

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ АНИЗОТРОПНОГО ДИЭЛЕКТРИКА (ДРЕВЕСИНЫ)

**Методические указания
для выполнения лабораторной работы**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ АНИЗОТРОПНОГО
ДИЭЛЕКТРИКА (ДРЕВЕСИНЫ)

Методические указания для выполнения лабораторной работы

ТОМСК
2023

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО учебно-методическим советом
кафедры общей и экспериментальной физики физического факультета

Протокол № 14/23 от «17» ноября 2023 г.

Председатель учебно-методического совета

В.П. Демкин

В учебно-методической разработке рассмотрено поведение анизотропного диэлектрика во внешнем электростатическом поле. Показано, что вместо скалярной диэлектрической проницаемости электрические свойства анизотропного диэлектрика необходимо описывать тензором диэлектрической проницаемости. Рассмотрен тензорный эллипсоид для диэлектрической проницаемости. Предлагается метод измерения диэлектрической проницаемости для образцов из древесины.

Учебно-методическая разработка предназначена для студентов физических специальностей дневной формы обучения.

СОСТАВИТЕЛИ: ст. преп. Н.В. Пичкуров
 спец. по УМР. А.О. Цибулина

РЕЦЕНЗЕНТ:

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ	5
2. АТОМЫ И МОЛЕКУЛЫ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ.....	7
2.1 Атом в поле	7
2.2 Молекулы в поле	9
3. ДИЭЛЕКТРИК В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ.....	14
3.1 Изотропный диэлектрик в поле	15
3.2 Анизотропный диэлектрик в поле	17
3.3 Эллипсоид энергии. Тензорный эллипсоид.	20
4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА.....	25
ЗАДАНИЕ	27
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	28
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	30
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	32
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	35

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ АНИЗОТРОПНОГО ДИЭЛЕКТРИКА (ДРЕВЕСИНЫ)

Цель работы:

1. Изучить электрические свойства анизотропного диэлектрика;
2. Измерить диэлектрическую проницаемость древесины в зависимости от ориентации волокон относительно внешнего электрического поля.

Приборы и принадлежности:

- Установка для измерения диэлектрической проницаемости;
- Измеритель индуктивностей и емкостей типа Е12-І.

Порядок теоретической подготовки к выполнению работы:

Изучить теоретический материал и законспектировать в тетрадь ответы на контрольные вопросы.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Диэлектрики (англ. dielectric, от греч. dia – через, сквозь и англ. electric – электрический) – вещества, плохо проводящие электрический ток.

Диэлектриками являются газы (неионизированные), некоторые жидкости и твердые тела. Их удельное электрическое сопротивление $\rho \sim 10^8 + 10^{17}$ Ом·см (для сравнения: удельное сопротивление металлов $\sim 10^{-4} + 10^{-6}$ Ом·см). Физические свойства диэлектриков описываются соотношениями между измерениями величинами. Например, плотность определяется из соотношения между массой и объемом. Поскольку масса и объем не зависят от направления в диэлектрике, вдоль которого проводятся измерения, то плотность является свойством, не зависящим от направления. Сложнее дело обстоит с таким свойством вещества, как диэлектрическая восприимчивость (ϵ), определяющаяся соотношением между двумя величинами (напряженностью электрического поля и плотностью поляризации), каждая из которых характеризуется как величиной, так и направлением. Следовательно, можно ожидать, что для различных направлений, вдоль которых проводятся измерения, значения ϵ будут разными. И действительно, эксперименты показывают, что существуют два типа диэлектриков. В одних диэлектриках восприимчивость не зависит от направления. Такие диэлектрики называют изотропными. Для второго типа диэлектриков характерно изменение восприимчивости при смене направления. В этом случае говорят, что диэлектрик анизотропен в отношении диэлектрической восприимчивости.

Анизотропия – зависимость свойств материала от направления, характерна для широкого класса веществ. Поэтому актуален вопрос: как описывать физические свойства диэлектриков, которые могут зависеть от направления, поскольку очевидно, что с помощью обычных чисел этого сделать нельзя. Ответ на этот вопрос дается в настоящей работе.

Здесь рассматривается анизотропия в отношении электрических свойств, а именно диэлектрической восприимчивости ϵ и диэлектрической проницаемости ϵ . Вначале описывается поведение простейших физических объектов – атома водорода и молекулы углекислого газа – в электрическом поле. Показано, что анизотропия проявляется уже на микроскопическом (молекулярном) уровне. Затем

рассматривается диэлектрик (изотропный и анизотропный), помещенный во внешнее электрическое поле.

Переходные процессы установления поля в веществе не рассматриваются, т.е. диэлектрическая восприимчивость, проницаемость и т.д. считаются статическими. Предполагается, что температура диэлектрика постоянна, соответственно не учитывается зависимость характеристик вещества от температуры. Повсюду используется гауссова система единиц, кроме как при измерении емкостей, но расчетная формула (35) не зависит от выбора системы единиц.

Приложения являются факультативными.

2. АТОМЫ И МОЛЕКУЛЫ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Известно, что вещество состоит из атомов и молекул. Поэтому, если мы хотим понять, как ведет себя диэлектрик во внешнем электрическом поле, необходимо разобраться в том, что происходит с атомами и молекулами в поле.

Для этого сначала рассмотрим самый простой атом – атом водорода. Увидим, что у этого атома в поле возникает дипольный момент, линейно зависящий от поля и всегда совпадающий по направлению с вектором напряженности поля. Затем рассмотрим сравнительную простую молекулу углекислого газа, находящуюся в поле.

Электрическое поле также наводит дипольный момент у молекулы, который по-прежнему линейно связан с напряженностью поля, но уже не совпадает с полем по направлению. Возникает зависимость момента от ориентации молекул относительно поля, т.е. молекула CO_2 неодинаково отзывается на поля, приложенные с различных направлений.

2.1 Атом в поле

Атомарный водород состоит из положительно заряженного ядра с зарядом $+e$ отрицательно заряженного электрона с зарядом $-e$. Размеры ядра порядка 10^{-13} см. Электрон же считается точечным. Если бы мы могли сделать моментальный снимок атома с временем экспозиции меньше 10^{-16} с, то нам удалось бы различить электрон на некотором расстоянии от ядра. Но обычно приходится иметь дело с гораздо более длительными процессами.

Попытка же сфотографировать атом с большей выдержкой привела бы нас к следующей картине. Вокруг ядра имеется сферически симметричное непрерывное распределение отрицательного заряда, которое будем называть электронным облаком. Полный заряд облака равен $-e$, т.е. заряду электрона. Плотность заряда с ростом расстояния от центра ядра очень быстро убывает: в сфере радиусом 0,05 нм ($0,5 \cdot 10^{-8}$ см) расположена почти половина заряда облака, а в сфере радиусом 0,22 нм содержится уже 99% заряда. Поэтому можно сказать, что размер атома $\sim 10^{-8}$ см, что на пять порядков больше размера ядра (в дальнейшем размером ядра пренебрегаем, считая его точечным).

«Центры тяжести» отрицательного и положительного зарядов совпадают. Все направления (задаваемые из ядра) в атоме равноправны, т.е. атом изотропен. Такое состояние схематически изображено на рис. 1а.

Теперь поместим атом водорода в электрическое поле E , созданное внешним источником. Под действием поля атом деформируется: электронное облако сместится вниз, а положительное ядро – вверх (рис. 1б). «Центры тяжести» положительного и отрицательного зарядов теперь не совпадают. У атома появился дипольный момент p , но, в целом, атом по-прежнему, электрически нейтрален, т.е. суммарный заряд ядра и электронного облака равен нулю.¹ В это случае говорят, что дипольный момент p индуцируется электрическим полем E .

