

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН
КАРШИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
(ИТММ-2023)**

**МАТЕРИАЛЫ
XXII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
4–9 декабря 2023 г.**

Часть 1

ТОМСК
Издательство Томского
государственного университета
2023

УДК 519
ББК 22.17
И74

Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2023): Материалы XXII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова (4–9 декабря 2023 г.). — Томск: Издательство Томского государственного университета, 2023. — Часть 1. — 416 с.

ISBN 978–5–907572–40–9

Сборник содержит избранные материалы XXII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова по следующим направлениям: теория массового обслуживания и ее приложения, интеллектуальные системы и робототехника, информационные технологии и программная инженерия, математическое и компьютерное моделирование технологических процессов.

Материалы подготовлены при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519
ББК 22.17

Р е д к о л л е г и я:

С.П. Моисеева, доктор физико-математических наук, профессор
Д.В. Семенова, кандидат физико-математических наук, доцент
С.В. Шидловский, доктор технических наук
Е.А. Фёдорова, кандидат физико-математических наук
Д.В. Шашев, кандидат технических наук
О.Д. Лизюра

ISBN 978–5–907572–40–9

© Авторы. Текст, 2023
© Томский государственный
университет. Оформление.
Дизайн, 2023

NATIONAL RESEARCH TOMSK STATE UNIVERSITY
PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA
V.A. TRAPEZNIKOV INSTITUTE OF CONTROL
SCIENCES OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
KARSHI STATE UNIVERSITY

**INFORMATIONAL TECHNOLOGIES
AND MATHEMATICAL MODELLING
(ITMM-2023)**

**PROCEEDINGS
of the 22th International Conference
named after A. F. Terpugov
2023 December, 4–9**

Part 1

TOMSK
Tomsk State
University Publishing
2023

UDC 519
LBC 22.17
I60

Informational technologies and mathematical modelling (ITMM-2023):
Proceedings of the 22th International Conference named after A. F.
Terpugov (2023 December, 4–9). — Tomsk: Tomsk State University
Publishing, 2023. — Part 1. — 416 p.

ISBN 978–5–907572–40–9

This volume presents selected papers from the 22th International
Conference named after A.F. Terpugov. The papers are devoted to new
results in the following areas: queuing theory and its applications, intelligent
systems and robotics, information technology and software engineering,
mathematical and computer modeling of technological processes.

The proceedings was published by supporting of the Tomsk State
University Development Programme (Priority-2030).

UDC 519
LBC 22.17

E d i t o r s:

S.P. Moiseeva, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor.

D.V. Semenova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor.

S.V. Shidlovsky, Doctor of Technical Sciences.

E.A. Fedorova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences.

D.V. Shashev, Candidate of Technical Sciences.

O.D. Lizyura.

ISBN 978–5–907572–40–9

© Authors. Text, 2023
© Tomsk State University
Publishing. Design, 2023

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ПРИБОРОВ

Ю. А. Прокудина, А. Н. Моисеев

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

При выполнении исследований в теории массового обслуживания не всегда удается получить аналитический результат. Часто результат исследования формулируется в виде аппроксимации целевого распределения вероятностей. Представленная работа начинает цикл исследований, связанных с разработкой специализированного программного обеспечения, которое позволит строить аппроксимации таких распределений в аналитическом виде на основе серии экспериментов имитационного моделирования. В работе рассматриваются системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и анализируются результаты, связанные с распределением вероятностей числа заявок в системе в стационарном режиме. Проведен анализ имеющихся в научной литературе теоретических результатов. В итоге составлена сводная таблица, которая в кратком виде представляет известные в этом классе моделей результаты, что позволит реализовать необходимую функциональность описанной программной системы для данного класса моделей.

Ключевые слова: *имитационное моделирование, система массового обслуживания, неограниченное число приборов, аппроксимация распределения вероятностей*

Введение

При анализе систем массового обслуживания (СМО) в качестве одного из важнейших результатов исследователи получают распределение вероятностей числа заявок в системе (обычно для стационарного режима). Для систем с неограниченным числом приборов эта случайная величина (число заявок в системе) совпадает с числом занятых приборов. Если такое распределение получить в точном виде не удастся, то исследователи стараются получить его аппроксимацию, которая обычно связана с каким-либо асимптотическим условием и работает в ситуациях близких к этому условию. Отметим, что, как показывает анализ литературы, полученное распределение вероятностей или его

аппроксимация в большинстве случаев относятся к некоторому классу известных распределений: пуассоновское, отрицательное биномиальное (ОБР), нормальное (гауссовское, а точнее его дискретный аналог) и т.п.

