: $\forall x \forall y(R(x,y) \supset \exists z\, \mathrm{R}(x,z) \,\&\, R(z,y))$.

Поскольку такие формы квантификации, несомненно, недоступны для силлогистической логики, Кант, естественно, считает, что «идея неопределенной итерации не может быть отражена в чистой общей логике. Таким образом, то, что позволяет нам мыслить или представлять такую неопределенную итерацию, принимается за чистую интуицию времени: форму внутреннего чувства, в которой обязательно должны быть найдены все наши представления…» [16. P. 121]. Тем не менее, замечает он, «мы все еще можем понять фундаментальное инсайд Канта, с нашей собственной точки зрения, если мы увидим, что никакая бесконечная математическая структура (такая как пространство евклидовой геометрии или ряд чисел) не может быть представлена в монадической кванторной логике… С точки зрения Канта, те же самые структуры становятся возможными представить благодаря итеративному применению конструктивных функций в «продуктивном воображении», в котором… довольно явно конструируются сколемовские функции для экзистенциальных кванторов, которые используются в наших формулировках» [17. P. 239].

В том же духе, касаясь проблемы строго формального представления бесконечных порядков в математике, Джон Макфарлейн замечает: «Для нас будет естественным полагать, что Фреге опроверг мнение Канта о том, что понятие плотного порядка может быть представлено только посредством интуиции» [18. P. 27]. И задается вопросом: а что если предположить, что Кант смог бы изучить современную логику, то вынужден ли был он отказаться от своей точки зрения? Возможно, он заявил бы, «что Begriffsschrift Фреге вовсе не является логикой в собственном смысле этого слова, а есть некоторая разновидность абстрактной комбинаторики, а значение вложенных кванторов может быть постигнуто только посредством построений в чистом созерцании» [18. P. 27]. Если это так, то специфические особенности кантовской логики тем более имеют ключевое значение для понимания кантовской философии математики.

***

Итак, можно выделить следующие центральные положения философии математики Канта, сформулированные им в Трансцендентальной эстетике и Учении о методе и других набольших фрагментов Критики чистого разума: во-первых, это идея формальности как математического, так и любого рационального познания (так же как формальна логика, поскольку в ее основе ле-

[1] В этой, ставшей уже классической книге Фридман придерживается «логической» интерпретации философии математики Канта, которая была задана Хинтиккой. Она состоит в том, что современную логику следует использовать как инструмент, но не как критику для интерпретации философии Канта. В дальнейшем он несколько изменил свою первоначальную позицию. Эта новая интерпретация по существу стала синтезом логической и феноменологической интерпретации философии математики Канта, поскольку она объединяет представления геометрического пространства через построение евклидовых конструкций с перспективным пространством, которое, по мнению Фридмана, и является чистой формой внешней чувственности Канта (см.: [17]).

жат «пустые» логические формы, математика формальна, поскольку имеет дело с чистыми априорными формами чувственности); во-вторых, это доктрина синтетического априорного характера математических истин; в-третьих, его идея о том, что математическое познание осуществляется через конструирование понятий, и, наконец, непосредственная и необходимая связь математического познания с чистыми формами чувственности, т.е. с предельно общими областями эмпирического опыта. При этом доступный Канту аппарат традиционной логики имел существенные ограничения, которые не давали возможности адекватно представлять математические знания.

Особенности интерпретации Кантом формальной логики и выработанная им в его критической философии трансцендентальная логика, с одной стороны, обусловливает конструктивный и синтетический характер математического познания, с другой стороны, разработанная им нетривиальная философия математики представляет собой ответ на ограничения традиционной логики и попытка их преодоления. Конструирование математических понятий в чистом созерцании чувственной интуиции позволяет выйти за пределы этих ограничений в математическом познании, что имело исключительные последствия для истории современной философии математики и истории оснований математики. Возможно, что новые философские и математические интерпретации взглядов Канта на математическое знание помогут найти общее базовое основание для современных конкурирующих концепций в основаниях математики. Например, вполне согласующееся с мыслью Канта представление о том, что математика не есть отражение эмпирического, но и не является частью логического синтаксиса языка. Она представляет собой результаты проявления активности познающего субъекта путем конструктивной деятельности по построению математических объектов, связывающей логические формы языка с эмпирической реальностью.