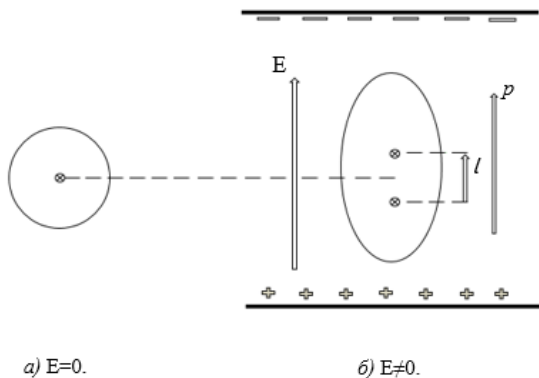


Рис. 1. а) Атом водорода в отсутствие электрического поля. б) В электрическом поле отрицательный заряд увлекается в одну сторону, а положительно – в другую. После установления равновесия форма атома оказывается искаженной.

¹ Электрический дипольный момент p – величина, характеризующая электрические свойства системы заряженных частиц. Система из двух одинаковых по величине зарядов $(+e, -e)$ образует электрический диполь, дипольный момент которого равен $p=el$, где l – расстояние между зарядами (вектор l направлен от отрицательного заряда к положительному). Для такой системы как атом водорода дипольный момент за времена порядка 10^{-16} с меняет свое направление на противоположное. В среднем, при наблюдении за атомом в течение длительного промежутка времени, дипольный момент равен нулю. Так будет в отсутствие внешнего поля. При включенном поле электрон в атоме чаще находится по одну сторону ядра, чем по другую. В этом случае значение вектора p не равно нулю, а l имеет смысл расстояния между «центром тяжести» электронного облака и ядром.

Поставим вопрос о том, как связаны между собой p и E . Можно сразу сказать о направлении дипольного момента. Так как отрицательное электронное облако сместится вниз, а ядро – вверх, то момент направлен вдоль E , т.е. вверх.

В большинстве случаев лабораторные поля не слишком велики, чтобы сильно деформировать атом. В достаточно слабых полях² можно считать, что дипольный момент p пропорционален напряженности поля E .

$$p = \alpha E. \quad (1)$$

Постоянная α является характеристикой атома и называется атомной поляризуемостью. Это скалярная величина, она не зависит от выбора системы координат и направления вектора E . Очевидно, что поляризуемость положительна ($\alpha > 0$).

Итак, атом водорода откликается на действие внешнего электростатического поля появлением дипольного момента p , связанного линейной зависимостью (1) с напряженностью поля E .

Все вышесказанное можно повторить и для других атомов, электрические плотности которых центральносимметричны относительно ядра, хотя отличаются друг от друга. Существуют также сферически симметричные молекулы, для которых тоже выполняется линейная зависимость (1).

2.2 Молекулы в поле

Молекула, менее симметричное образование. Рассмотрим, например, молекулу углекислого газа CO_2 . Образующие ее атомы расположены так, как показано на рис. 2а.

Естественно ожидать, что такая «сигароподобная», симметричная относительно продольной оси молекула неодинаково реагирует на продольное и поперечное поля. Пусть сначала поле действует вдоль оси молекулы. Обозначим его E_0 . Тогда деформация молекулы приведет к возникновению дипольного момента p_0 :

$$p_0 = \alpha_0 E_0. \quad (2a)$$

То же поле, но направленное перпендикулярно к оси молекулы, индуцирует момент p_1 :

$$p_1 = \alpha_1 E_1. \quad (26)$$

² Критерием малости поля служит неравенство $|E| \ll |E_{am}|$, где E_{am} – напряженность электрического поля внутри атома, молекулы

Поляризуемость молекулы углекислого газа α_0 в продольном направлении вдвое больше поляризуемости α_1 в поперечном направлении, т.е. молекулу легче деформировать вдоль оси, не поперек.

Что произойдет, если поле E приложено в каком-либо другом направлении (рис. 2б)? Тогда, по принципу суперпозиции, можно разложить E на два вектора E_0 и E_1 . Каждый из этих векторов индуцирует свои дипольные моменты (см. рис. 2а и 2б). Сложив их получим момент, наведенный полем E :

$$p = p_0 + p_1 = \alpha_0 E_0 + \alpha_1 E_1. \quad (3)$$

Очевидно, что p направлен E , т.к. $\alpha_0 \neq \alpha_1$. Дипольный момент отклонен в направлении большей поляризуемости. Говорят, что молекула CO_2 анизотропна по своим электрическим свойствам, т.е. не все направления в молекуле равноправны.

Тензор поляризуемости

Когда мы рассматривали атом водорода, то его электрические свойства характеризовали скаляром α , который не зависит от направления поля E и в любой системе координат имеет одинаковое значение. Электрические свойства молекулы двуокиси углерода описать одним скаляром уже не удастся, для этого необходимы, по крайней мере, два числа α_0 и α_1 .

Если же рассмотреть менее симметричную молекулу, то в этом случае следует ожидать появления большего числа коэффициентов, связывающих компоненты вектора p с компонентом поля E . наиболее общее выражение для линейной зависимости дипольного момента и напряженности поля в заданной системе координат имеет вид:³

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha_{11}E_1 + \alpha_{12}E_2 + \alpha_{13}E_3, \\ p_2 &= \alpha_{21}E_1 + \alpha_{22}E_2 + \alpha_{23}E_3, \\ p_3 &= \alpha_{31}E_1 + \alpha_{32}E_2 + \alpha_{33}E_3. \end{aligned} \quad (4a)$$

³ Соотношения (4) справедливы только для неполярных молекул. Для полярных молекул следует добавить спонтанный дипольный момент.

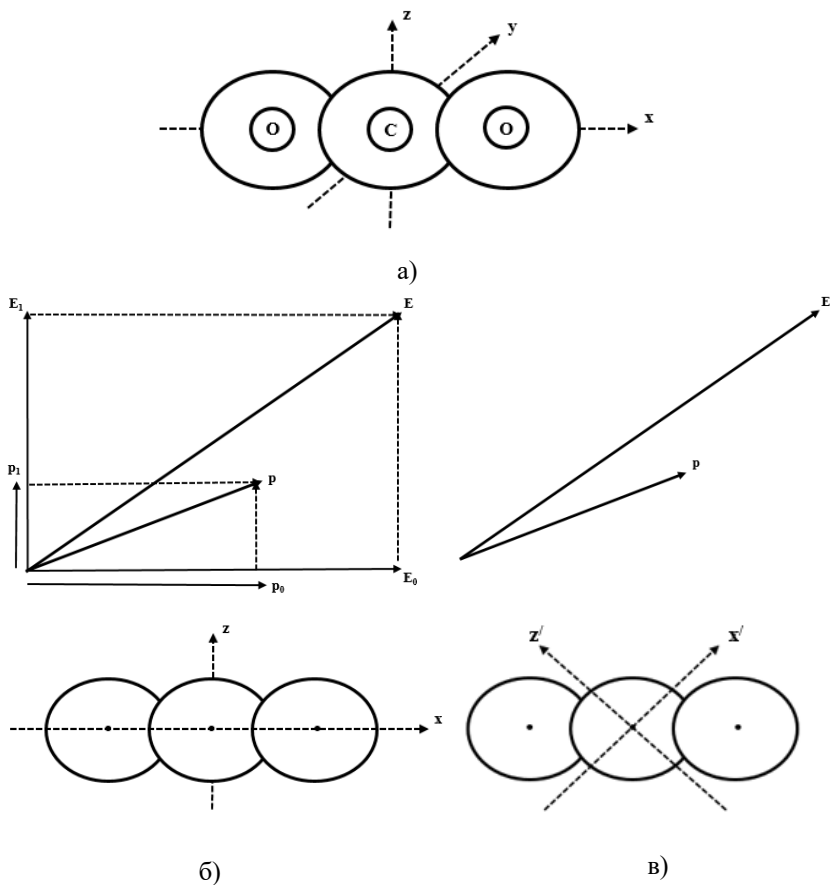


Рис. 2. а) Молекула двуокиси углерода CO₂; б) Поле E деформирует молекулу сильнее, чем поле 0E_1 . Дипольный момент молекулы p уже не совпадает с направлением приложенного поле E. в) В другой системе координат векторы E и p не изменяются, но их проекции на оси изменяются, следовательно изменяется и поляризуемости α_{ij}

(здесь индексы 1, 2, 3 означают x, y, z). Систему уравнений (4а) можно записать в виде таблицы:

	E_1	E_2	E_3
p_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
p_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
p_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

(4б)

Совокупность девяти коэффициентов α_{lj} называют **тензором поляризуемости**⁴. Индексы l и j принимают значения 1,2,3. Для рассмотренного случая молекулы CO₂ в выбранной системе координат (Рис. 2б) коэффициенты $\alpha_{lj} = \alpha_0 \cdot \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha_1$, остальные шесть коэффициентов равны нулю.