К сожалению, не для всех конфигураций СМО могут быть получены аналитические результаты, либо полученный результат может быть представлен только в некоторой сложной для практического применения форме. В настоящее время в Томском государственном университете начаты исследования и разработка программного комплекса SimQ [1, 2]. Данный программный комплекс предназначен для имитационного моделирования СМО. Одной из задач комплекса должно стать построение аппроксимации распределения вероятностей числа заявок в заданной СМО в аналитическом виде на основе серии экспериментов имитационного моделирования. Для достижения этой задачи требуется выполнить анализ научной литературы, посвященной исследованиям в области теории массового обслуживания, что позволит выявить, какие известные распределения вероятностей или аппроксимации получены в результате исследования таких систем. Поскольку существует большое количество научных работ в этой области, а также множество видов самих СМО, было принято решение начать анализ с некоторого класса моделей. В качестве такого класса были выбраны СМО с неограниченным числом приборов, поскольку эти модели наиболее близки авторам по предыдущим исследованиям.

Таким образом, в работе выполнен анализ систематизация результатов теоретического исследования СМО с неограниченным числом приборов [4]–[13], а в качестве целевого распределения выбрано стационарное распределение числа заявок в системе.

Анализ числа заявок в СМО

Результаты выполненного анализа по указанным источникам можно сформулировать в следующем виде (таблица 1). В таблице использована нотация Кендалла [3] обозначений типа СМО. В частности, в данной работе используются обозначения типа $A/S/\infty$. Первый знак (A) означает тип входящего потока и имеет следующие значения:

- M – простейший (пуассоновский) поток;
- GI – рекуррентный поток;
- $MMPP$ – $MMPP$ -поток (Markov Modulated Poisson Process);
- MAR – MAR -поток (Markovian Arrival Process);
- $BMAR$ – групповой MAR -поток (Batch Markovian Arrival Process).

Второй знак обозначения (S) означает тип обслуживания и имеет два значения:

M – экспоненциальное распределение;

G – неэкспоненциальное распределение с заданной функцией распределения вероятностей (рекуррентное обслуживание).

Наконец, знак ∞ , который стоит в третьей позиции, означает, что число обслуживающих приборов в СМО не ограничено.

Таблица 1

Стационарные распределения вероятностей числа заявок в СМО с неограниченным числом приборов

Тип СМО	Асимптотическое условие	Распределение числа заявок в системе	Источники
$M/M/\infty$	нет	пуассоновское с параметром $\rho = \lambda/\mu$	[4]
$M/G/\infty$	нет	пуассоновское с параметром $\rho = \lambda b$	[4, 5]
$GI/G/\infty$	$\lambda \rightarrow \infty$	нормальное с параметрами $M = \lambda b$ и $D = \lambda b + \kappa\beta$	[6, 7]
$MMPP/G/\infty$	$\lambda \rightarrow \infty$	нормальное с параметрами $M = \lambda b$ и $D = \lambda b + \kappa\beta$	[8]
$MAP/G/\infty$	$\lambda \rightarrow \infty$	нормальное с параметрами $M = \lambda b$ и $D = \lambda b + \kappa\beta$	[9]
$MMPP/M/\infty$ с повторными обращениями	$b \rightarrow \infty$	нормальное с параметрами $M = \lambda/[\mu(1-r)]$ и $D = \kappa/[\mu(1-r)]$	[10]
$BMAP/M/\infty$	$b \rightarrow \infty$	нормальное с параметрами $M = \lambda/\mu$ и $D = \kappa/\mu$	[11]
$GI/G/\infty$		ОБР с параметрами $r = \lambda b/(\lambda b + \kappa\beta)$ и $p = (\lambda b)^2/(\kappa\beta)$	[12]
$MAP/G/\infty$		ОБР с параметрами $r = \lambda b/(\lambda b + \kappa\beta)$ и $p = (\lambda b)^2/(\kappa\beta)$	[13]

Расшифровка использованных в таблице обозначений дана ниже:

λ – интенсивность входящего потока;

μ – параметр экспоненциального распределения времени обслуживания;

b – средняя продолжительность обслуживания. Для экспоненциального распределения $b = 1/\mu$. Для распределения, заданного функцией

$$B(x): b = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)] dt;$$

$$\beta \text{ вычисляется по формуле } \beta = \int_0^{\infty} [1 - B(\tau)]^2 dt;$$

величина $\varkappa$ зависит от типа входящего потока и полностью определяется его параметрами. Мы здесь не приводим формулы для вычисления $\varkappa$ ввиду их громоздкости и ограниченного объема данной публикации. За подробностями можно обратиться к соответствующим источникам, указанным в таблице;

r – вероятность повторного обслуживания (для моделей с повторным обслуживанием).

Аппроксимацию с помощью нормального распределения следует использовать в виде следующего ее дискретного аналога:

$$P(i) = (G(i + 0.5) - G(i - 0.5))(1 - G(-0.5))^{-1},$$

где $G(i)$ – функция распределения нормальной случайной величины с математическим ожиданием M и дисперсией D (их значения даны в таблице 1), $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Для систем вида $*/G/\infty$ с различными типами входящих потоков мы рассмотрели только асимптотические результаты в условии высокой интенсивности входящего потока ($\lambda \rightarrow \infty$), так как другие исследования не предоставляют результат в виде какого-либо известного типа распределения вероятностей. Также мы не использовали результаты асимптотических исследований данных систем в условиях растущего времени обслуживания ($b \rightarrow \infty$) [14], так как для этого асимптотического условия получаются аналогичные результаты.