Список источников

1. *Брюшинкин В.Н.* Парадигмы Канта: логическая форма // Кантовский сборник. Калининград, 1985. Вып. 10. С. 30–40.
2. *Брюшинкин В.Н.* Кант и силлогистика. Некоторые размышления по поводу «Ложного мудрствования в четырех фигурах силлогизма» // Кантовский сборник. Калининград, 1986. Вып. 11. С. 29–38.
3. *Зеебом Т.М.* Логика понятий как предпосылка кантовской формальной и трансцендентальной логики // Кантовский сборник. Калининград, 1993. Вып. 17. С. 67–81.
4. *Кант И.* Ложное мудрствование в четырех фигурах силлогизма. 1762 // Соч. : в 6 т. М. : Мысль, 1964. Т. 2.
5. *Кант И.* Критика чистого разума // Соч. : в 6 т. Т. 3. М. : Мысль, 1964.
6. *Кант И.* Логика. Пособие к лекциям. 1800 // Трактаты и письма. М. : Наука, 1980. С. 319–444.
7. *Коген Г.* Теория опыта Канта. М. : Академический Проект, 2012.
8. *Лемешевский К.В.* Способы сведения силлогизмов в логике Канта // Аргументация и Интерпретации. Исследования по логике, истории философии и социальной философии : сб. науч. ст. / под общ. ред. В.Н. Брюшинкина. Калининград : Изд-во РГУ им. И. Канта, 2006. С. 59–72.
9. *Лемешевский К.В.* Правило Nota Notae в силлогистике Канта // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. 2009. Вып. 6. С. 39–45.
10. *Маркин В.И.* Силлогистика как интенсиональная логическая теория: формальная реконструкция идей Г. Лейбница и Н.А. Васильева // Критическое мышление, логика, аргументация : сб. ст. / под общ. ред. В.Н. Брюшинкина, В.И. Маркина. Калининград, 2003. С. 128–140.
11. *Рассел Б.* Избранные труды. Новосибирск : Сиб. ун-е изд-во, 2009.

12. *Рейхенбах Г.* Философия пространства и времени. М. : Прогресс, 1986.

13. *Anderson R.L.* It Adds Up After All: Kant's Philosophy of Arithmetic in Light of the Traditional Logic // Philosophy and Phenomenological Research. 2004. Vol. 69, № 3. P. 501–540.

14. *Coffa A.* The semantic tradition from Kant to Carnap. Cambridge University Press, 1991.

15. *Beck L.* Studies in the Philosophy of Kant. Indianapolis, 1965.

16. *Friedman M.* Kant and the exact sciences. Cambridge : Harvard University Press, 1992.

17. *Friedman M.* Kant on Geometry and Spatial Intuition // Synthese. 2012. № 186. P. 231–255.

18. *MacFarlane J.* Frege, Kant, and the Logic in Logicism // The Philosophical Review. January 2002. Vol. 111, № 1 P. 25–65

19. *Parsons C.* Arithmetic and the Categories // Kant's Philosophy of Mathematics. Modern Essays / editors: Posy. C.J. Kluwer. Academic Publishers, 1992.

20. *Shabel L.* Mathematics in Kant's critical philosophy: reflections on mathematical practice. New York : Routledge, 2003.

21. *Shabel L.* Kant's Philosophy of Mathematics // The Cambridge Companion to Kant and Modern Philosophy / ed. P. Guyer. Cambridge : Cambridge University Press, 2006. P. 94–128.

22. *Sutherland D.* Kant on Arithmetic, Algebra, and the Theory of Proportions // Journal of the History of Philosophy. 2006. Vol. 44, № 4. P. 533–558.

References

1. Bryushinkin, V.N. (1985) Paradigmy Kanta: logicheskaya forma [Kant's paradigms: logical form]. *Kantovskiy sbornik.* 10. pp. 30–40.

2. Bryushinkin, V.N. (1986) Kant i sillogistika. Nekotorye razmyshleniya po povodu "Lozhnogo mudrstvovaniya v chetyrekh figurakh sillogizma" [Kant and syllogistics. Some reflections on "False reasoning in four figures of a syllogism"]. *Kantovskiy sbornik.* 11. pp. 29–38.

3. Zeebom, T.M. (1993) Logika ponyatiy kak predposylka kantovskoy formal'noy i transtsendental'noy logiki [Logic of concepts as a prerequisite for Kantian formal and transcendental logic]. *Kantovskiy sbornik*. 17. pp. 67–81.