Симметричность α_{lj} . Тензор поляризуемости обладает очень важным свойством – симметричностью, т.е. для компонент тензора выполняются соотношения

$$\alpha_{lj} = \alpha_{jl} \quad (j, l = 1, 2, 3), \quad (5)$$

например, $\alpha_{23} = \alpha_{32}$. Это означает, что поле E , приложенное вдоль оси z (ось 3) вызывает y -компоненту дипольного момента p , в точности равную z -компоненте вектора p , наведенного тем же полем, приложенным вдоль оси y (ось 2). Симметрия тензора поляризуемости – весьма нетривиальный физический факт! Такое свойство верно даже для совершенно несимметричной молекулы (доказательство соотношения (5) приведено в приложении А). из девяти коэффициентов тензора α_{lj} только шесть являются независимыми, три из них располагаются на главной диагонали.

Систему уравнений (4а) можно записать в сокращенном виде

$$p_l = \sum_{j=1}^3 \alpha_{lj} E_j = \alpha_{lj} E_j, (l = 1, 2, 3), \quad (4в)$$

⁴ Тензор принято обозначать несколькими способами, например (α_{lj}) или в виде таблицы (4б). Часто пишут α_{lj} . При такой записи α_{lj} может означать как совокупность девяти коэффициентов, так lj -ю компоненту тензора.

где α_{lj} – тензор, симметричный относительно главной диагонали, т.е.

$$\alpha_{lj} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Во втором равенстве в (4в) используется тензорное правило суммирования, а именно, при повторяющемся индексе (здесь j) с одной стороны равенства подразумевается сумма по этому индексу.

Зависимость тензора от оси координат. Соотношения (4) записаны для произвольной системы координат, но конкретные численные значения коэффициентов α_{lj} зависят от выбора координатных осей. В самом деле, векторы E и p не зависят от того, как мы расположимся координатами.

Например, при вращении системы координат ни длины наших векторов, ни их направления в пространстве не меняются, но проекции векторов на оси координат зависят от выбора координат. Поэтому, записав (4) для конкретной системы координат, мы имеем конкретные значения α_{lj} . При повороте системы координат изменяется p_i , E_i , соответственно уравнения (4) в новых координатах имеют другие значения коэффициентов.

Вернемся к молекуле углекислого газа. На рис.2в представлена ситуация, когда оси x' и y' повернуты относительно первоначального положения (рис. 2б). Физическая картина не изменилась. Ориентация молекулы в пространстве и направление поля E остались прежними. Безусловно, момент p тоже не изменился, поскольку он определяется самой молекулой (ее строением) и напряженностью E . Проекции E на оси x' , y' , z' можно легко вычислить через старые компоненты, если известен угол поворота системы координат. То же можно сделать с дипольным моментом p . Между E и p по-прежнему существует линейная связь типа (4), но с другими коэффициентами α_{lj} . Правила пересчета компонент тензора α_{lj} рассмотрены в приложении Б. Здесь же без доказательства сделаем утверждение:

для симметричного тензора всегда можно повернуть систему координат так, что из шести независимых коэффициентов α_{lj} три внедиагональных ($\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$) будут равны нулю, т.е. поляризуемость молекулы полностью описывается тремя числами $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$. Это

справедливо для любой молекулы, даже для той, геометрия которой не обладает какой-либо симметрией.

Выше мы рассмотрели молекулу CO_2 , дипольный момент которой, в отсутствие внешнего поля, равен нулю. Такие молекулы называют **неполярными**. Существует другие молекулы, от «рождения» имеющие дипольный момент вследствие несовпадения «центров тяжести» отрицательного и положительного зарядов. Такие молекулы называют **полярными**, а их дипольный момент **спонтанным**. Примером полярной молекулы может служить молекула воды H_2O . Атомы в молекуле расположены уголком, в центре которого – атом кислорода. Когда такая молекула попадает во внешнее электрическое поле, то она начинает разворачиваться так, чтобы ее дипольный момент выстраивался по полю E . Строгой параллельности препятствует тепловое движение молекул. Кроме того, сама молекула под действием поля слегка деформируется, т.е. изменяет ее момент. Но этот эффект незначителен по сравнению с ориентационным влиянием поля.

3. ДИЭЛЕКТРИК В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Мы рассмотрели поведение атома и молекулы в электрическом поле. А в этом разделе будут рассмотрены диэлектрики. Любой диэлектрик состоит из огромного числа атомов и молекул. Проследить за каждым из них практически невозможно. О том, как поступают в этом случае, речь пойдет ниже.

Поляризация диэлектрика. Возьмем достаточно большой, макроскопический объем диэлектрика и поместим его во внешнее электрическое поле E_0 , созданное сторонними зарядами, т.е. зарядами, не входящими в состав молекул диэлектрика. Поведение диэлектрика во внешнем электрическом поле зависит от строения и характера химической связи. Если диэлектрик состоит из неполярных молекул, то последние под действием внешнего поля поляризуются, приобретая дипольный момент. В ионных кристаллах (NaCl и др.) действие поля приводит к смещению ионов относительно друг друга и к деформации электронных оболочек отдельных ионов. В кристаллах с ковалентной связью (например, алмаз) влияние поля приводит, главным образом, к смещению электронов, осуществляющих химическую связь, относительно положения равновесия. Если диэлектрик состоит из полярных молекул (такой диэлектрик называют **полярным**), то под действием внешнего поля уже существующие дипольные моменты

молекул частично ориентируются по полю. Во всех указанных случаях происходит относительное смещение разноименных зарядов в любом макроскопическом объеме диэлектрика, т.е. образуется объемный дипольный момент среды. Такое явление называют **поляризацией** диэлектрика. Различают несколько типов поляризации: *электронная, ионная, ориентационная* и др. Для дальнейшего существенно лишь то, что положительные заряды смещаются по полю, отрицательные – против поля.

Линейные диэлектрики. Итак, диэлектрик, помещенный во внешнее поле, приобретает дипольный момент, который пропорционален объему диэлектрика. Этот момент, в отличие от дипольных моментов атомов и молекул, макроскопичен. Для широкого класса диэлектриков дипольный момент, наведенный электрическим полем, пропорционален напряженности поля. Такие диэлектрики называют **линейными**. Мы будем работать лишь с линейными диэлектриками. Кроме того, возможны следующие ситуации. Если диэлектрик **изотропен** (в отношении электрических свойств), то дипольный момент совпадает по направлению с напряженностью поля, как и в случае с некоторыми атомами и молекулами. Если же диэлектрик **анизотропен**, то связь между дипольными моментами и напряженностью может быть более сложная⁵, а именно, тензорная. Т.е. векторы дипольного момента и напряженности поля в этом случае **непараллельны**, но компоненты их также линейно связаны друг с другом.

3.1 Изотропный диэлектрик в поле

Микро- и макрополе. Истинное электрическое поле в любом веществе, называемое **микрополем**, чрезвычайно быстро изменяется от точки к точке (например, при переходе от положительных к отрицательным зарядам молекулы). Однако, эти изменения происходят в микроскопическом масштабе и недоступны нашим макроскопическим средствам измерения. Более того, для многих целей знание микрополей вовсе и не нужно. Достаточно знать среднее значение поля, называемое **микрополем**, в физически малом объеме вещества. **Физически бесконечно малыми в отличие от математически бесконечно малых**

⁵ На всякий случай ассиметричный по строению диэлектрик будет анизотропным по электрическим свойствам.