Также в таблицу внесены аппроксимации в виде отрицательного биномиального распределения (ОБР) с числом попыток r и вероятностью успеха в одном испытании p (для действительных значений r) [12, 13]. Эти результаты в своей основе используют моменты гауссовских аппроксимаций, полученных в [6, 7, 9], но дают более точные результаты. Можно предположить, что аналогичный подход можно использовать и для других типов СМО.

Заключение

В результате проделанного анализа составлена таблица стационарных распределений вероятностей числа заявок в СМО с неограничен-

ным числом приборов различных конфигураций. На основе результатов данного анализа будет реализован соответствующий модуль программного обеспечения для построения аппроксимаций распределений числа заявок в СМО в аналитическом виде на основе серий экспериментов имитационного моделирования соответствующих систем.

Так как в данной работе были рассмотрены только разновидности СМО с неограниченным числом приборов, а в рассмотрение не попали такие модели как многофазные СМО, RQ-системы (системы с повторными вызовами), циклические системы, СМО с конечным числом источников и т.д., в дальнейшем необходимо произвести такой же анализ и для этих типов моделей массового обслуживания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оруджов Э. А., Моисеев А. Н. Разработка архитектурного прототипа подсистемы моделирования программного комплекса SIMQ // Материалы IX-й Международной научной конференции "Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем Томск, 26-28 мая 2022 г. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2022. С. 289–294.
2. Паньков М. А., Моисеев А. Н. Разработка библиотеки имитационного моделирования случайных объектов для программного комплекса SIMQ // Материалы IX-й Международной научной конференции "Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем Томск, 26-28 мая 2022 г. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2022. С. 298–303.
3. Kendall D. G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chains // Annals of Mathematical Statistics. – 1953. – Vol. 24, Iss. 3. – P. 338–354.
4. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания: уч. пособие – 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 228 с.
5. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания: учебник – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
6. Моисеев А. Н., Назаров А. А. Исследование системы массового обслуживания $HIG|GI|\infty$ // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 75–83.
7. Назаров А. А., Моисеев А. Н. Асимптотический анализ системы $GI/GI/\infty$ методами динамического просеивания и выделения первого скачка // Proceedings of the International Conference on Distributed Computer and Communication Networks (DCCN-2013), 7-10 октября 2013 г. Москва: Technosphaera, 2013. С. 410-417.
8. Севостьянова М. В., Моисеев А. Н., Назаров А. А. Исследование системы массового обслуживания $MMPP|GI|\infty$ с высокоинтенсивным вхо-

- дящим потоком // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ - 2013) : Материалы XII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием имени А.Ф. Терпугова. Ч.2. Томск: Изд-во Том-го ун-та, 2013. С. 84-89.
9. *Моисеев А. Н.* Асимптотический анализ системы массового обслуживания $MAR/GI/\infty$ с высокоинтенсивным входящим потоком // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3(32). С. 56-65.
 10. *Жидкова Л. А., Моисеева С. П.* Исследование числа занятых приборов в системе $MMPP|M/\infty$ с повторными обращениями // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1(26). С. 53-62.
 11. *Моисеева С. П., Пауль С. В.* Исследование системы $VMAR|M/\infty$ // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию проф. Г. А. Медведева. 23-26 февраля 2015. Минск, Беларусь: РИВШ, 2015. С. 182-187.
 12. *Зимин М. П., Моисеев А. Н.* Применение отрицательного биномиального распределения для аппроксимации стационарного распределения числа заявок в системе $HGI|GI/\infty$ // Труды Томского государственного университета. – Т. 304. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы VII Междунар. молодежной науч. конф. Томск, 23-25 мая 2019 г. Томск: Изд. дом Том. гос. ун-та, 2019. С. 236-241.
 13. *Зимин М. П., Моисеев А. Н., Бронер В. И.* Применение отрицательного биномиального распределения для аппроксимации стационарного распределения числа заявок в системе $MAR/GI/\infty$ // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019): материалы XVIII Междунар. конф. им. А. Ф. Терпугова, 26-30 июня 2019 г. Ч. 2. Томск: Изд-во НТЛ, 2019. С. 171-176.
 14. *Назаров А. А., Моисеева С. П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

Прокудина Юлия Андреевна — аспирант, НИ ТГУ, ИПМКН, кафедра программной инженерии. E-mail: *prokudina_ua@mail.ru*

Моисеев Александр Николаевич — доктор физико-математических наук, доцент, НИ ТГУ, ИПМКН, кафедра программной инженерии. E-mail: *moiseev.tsu@gmail.com*