4. Kant, I. (1964a) *Sochineniya v 6 t.* [Works in 6 vols]. Vol. 2. Translated from German. Moscow: Mysl'.

5. Kant, I. (1964b) *Sochineniya v 6 t.* [Works in 6 vols]. Vol. 3. Translated from German. Moscow: Mysl'.

6. Kant, I. (1980) *Traktaty i pis'ma* [Treatises and Letters]. Moscow: Nauka. pp. 319–444.

7. Kogen, G. (2012) *Teoriya opyta Kanta* [Kant's Theory of Experience]. Moscow: Akademicheskiy Proekt.

8. Lemeshevskiy, K.V. (2006) Sposoby svedeniya sillogizmov v logike Kanta [Methods of reducing syllogisms in Kant's logic]. In: Bryushinkin, V.N. (ed.) *Argumentatsiya i Interpretatsii. Issledovaniya po logike, istorii filosofii i sotsial'noy filosofii* [Argumentation and Interpretations. Studies in Logic, History of Philosophy and Social Philosophy]. Kaliningrad: Kant University. pp. 59–72.

9. Lemeshevskiy, K.V. (2009) Pravilo Nota Notae v sillogistike Kanta [The Nota Notae rule in Kant's syllogistic]. *Vestnik Rossiyskogo gosudarstvennogo universiteta im. I. Kanta*. 6. pp. 39–45.

10. Markin, V.I. (2003) Sillogistika kak intensional'naya logicheskaya teoriya: formal'naya rekonstruktsiya idey G. Leybnitsa i N.A. Vasil'eva [Syllogistics as an intensional logical theory: Formal reconstruction of the ideas of G. Leibniz and N.A. Vasilyev]. In: Bryushinkin, V.N. (ed.) *Kriticheskoe myshlenie, logika, argumentatsiya* [Critical Thinking, Logic, Argumentation]. Kaliningrad: [s.n.]. pp. 128–140.

11. Russell, B. (2009) *Izbrannye trudy* [Selected works]. Translated from English. Novosibirsk: Sib. univ. izd-vo.

12. Reichenbach, G. (1986) *Filosofiya prostranstva i vremeni* [Philosophy of Space and Time]. Moscow: Progress.

13. Anderson, R.L. (2004) It Adds Up After All: Kant's Philosophy of Arithmetic in Light of the Traditional Logic. *Philosophy and Phenomenological Research*. 69(3). pp. 501–540.

14. Coffa, A. (1991) *The Semantic Tradition from Kant to Carnap*. Cambridge University Press.

15. Beck, L. (1965) *Studies in the Philosophy of Kant*. Indianapolis: The Bobbs-Merrill Company.

16. Friedman, M. (1992) *Kant and the Exact Sciences*. Cambridge: Harvard University Press.

17. Friedman, M. (2012) Kant on Geometry and Spatial Intuition. *Synthese*. 186. pp. 231–255.

18. MacFarlane, J. (2002) Frege, Kant, and the Logic in Logicism. *The Philosophical Review*. 111(1). pp. 25–65

19. Parsons, C. (1992) Arithmetic and the Categories. In: Posy, S.J. (ed.) *Kant's Philosophy of Mathematics*. Modern Essays. Kluwer.

20. Shabel, L. (2003) *Mathematics in Kant's critical philosophy: reflections on mathematical practice*. New York: Routledge.

21. Shabel, L. (2006) Kant's Philosophy of Mathematics. In: Guyer, P. (ed.) *The Cambridge Companion to Kant and Modern Philosophy*. Cambridge: Cambridge University Press. pp. 94–128.

22. Sutherland, D. (2006) Kant on Arithmetic, Algebra, and the Theory of Proportions. *Journal of the History of Philosophy*. 44(4). pp. 533–558.

Сведения об авторе:

Пушкарский А.Г. – аналитик Академии Кантиана Высшей школы философии, истории и общественных наук Образовательно-научного кластера «Институт образования и гуманитарных наук» БФУ имени И. Канта (Калининград, Россия). E-mail: pushcarskiy@mail.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the author:

Pushkarsky A.G. – analyst at the Academia Kantiana of the Higher School of Philosophy, History and Social Sciences of the Institute of Education and the Humanities Cluster "Institute of Education and Humanities", Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia). E-mail: pushcarskiy@mail.ru

The author declares no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 04.03.2021;
одобрена после рецензирования 19.01.2024; принята к публикации 04.03.2024
The article was submitted 04.03.2021;
approved after reviewing 19.01.2024; accepted for publication 04.03.2024