объемов называют такие элементы объемов, которые удовлетворяют следующим двум требованиям:

а) размеры физически бесконечно малых объемов должны быть чрезвычайно велики по сравнению с расстояниями между молекулами среды, а стало быть, и по сравнению с микроскопическими неоднородностями поля и среды;

б) вместе с тем, физически бесконечно малые элементы объема должны быть чрезвычайно малы по сравнению с макроскопическими неоднородностями поля и среды. Другими словами, средние значения поля в двух соседних элементах объема должны мало отличаться друг от друга.

Даже в газах такой элемент объема содержит огромное количество молекул. Итак, под полем в веществе следует понимать:

$$E = E_{\text{макро}} = \langle E_{\text{микро}} \rangle = \frac{1}{\Delta V} + \int E_{\text{микро}} dV. \quad (7)$$

Здесь ΔV и dV соответственно физически бесконечно малый и математически бесконечно малый объемы.⁶

Выше упоминалось поле сторонних зарядов E_0 . Кроме того, при поляризации диэлектрика возникают некомпенсированные заряды, называемые **поляризационными** или **связанными** (второе название указывает на то, что эти заряды перемещаются лишь внутри электрически нейтральных молекул диэлектрика). Эти заряды порождают свои поля, усреднение которых дает макрополе E' . Поэтому в диэлектрике поле E образуется из двух частей:

$$E = E_0 + E'. \quad (8)$$

В дальнейшем будем иметь дело только с полем E .

Поляризованность. У неполярных молекул действие поля вызывает дипольный момент p . Для полярных молекул эффект сводится к ориентации уже существующих дипольных моментов. В обоих случаях возникает макроскопический дипольный момент, пропорциональный числу молекул, т.е. объему диэлектрика. Однако, вместо этого дипольного момента удобно иметь дело с другим вектором – вектором поляризованности диэлектрика P (или плотностью поляризации). Возьмем физический малый объем ΔV , просуммируем все дипольные моменты молекул в этом элементе объема, тогда поляризованность

⁶ В усреднении по времени нет необходимости, поскольку рассматриваются электростатические поля.

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\alpha} P_{\alpha}, \quad (9)$$

т.е. этот вектор численно равен дипольному моменту единицы объема вещества. Индекс « α » означает номер молекулы.

Если поляризующее поле достаточно слабое, то для линейных изотропных диэлектриков справедливо соотношение

$$P = \epsilon E. \quad (10)$$

Коэффициент пропорциональности ϵ называют **диэлектрической восприимчивостью** вещества. Эта величина характеризует электрические свойства самого диэлектрика и не зависит от напряженности поля, всегда положительна ($\epsilon > 0$), в любой системе координат одна и та же, т.е. для изотропных диэлектриков ϵ – скаляр (ср. с. (I)).

Часто пользуются вспомогательным вектором

$$D = E + 4\pi P. \quad (11)$$

Для изотропного диэлектрика поляризованность параллельна напряженности поля, тогда

$$D = (1 + 4\pi\epsilon)E = \epsilon E, \quad (12)$$

где

$$\epsilon = 1 + 4\pi\epsilon, \quad (12)$$

носит название **диэлектрической проницаемости** вещества. Обычно этой величиной пользуются для характеристики электрических свойств диэлектрика, поскольку она одинакова в системах единиц СГС и СИ. Подчеркнем, диэлектрическая проницаемость, так же как и ϵ , для изотропных – скаляр.

3.2 Анизотропный диэлектрик в поле

Анизотропия среды, т.е. зависимость равновесных физических свойств (механических, оптических, магнитных, электрических и пр.) вещества от направления характерна для многих материалов. Прежде всего это касается монокристаллов, в которых упорядоченной расположение частиц приводит к неравноправности направлений в кристалле. Поликристаллы, в целом, изотропны вследствие случайной ориентации составляющих их кристалликов (кристаллических зерен). Если в результате обработки поликристаллических материалов (отжига, прокатки т.п.) в них создается **текстура**, т.е. преимущественная ориентация кристаллических зерен, то в веществе проявится анизотропия свойств.

Анизотропия наблюдается также и некристаллических веществах, обладающих естественной текстурой (например, древесина, у которой за счет волоконной текстуры выделено преимущественное направление) или искусственной текстурой, вызванной каким-либо способом (например, под действием электрического поля, давления и т.п.). кроме упорядоченного расположения частиц анизотропия среды может быть также обусловлена анизотропией образующих ее частиц, анизотропным характером взаимодействия. В то же время анизотропные или анизотропно взаимодействующие частицы могут образовывать изотропную среду. Например, аморфные вещества, газы или большинство жидкостей представляют собой изотропную среду вследствие хаотического движения и вращения частиц.

Анизотропные свойства сплошной среды описываются тензорными величинами. В однородной среде компоненты тензора постоянные, в неоднородной среде они меняются от точки к точке, т.е. являются функциями координат. Среда, которая анизотропна в отношении одной группы свойств (например, механических), может вести себя как изотропная по отношению к другой группе свойств (например, электрических). Так, механические свойства поваренной соли $NaCl$ анизотропны (ее упругость различна вдоль ребер и диагоналей кубической решетки), тогда как тепловые и оптические свойства изотропны с высокой степенью точности. В изотропной среде соответствующие тензоры сводятся к единичным.

Тензор диэлектрической восприимчивости. Теперь следует обобщить результаты предыдущего раздела на случай линейного анизотропного электрика. Сделать это несложно, если учесть сведения из раздела 1.2. Уравнение (10) в нашем случае превратится в систему уравнений

$$P_l = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{lj} E_j = \epsilon_{lj} E_j \quad (l = 1, 2, 3). \quad (14)$$

аналогичную уравнениям (4). Вместо диэлектрической восприимчивости ϵ в (14) фигурирует **тензор диэлектрической восприимчивости** ϵ_{lj} , в общем случае содержащей девять величин. Но этот тензор, так же как и тензор поляризуемости ϵ_{lj} , симметричен, т.е.

$$\epsilon_{lj} = \epsilon_{jl} \quad (l, j = 1, 2, 3). \quad (15)$$

следовательно, из девяти коэффициентов независимыми будут только шесть. Так же, как и α_{lj} , компоненты ε_{lj} зависят от выбора координат. Поворачивая систему координат, можно добиться такой ситуации, когда тензор ε_{lj} приведется к диагональному виду

$$\varepsilon_{lj} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Тогда говорят, что тензор ε_{lj} приведен к главным осям, а коэффициенты $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ называют **главными значениями тензора**. Очевидно, что вектор $\mathbf{P}$ в анизотропном диэлектрике не параллелен полю $\mathbf{E}$, лишь для некоторых направлений в веществе возможна однонаправленность этих векторов.

Определение вектора $\mathbf{D}$ в (2) справедливо и для анизотропных материалов, т.к. $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ не предполагаются параллельными. Но уравнение (12) изменится.⁷

$$\begin{aligned} D_l &= E_l + 4\pi P_l = E_l + 4\pi \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{lj} E_j = \sum_{j=1}^3 \delta_{lj} E_j + 4\pi \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{lj} E_j \\ &= \sum_{j=1}^3 (\delta_{lj} + 4\pi \varepsilon_{lj}) E_j = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{lj} E_j \quad (l = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\varepsilon_{lj} = \delta_{lj} + 4\pi \varepsilon_{lj} \quad (18)$$

тензор диэлектрической проницаемости вещества, а δ_{lj} – единичный тензор:

$$\delta_{lj} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

что означает

$$\begin{aligned} \delta_{lj} &= 1, \text{ если } l = j, \\ \delta_{lj} &= 0, \text{ если } l \neq j. \end{aligned} \quad (20)$$

⁷ То же в тензорных обозначениях:

$$D_l = E_l + 4\pi P_l = E_l + 4\pi \varepsilon_{lj} E_j = \delta_{lj} E_j + 4\pi \varepsilon_{lj} E_j = (\delta_{lj} + 4\pi \varepsilon_{lj}) E_j = \varepsilon_{lj} E_j, \quad (l=1, 2, 3)$$

Величину δ_{lj} , определяемую (20), называют также символом Кронекера. Отметим, что единичный тензор в любой декартовой системе координат имеет один и тот же вид, так как всегда $\varepsilon_{lj} > 0$, то диагональные $\varepsilon_{lj} \geq 1$ (здесь суммы по l нет). Тензор ε_{lj} также симметричен и может быть приведен к главным осям.

3.3 Эллипсоид энергии. Тензорный эллипсоид.

Два симметричных тензора a_{lj} , ε_{lj} , ϵ_{lj} существует красивая геометрическая интерпретация, которая позволяет «увидеть», наглядно предоставить себе тензор. Здесь мы рассмотрим тензор диэлектрической восприимчивости ε_{lj} и увидим, что геометрическим образом его будет эллипсоид (в трехмерном пространстве, когда l, j пробегает значения 1,2,3).

Рассмотрим физические бесконечно малый объем диэлектрика ΔV , в котором находится N молекул. Электрическое поле, возрастающее (квазистатически) от 0 до установившегося значения E поляризует вещество, т.е. поляризованность изменяется от 0 до P . Таким образом возникает вопрос: какая энергия затрачена на поляризацию диэлектрика? В приложении А показано, что при изменении поля на dE над молекулой совершается элементарная работа Edp . Следовательно, на N молекул объема ΔV внешними источниками затрачена энергия:

$$dW = \sum_a Edp_a = E \left(\sum_a dp_a \right) = Ed \left(\sum_a p_a \right) = (EdP) \Delta V. \quad (21)$$

(см. определение поляризованности (9)). Полная энергия, отнесенная к объему ΔV , равна интегралу

$$\omega = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \int_0^P (EdP) = \sum_{l=1}^3 \int_0^{P_l} E_l dP_l. \quad (22)$$

Здесь ω – плотность энергии, т.е. энергия, приходящая на единицу объема диэлектрика. Из уровней (14) следует, что

$$dP_l = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{lj} dE_j, \quad (l = 1, 2, 3).$$

Поскольку для линейных диэлектриков ε_{lj} не зависит от E , в интеграле (22) верхнему пределу P отвечает установившееся значение поля E . Поэтому

$$\omega = \sum_{l,j=1}^3 \varepsilon_{lj} \left(\int_0^{E_j} E_l dE_j \right). \quad (23)$$

После того, как это выражение расписано почленно и взяты интегралы, получим

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{l,j=1}^3 \varepsilon_{lj} E_l E_j = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 E_l P_l = \frac{1}{2} EP. \quad (24)$$

В последнем соотношении для плотности энергии нам интересна сейчас запись с тензором ε_{lj} . Для простоты, рассмотрим сначала двумерный случай. Пусть вектор E лежит в плоскости (xy).

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} [\varepsilon_{xx} E_x^2 + (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}) E_x E_y + \varepsilon_{yy} E_y^2] \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} E_x^2 + 2\varepsilon_{xy} E_x E_y + \varepsilon_{yy} E_y^2). \end{aligned} \quad (25)$$

(см. (15)). Предположим, что плотность энергии ω зафиксирована. Таким образом возникает вопрос: какие поля E_x и E_y отвечают данной плотности энергии. Относительно E_x и E_y соотношение (25) представляет собой уравнение второй степени

$$\varepsilon_{xx} E_x^2 + 2\varepsilon_{xy} E_x E_y + \varepsilon_{yy} E_y^2 = 2\omega,$$

Решением которого будут все точки эллипса (именно эллипса, но не гиперболы или параболы, т.к. $\varepsilon_{lj} \geq 0$ и плотность энергии положительна и конечна). Вектор E с компонентами E_x и E_y представляет собой вектор, идущий из начала координат до точки на эллипсе (рис. 3).

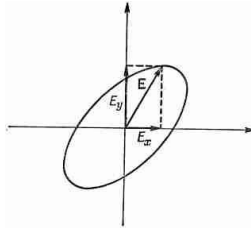


Рис. 3. Конец любого вектора $E = E_x, E_y$, лежащего на этой кривой, соответствует одной и той же энергии поляризации

В трехмерном случае вместо уравнения эллипса (25) получим уравнение второго порядка - **эллипсоида энергии** (рис. 4). Тогда любой вектор E , необходимый для создания некоторой плотности энергии, задается точками, расположенными на эллипсоиде, отвечающем данной плотности. Форма эллипсоида однозначно характеризует тензор диэлектрической восприимчивости. Напомним, ϵ_{ij} определяется лишь самим диэлектриком, следовательно, для каждого диэлектрика существует свой эллипсоид. Важно отметить, что форма эллипсоида не зависит от поля (изменения его приводят к подобным эллипсоидам).

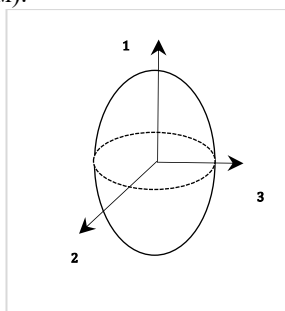


Рис. 4. Эллипсоид энергии для тензора диэлектрической восприимчивости. Координатные оси направлены вдоль главных осей 1,2,3.

Вращая систему координат всегда можно направить координатные оси вдоль трех главных осей эллипсоида – направлений наименьшего и наибольшего диаметра и направления, перпендикулярного к ним. Эта операция соответствует приведению тензора к диагональному виду (16). На рис. 4 эти оси обозначены 1,2,3. По отношению к главным осям уравнение эллипсоида имеет особенно простую форму:

$$\epsilon_1 E_1^2 + \epsilon_2 E_2^2 + \epsilon_3 E_3^2 = 2\omega, \quad (26)$$

а уравнения (14) принимают вид

$$P_1 = \epsilon_1 E_1, \quad P_2 = \epsilon_2 E_2, \quad P_3 = \epsilon_3 E_3, \quad (27)$$

т.е. электрическое поле, направленное по любой из главных осей, дает поляризованность, направленную по той же оси, но коэффициенты для разных осей различны.

Существуют диэлектрики, для которых два главных значения тензора равны друг другу, например, $\epsilon_2 = \epsilon_3$. Тогда эллипсоид

представляет собой эллипсоид вращения: любое сечение, параллельное плоскости 23 даст окружность. Таким диэлектриком будет древесина, имеющая выделенную ось (вдоль волокон), повороты относительно которой не изменяют тензор ε_{lj} .

Если все три главных значения тензора равны друг другу, т.е.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon,$$

то эллипсоид энергии превращается в сферу, поляризованность во всех направлениях становится одинаковой, а материал является изотропным диэлектриком. В тензорных обозначениях последнее равенство имеет вид:

$$\varepsilon_{lj} = \delta_{lj}\varepsilon,$$

а уравнение (14) преобразуется в соотношения

$$P_l = \varepsilon \sum_{j=1}^3 \delta_{lj} E_j = \varepsilon \delta_{lj} E_j = \varepsilon E_j \quad (l = 1, 2, 3).$$

но это же уравнение (10) для изотропного диэлектрика.

Существует какая-либо иная польза от геометрического образа симметричного тензора, кроме возможности зрительно представить себе тензор в виде эллипсоида?

Действительно существует. Заменим в уравнении (24) компоненты E_j переменными $x_l = \frac{E_l}{\sqrt{2\omega}}$. Получим уравнение

$$\sum_{l,j=1}^3 \varepsilon_{lj} x_l x_j = 1 \quad (\varepsilon_{lj} x_l x_j = 1). \quad (28)$$

Это тоже эллипсоид. Разница между эллипсоидом энергии (24) и (28), называемым тензорным эллипсоидом, лишь в том, что уравнение (28) безразмерно. В главных осях, когда $\varepsilon_{lj} = 0$ для $l \neq j$, последнее уравнение принимает канонический вид (ср. с (26)):

$$\frac{x_1^2}{(1/\sqrt{\varepsilon_1})^2} + \frac{x_2^2}{(1/\sqrt{\varepsilon_2})^2} + \frac{x_3^2}{(1/\sqrt{\varepsilon_3})^2} = 1. \quad (29)$$

Отсюда видно, что главные полуоси имеют длину $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_3}}$. Если нас интересует точка поверхности, не лежащая на какой-либо главной оси? Проведем из центра эллипсоида до точки Р (см. рис. 5) прямую и примем ее за ось x'_1 при $x'_2 = x'_3 = 0$.

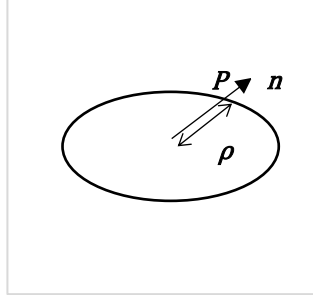


Рис. 5. Расстояние от центра эллипсоида до точки на поверхности равно $\rho = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}_{lj}}}$, при условии, что направление, вдоль которого отсчитывается ρ , принято за x'_1

Положим в уравнении (28), в котором заштрихуем все координаты, $x'_2 = x'_3 = 0$, получим $\mathfrak{a}_{lj}(x'_1)^2 = 1$, откуда

$$x'_1 = \rho = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}_{lj}}}. \quad (30)$$

Таким образом, для конкретного диэлектрика можно измерить восприимчивость во всевозможных направлениях, затем построить тензорный эллипсоид, откладывая из выбранного центра отрезки, численно равные величине, обратной квадратному корню из восприимчивости, измеренной в соответствующем направлении. И наоборот, имея тензорный эллипсоид, можно указать, чему равна восприимчивость в заданном направлении.

На практике по всем направлениям измерения проводить нет необходимости. Например, для древесины, тензорный эллипсоид, которой является эллипсоидом вращения, достаточно измерить значения восприимчивости для $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, где φ — угол между направлением поля и большой полуосью тензорного эллипсоида, совпадающей с направлением волокон. Поле вдоль волокон отвечает углу $\varphi = 0$, а поперечное поле соответствует углу $\varphi = \frac{\pi}{2}$. На этой особенности (связь типа (30)) основана настоящая работа.

Все вышесказанное о тензорном эллипсоиде для $\mathfrak{a}_{lj}$ касается и тензора ε_{lj} .

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

В данной работе измеряется диэлектрическая проницаемость древесины. Диэлектрическую проницаемость удобнее измерять, нежели восприимчивость ϵ . Если имеется воздушный конденсатор емкостью C , который заполнен диэлектриком с проницаемостью ϵ , то емкость такого конденсатора с диэлектриком равна

$$C_{\partial} = \epsilon C, \quad (31)$$

а емкость можно измерить прибором, в основе которого лежат схемы с колебательными контурами.

Для измерения предлагаются две установки. Одна представляет собой конденсатор, состоящий из двух полых полуцилиндров. Внутри вставляется цилиндр из дерева, волокна которого перпендикулярны образующей цилиндра. Деревянный образец может вращаться, при этом образуются различные углы между вектором напряженности поля и волокнами. Емкость системы «конденсатор+дерево» меняется, т.к. $\epsilon = \epsilon_{\varphi}$. При измерении емкостей следует учитывать то обстоятельство, что помимо истинных емкостей существуют паразитные, обусловленные различными наводками. Поэтому для учета паразитных емкостей используется изотропный диэлектрик – оргстекло ($\epsilon = 2,6$) той же формы и размеров, что и деревянный образец.

Порядок действий следующий: измеряют емкость пустого конденсатора

$$C_0 = C_n + C_{\text{ц}}. \quad (32)$$

где C_n – паразитная емкость (неизвестная нам), $C_{\text{ц}}$ – истинная емкость пустого конденсатора (также неизвестная). Затем вставляют образец из оргстекла, измеряют емкость конденсатора с диэлектриком

$$C_{\text{орг}} = C_n + \epsilon_{\text{орг}} C_{\text{ц}}. \quad (33)$$

Затем тоже самое делают с деревянным образцом, для которого можно записать:

$$C(\varphi) = C_n + \epsilon(\varphi) C_{\text{ц}}. \quad (34)$$

Из последних трех уравнений получим

$$\epsilon(\varphi) = 1 + (\epsilon_{\text{орг}} - 1) \frac{C_{\text{ц}} - C_0}{C_{\text{орг}} - C_0}. \quad (35)$$

В последнюю формулу входят измеряемые величины. Отсчет углов производится по транспортиру. Значения емкостей снимаются по показаниям измерителя. Данная установка позволяет выставлять любой угол между вектором напряженности поля и волокнами, но обладает

существенным недостатком – поле внутри конденсатора, составленного из полуцилиндров, неоднородно. Поэтому результаты, полученные с этой установки, носят качественный характер.

Вторая установка представляет собой две пластины, экранированные металлической сеткой, т.е. плоский конденсатор. Поле в нем достаточно однородно. В качестве образца берутся два деревянных параллелепипеда, волокна одного из них параллельны ребру параллелепипеда (направление волокон указано на образце), волокна второго образуют угол в 30° с одним из ребер. Первый параллелепипед можно разместить двумя способами: волокна вдоль поля ($\varphi = 0$), волокна поперек поля ($\varphi = 90^\circ$). Второй параллелепипед может принимать также два положения: волокна образуют с полем углы в 30° и 60° . Для учета паразитной емкости имеется параллелепипед из оргстекла. Порядок измерений тот же, что и на первой установке. Расчет $\varepsilon(\varphi)$ ведется по формуле (35), в которой теперь все измеренные емкости относят к плоскому конденсатору. Недостаток второй установки – ограниченное число положений диэлектрика, при которых проводятся измерения диэлектрической проницаемости.

Предлагаемые установки подключаются к измерителю индуктивностей и емкостей типа Е12-І (см. рис. 6).

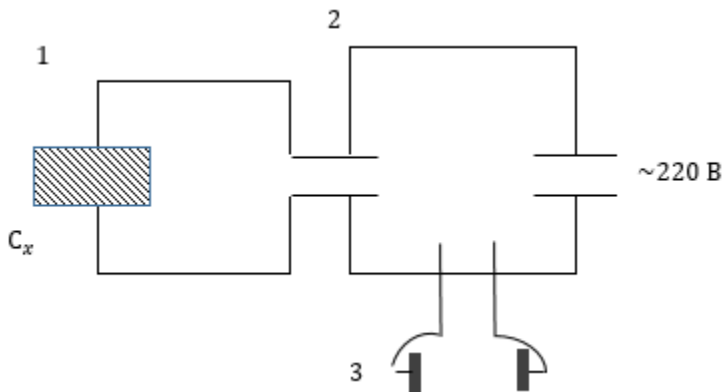


Рис. 6. Блок – схема установки. 1 – конденсатор с исследуемым диэлектриком; 2 – измеритель индуктивностей и емкостей; 3 – головные телефоны

Принципиальная схема измерителя изображена на рис. 7. Опорный генератор (I) создает колебания частоты ν_1 , которая зависит от емкости

регулируемого конденсатора $C_{(p)}$. Второй генератор (2), содержащий изучаемый конденсатор $C_{(x)}$, порождает колебания частоты ν_2 . Колебания с частотами ν_1 и ν_2 регистрируются стрелочным прибором и телефоном. При исчезновении звука (и нулевом показании прибора) $C_{(x)} = C_{(p)}$.⁸

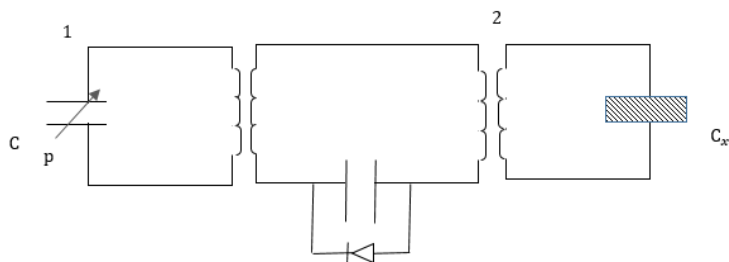


Рис. 7. Колебания с частотой ν_1 от опорного генератора 1 смешиваются с колебаниями частоты ν_2 от генератора 2 с исследуемой емкостью C_x на промежуточном контуре. Колебания с частотой $\nu_1 - \nu_2$ регистрируются.

ЗАДАНИЕ

1. Подготовьте к работе образцы и конденсаторы, емкость которых будет измеряться.
2. Подключите кабель питания к прибору E12-1 и включите прибор. Спустя некоторое время после включения питания загорится индикаторная неоновая лампочка. Подключите телефон (см. рис.6).
3. Ручку «чувствительности индикатора» поставьте в среднее положение, которое в дальнейшем будет «нулем» прибора.
4. Установите переключатель «множитель L» в положение «С».
5. Установите на нуль шкалы всех отчетных конденсаторов с гравировкой «отсчет С до 1 т.рF», «отсчет С до 10 рF» и переключатель «отсчет С до 5 т.рF».

⁸ В настоящей работе фактически измеряется не статическая диэлектрическая проницаемость ϵ , поскольку используется низкочастотное поле. Но для всех реальных диэлектриков, кроме сегнетоэлектриков, дисперсия ϵ , т.е. зависимость проницаемости от частоты поля $\epsilon = \epsilon\omega$, отсутствует.

6. Ручкой «начальная установка» добейтесь нулевого показания на стрелочном индикаторе (см. пункт 3).
7. Включите измеряемую емкость в гнезде «С_x» и «3» и произведите вторичную настройку на нулевой отсчет индикатора, пользуясь переключателем «отсчет С до 5 т.рF» и ручкой «отсчет С до 1 т.рF» или ручкой «отсчет С до 10 рF». При этом ручку «начальная установка» **не трогать!**
8. Измеряемая емкость в зависимости от ее величины определяется по шкале «отсчет С до 10 рF» или «отсчет С до 1 т.рF», либо как сумма показаний шкалы переключателя «отсчет С до 5 т.рF» и шкалы «отсчет С до 1 т.рF».
 При измерении нельзя подносить руку или какой-нибудь предмет к соединительным проводам, зажимам прибора и конденсатора, т.к. это приведет к неконтролируемым изменениям емкости установки
9. Измеренные значения емкости занесите в заранее подготовленную таблицу. Измерения проводите несколько раз, последовательно изменяя значения углов, в прямом и обратном направлении для обоих исследуемых образцов.
10. Вычислите среднее значение емкости $\langle C(\varphi) \rangle$, отвечающее данному углу φ , затем $\varepsilon(\varphi)$ по формуле (35), $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\varphi)}}$.
11. Постройте эллипс (сечение тензорного эллипсоида), откладывая из общего центра отезки, длина которых численно равна $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\varphi)}}$ для соответствующих углов φ (или точки на указанных выше расстояниях). В первом квадранте кривая строится по нанесенным точкам, остальные участки кривой достраиваются симметрично к первому.
12. В заключение отчета сделайте развернутый вывод (анализ) по полученным результатам.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Почему дипольный момент атома водорода в отсутствие внешнего электрического поля равен нулю?
2. Какова размерность атомной поляризуемости α ?
3. Совпадают ли размерности поляризуемости α и диэлектрической восприимчивости ε ?

4. Молекула двуокиси углерода – простейший пример проявления анизотропии электрических свойств. Почему макроскопический объем газа не проявляет анизотропии?
5. Докажите симметричность тензора ϵ_{ij} , воспользовавшись формулой (24).
6. Можно ли утверждать, что тензор ϵ_{ij} симметричен в любой декартовой системе координат, не зная закона преобразования компонент ϵ_{ij} ?
7. Система координат и диэлектрик одновременно повернуты на одинаковый угол. Изменят ли свои значения компоненты тензора ϵ_{ij} в новой системе координат?
8. Диэлектрик изменил свое положение относительно заданной системы координат. Что произойдет с тензором диэлектрической проницаемости ϵ_{ij} ?
9. При вычислении объемной плотности энергии поля в диэлектрике было потребовано, чтобы поле изменялось квазистатически. Чем это требование вызвано?

ПРИЛОЖЕНИЕ А

СИММЕТРИЯ ТЕНЗОРА ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ

Пусть у нас имеется некий поляризуемый объект, в общем случае, не обладающий какой-либо симметрией, например, молекула. Электрическое поле E индуцирует дипольный момент p , связанный с E линейно зависимостью

$$p_l = a_{lj}E_j \quad (j=1,2,3). \quad (\text{A.1})$$

При квазистатическом изменении электрического поля на dE «центры тяжести» зарядов смещаются на расстояние dr . Поле совершило над молекулой элементарную работу

$$dA = qEdr = Edp. \quad (\text{A.2})$$

Работа, затраченная полем, идет на изменение потенциальной энергии деформации молекулы, т.е.

$$dW = Edp = E_l dp_l. \quad (\text{A.3})$$

Это утверждение является следствием закона сохранения энергии.

Наша задача состоит в проверке симметрии тензора поляризуемости, а именно мы должны доказать выполнение соотношения

$$a_{lj} = a_{jl} \quad (l, j=1,2,3). \quad (\text{A.4})$$

Для простоты расположим молекулу в плоскости (x,y) . Тогда вместо системы уравнений (A.1) имеем

$$\begin{aligned} p_x &= a_{xx}E_x + a_{xy}E_y, \\ p_y &= a_{yx}E_x + a_{yy}E_y. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Предположим, что молекула расположена в поле E_1 и обладает дипольным моментом p_1 . Назовем это состояние 1. Изменим теперь поле до значения E_2 . Дипольный момент также изменится и будет равен p_2 . Для перевода молекулы из состояния 1 в состояние 2 будет совершена работа A , которая пойдет на изменение потенциальной энергии деформации молекулы

ΔW . Перейти в состояние 2 можно различными способами, но работа A должна быть одинаковой для любого пути перехода.

Допустим, что исходное состояние 1 характеризуется векторами $E_1 = 0$ и $P_1 = 0$. Сравним два простейших пути перехода в состояние 2.

Первый путь:

А) оставляем $E_y = 0$; изменяем E_x от 0 до E_{2x} .

Б) оставляем $E_x = E_{2x}$; изменяем E_y от 0 до E_{2y} .

Второй путь:

А) оставляем $E_x = 0$; изменяем E_y от 0 до E_{2y} .

Б) оставляем $E_y = E_{2y}$; изменяем E_x от 0 до E_{2x} .

Вычислим работу, совершаемую на первом пути. Элементарная работа для двухмерного случая из (А.2) равна

$$dA = E_x dp_x + E_y dp_y, \quad (\text{А.6})$$

С учетом (А.5) получим

$$dA = E_x(a_{xx}dE_x + a_{xy}dE_y) + E_y(a_{yx}dE_x + a_{yy}dE_y).$$

Тогда для а) имеем ($E_y = 0, dE_y = 0$):

$$A_{1a} = \int_{E_x=0}^{E_x=E_{2x}} a_{xx}E_x dE_x = \frac{1}{2}a_{xx}E_{2x}^2.$$

Для б) получим ($E_x = E_{2x}, dE_x = 0$):

$$A_{1b} = \int_{E_y=0}^{E_y=E_{2y}} (a_{xy}E_{2x} + a_{yy}E_y)dE_y = a_{xy}E_{2x}E_{2y} + \frac{1}{2}a_{yy}E_{2y}^2.$$

Сложив A_{1a} и A_{1b} получим полную работу, совершенную полем при переводе молекулы из состояния 1 в состояние 2 первым способом:

$$A_1 = \frac{1}{2}a_{xx}E_{2x}^2 + a_{xy}E_{2x}E_{2y} + \frac{1}{2}a_{yy}E_{2y}^2. \quad (\text{А.7a})$$

Аналогично вычисляется работа A_2 для второго пути:

$$A_2 = \frac{1}{2}a_{xx}E_{2x}^2 + a_{yx}E_{2y}E_{2x} + \frac{1}{2}a_{yy}E_{2y}^2. \quad (\text{А.7б})$$

Конечное состояние для обоих путей одинаково, потенциальная энергия молекулы также одна и та же. Поэтому из равенства $A_1 = A_2$ следует требуемый результат

$$a_{xy} = a_{yx}.$$

Обобщение на третье измерение несложно, лишь более громоздкими станут формулы.

Подчеркнем, что симметричность тензора a_{ij} доказана нами для любого поляризуемого микрообъекта, какой бы формы он не был. Требуется только, чтобы объект на внешнее поле отзывался линейным образом, т.е. должно выполняться соотношение (А.1).

Симметричность a_{ij} отражает физические свойства молекул и вовсе не обязательна для любого тензора.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ПОВЕДЕНИЕ ТЕНЗОРА НА ВРАЩЕНИИ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Мы рассмотрим преобразование компонент тензора поляризуемости a_{ij} при переходе из одной системы координат в другую, повернутую относительно первоначальной, и докажем тот факт, что симметричный в одной системе координат тензор остается симметричным в другой системе.

Вначале посмотрим, что происходит с компонентами вектора E при вращении системы координат. Зададим две прямоугольные системы координат K и K' базисами e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3 . Вектор E по величине и направлению не зависит от выбора координат, но проекции его на оси координат различны в разных системах. Если в K -системе можно записать:

$$E = E_l e_l, \quad (l = 1, 2, 3). \quad (\text{Б.1})$$

То в K' -системе тот же вектор записывается в виде

$$E = E'_l e'_l, \quad (l = 1, 2, 3). \quad (\text{Б.2})$$

Желательно знать связь E'_l с E_l . Из (Б.1) и (Б.2) имеем

$$E'_l e'_l = E_l e_l, \quad (l = 1, 2, 3). \quad (\text{Б.3})$$

Напомним, что по индексу l подразумевается суммирование.

Умножим скалярно на e'_k последнее равенство:

$$E'_l e'_k e'_l = E_l e'_k e_l, \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (\text{Б.4})$$

Но

$$e'_k e'_l = \delta_{kl}.$$

где δ_{kl} – символ Кронекера (см. (19) и (20)), т.к. скалярное произведение единичных ортов равно либо 1, либо 0. Следовательно от суммы слева в (Б.4) останется только одно слагаемое с $l = k$, которое равно $E'_k \delta_{kk} = E'_k$ (по k суммы нет).

Скалярное произведение $e'_k e'_l$ равно косинусу угла между осью x'_k системы K' и осью x_l системы K . Обозначив этот косинус символом a_{kl} , можно записать:

$$a_{kl} = e'_k e_l \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (\text{Б.5})$$

Тогда уравнение (Б.4) переписывается в виде

$$E'_k = a_{kl} E_l \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (\text{Б.6})$$

Частный случай поворота системы координат K вокруг оси z (т.е. изменяются лишь x и y). Представлен на рис. 8, где матрица преобразования компонент вектора E имеет вид

$$a_{kl} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

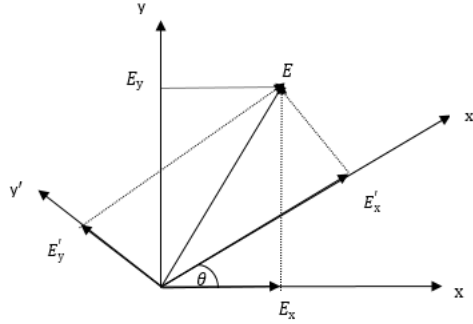


Рис. 8. Преобразование компонент вектора при повороте системы координат вокруг оси z .

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(x', x) = \cos \theta, \quad a_{22} = \cos(y', y) = \cos \theta, \\ a_{21} &= \cos(y', x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta, \\ a_{12} &= \cos(x', y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta, \\ E'_x &= E_x \cos \theta + E_y \sin \theta, \\ E'_y &= -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta. \end{aligned}$$

Итак, новые компоненты E'_k выражаются через старые линейно. В качестве коэффициентов связи выступают компоненты матрицы поворота a_{lk} , зависящие от углов поворота системы координат.

Точно также преобразуются компоненты вектора дипольного момента p :

$$p'_k = a_{kl} p_l \quad (k, l = 1, 2, 3) \quad (\text{Б.7})$$

Формулы для обратного преобразования

$$\begin{aligned} E_k &= a_{kl} E'_l \quad (k, l = 1, 2, 3), \\ p_k &= a_{kl} p'_l \quad (k, l = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

Получается аналогично, если умножить (Б.3) на орт e_k .

Теперь, имея правила преобразования (Б.6)-(Б.8), можно получить закон преобразования компонент тензора a_{lj} .

В K -системе вектор p связан с вектором E соотношением

$$p_l = a_{lj} E_j \quad (l, j = 1, 2, 3). \quad (\text{Б.9})$$

Абсолютно те же преобразования мы имеем и в K' -системе, но компоненты векторов и тензора уже другие:

$$p'_l = a'_{lj} E'_j \quad (l, j = 1, 2, 3). \quad (\text{Б.10})$$

Таким образом возникает следующий вопрос. Какова связь между a_{lj} и a'_{lj} ? Проведем следующую цепочку преобразований. Из (Б.7) имеем

$$p'_l = a_{lr} p_r \quad (l, r = 1, 2, 3).$$

Из (Б.9) свяжем p'_l со старыми компонентами поля:

$$p'_l = a_{lr} a_{rm} E_m \quad (l, r, m = 1, 2, 3).$$

С помощью (Б.8) от старых компонент поля перейдем к штрихованным:

$$p'_l = a_{lr} a_{rm} a_{mj} E'_j \quad (l, j, r, m = 1, 2, 3).$$

Из последнего равенства и (Б.10) следует (матрица a_{mj} симметрична)

$$a'_{lj} = a_{lr} a_{jm} a_{rm} \quad (l, j, r, m = 1, 2, 3). \quad (\text{Б.11})$$

Напомним, по l, m подразумевается суммирование.

Таким образом, соотношение (Б.11) дает нам правило пересчета компонент тензора из K -системы в K' -систему. Аналогично можно получить обратное преобразование. Итак, новые компоненты тензора поляризуемости линейно зависят от старых компонент, но квадратично – от компонент матрицы поворота. При заданном в K -системе тензоре a_{lj} можно подходящим поворотом добиться зануления внедиагональных компонент тензора, т.е. $a'_{lj}=0$ при $l \neq j$.

И еще один важный вопрос. Тензор a_{lj} симметричен. Останется ли он симметричным после поворота системы координат?

$$a_{lj} = a_{lj} \stackrel{?}{\Rightarrow} a'_{lj} = a'_{lj}.$$

Ответ: тензор симметричен в любой системе координат. Докажем это. Из (Б.11) следует

$$a'_{lj} = a_{lr} a_{jm} a_{rm} \quad (l, j, r, m = 1, 2, 3).$$

Обозначив $r \rightarrow m, m \rightarrow r$, получим

$$a'_{lj} = a_{lm} a_{jr} a_{mr} \quad (l, j, r, m = 1, 2, 3).$$

Воспользовавшись $a_{ml} = a_{lm}$, запишем

$$a'_{lj} = a_{lm} a_{jr} a_{mr} = a_{jr} a_{lm} a_{rm} = a'_{jl} \quad (l, j, r, m = 1, 2, 3).$$

Что и требовалось показать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Парселл Э. Электричество и магнетизм. – М.: Наука, 2005. – 416 с. – (Берклеерский курс физики.)
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. – М.: Физматлит, 2020. – 656 с.
3. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма. Учебное пособие для студентов вузов – 2-е, стереотип. – М.: Высш. шк., 1991– 279 с.
4. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. Учебное пособие для студентов вузов – 2-е, стереотип. – М.: Лань, 2010 – 464 с.
5. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 7. – М. : АСТ, 2019. 496 с.

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на оборудовании
Издательства Томского государственного университета
Заказ № 5758 от 22.01.2024 г. Тираж 30 экз.

634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)–52-98-49. Сайт: <http://publish.tsu.ru>. E-mail: rio.tsu@mail.ru

