ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Математика и механика № 84
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 514.765 MSC: 53B35
doi: 10.17223/19988621/84/3

Кэлеровы и сублагранжевы подмногообразия

Евгений Сергеевич Корнев

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия, q148@mail.ru

Аннотация. Описан способ получения кэлеровых и сублагранжевых подмногообразий в многообразиях произвольной размерности. Для этого используется понятие субтвисторной и субкэлеровой структуры, которое обобщает классические твисторные и кэлеровы структуры на вещественные многообразия любой размерности с вырожденной фундаментальной 2-формой. Приведены явные примеры таких подмногообразий, показано, как субтвисторная структура на многообразии позволяет локально разложить его в прямое произведение подмногообразий.
Ключевые слова: субтвисторная структура, субкэлерова структура, кэлерово подмногообразие, сублагранжево подмногообразие, вырожденная 2-форма

Для цитирования: Корнев Е.С. Кэлеровы и сублагранжевы подмногообразия // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 23–35. doi: 10.17223/19988621/84/3

Original article

Kähler and Sublagrangian Submanifolds

Eugene S. Kornev

Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation, q148@mail.ru

Abstract. The work describes a way to obtain Kähler and sublagrangian submanifolds in real manifolds of arbitrary dimension. For this purpose, the concept of subtwistor and sub-Kähler structure is used. They generalize the classic concepts of twistor and Kähler structures to real manifolds of any dimension with a degenerate fundamental 2-form. The explicit examples of such submanifolds are presented. It is also shown how the subtwistor structure on the manifold allows one to factorize locally this manifold into direct products of submanifolds.
Keywords: subtwistor structure, sub-Kähler structure, Kähler submanifold, sublagrangian submanifold, degenerate 2-form

For citation: Kornev, E.S. (2023) Kähler and Sublagrangian Submanifolds. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 23–35. doi: 10.17223/19988621/84/3

Введение

На вещественных многообразиях четной размерности широко изучаются кэлеровы, твисторные и эрмитовы структуры, а на вещественных многообразиях нечетной размерности – контактные и почти контактные метрические структуры (см.: [1]). Однако на вещественном многообразии нечетной размерности любая кососимметричная 2-форма является вырожденной. В [2] было введено понятие субтвисторной и субкэлеровой структуры, которое обобщает классические твисторные и кэлеровы структуры на вещественные многообразия любой размерности с вырожденной фундаментальной 2-формой. В данной работе описано, как субтвисторные и субкэлеровы структуры позволяют получать в вещественных многообразиях произвольной размерности кэлеровы и сублагранжевы подмногообразия. Понятие сублагранжева подмногообразия является обобщением классического лагранжева подмногообразия для многообразий произвольной размерности с субтвисторной или субкэлеровой структурой. Частный случай субтвисторной структуры – аффинорная метрическая структура, обобщающий понятие контактной и почти контактной метрической структуры на многообразия произвольной размерности, изучен для групп Ли и алгеброидов Ли в работах [3, 4]. Таким образом, субтвисторные структуры, субкэлеровы структуры и аффинорные метрические структуры дают общую теорию метрических структур на вещественных многообразиях любой размерности с вырожденной или нет фундаментальной 2-формой.

Субтвисторной структурой на многообразии M размерности ≥ 3 называется набор объектов (Ω, D, Φ, g), где Ω – регулярная ненулевая возможно вырожденная кососимметричная 2-форма на M, D – так называемое рабочее расслоение четного ранга на M, Φ – аффинор, ассоциированный с 2-формой Ω, и g – риманова метрика на M, связывающая аффинор Φ и 2-форму Ω. Если в M существует подмногообразие $Q : TQ = D\big|_Q$, ограничение Φ на Q есть комплексная структура, и 2-форма Ω замкнута на M, субтвисторная структура вместе с подмногообразием Q называется субкэлеровой структурой. Цель данной работы – показать, как с помощью субтвисторных и субкэлеровых структур можно получать в вещественных многообразиях произвольной размерности кэлеровы и сублагранжевы подмногообразия, а также как субтвисторная структура на многообразии влияет на локальную геометрию этого многообразия.

В разд. 1 приведены необходимые сведения и определения для субтвисторных структур, следуя работе [2]. В разд. 2 рассмотрен частный случай субтвисторной структуры – субкэлерова структура. В разд. 3 введено понятие тензора кручения субтвисторной структуры и показано, как субтвисторная структура с нулевым тензором кручения влияет на локальную геометрию многообразия. В разд. 4 приведены явные примеры многообразий, на которых не существует кэлеровой структуры, но существуют субкэлерова структура и кэлеровы подмногообразия, а также получены необходимые топологические условия существования на многообразии субтвисторной или субкэлеровой структуры. В разд. 5 даются определения и примеры сублагранжевых подмногообразий в многообразиях произвольной размерности. В данной работе используются определения и результаты, подробно описанные в работах [2–4].

1. Субтвисторные структуры

Пусть M – гладкое вещественное многообразие размерности $n \geq 3$, Ω – ненулевая кососимметричная 2-форма на M, X – векторное поле на M. *Внутренним произведением* 2-формы Ω и векторного поля X называется 1-форма $\mathrm{I}_X\Omega$, такая что для любого векторного поля $Y \in C^1(TM)$

$$\mathrm{I}_X(Y) = \Omega(X, Y).$$

Определение 1.1. *Радикалом 2-формы Ω в точке $x \in M$ называется касательное подпространство*

$$\mathrm{rad}\Omega_x = \{v \in T_xM : \mathrm{I}_v\Omega_x = 0\}.$$

2-форма Ω называется регулярной, если размерность подпространства $\mathrm{rad}\Omega_x$ не зависит от точки x.

Радикалом регулярной 2-формы Ω на многообразии M называется распределение касательных подпространств

$$\mathrm{rad}\Omega = \bigcup_{x\in M} \mathrm{rad}\Omega_x.$$

Объединяя результаты доказанные в [2, 3], имеем следующее:

Теорема 1.2. *Пусть M – вещественное многообразие размерности $n \geq 3$, Ω – ненулевая регулярная кососимметричная 2-форма на M, и r – ранг распределения $\mathrm{rad}\Omega$. Тогда:*

1) *Если n четно, то и r четно, и $0 \leq r \leq n-2$;*

2) *Если n нечетно, то и r нечетно, и $1 \leq r \leq n-2$;*

3) *Если 2-форма Ω замкнута, т.е. $d\Omega = 0$, то распределение $\mathrm{rad}\Omega$ инволютивно.*

Пусть g – риманова метрика на многообразии M, и D – ортогональное дополнение к $\mathrm{rad}\Omega$. Распределение D называется *рабочим расслоением* для 2-формы Ω. Говорят, что 2-форма Ω не вырождена, если $\mathrm{rad}\Omega = \{0\}$. Из теоремы 1.2 сразу получаем:

Следствие 1.3. *Пусть Ω – ненулевая регулярная кососимметричная 2-форма на многообразии M размерности $n \geq 3$ с рабочим расслоением D. Тогда ранг распределения D является четным при любом n, и ограничение 2-формы Ω на сечения распределения D есть невырожденная 2-форма.*

Зафиксируем следующий набор объектов: (Ω, D, g), где Ω – ненулевая регулярная 2-форма на многообразии M, D – рабочее расслоение для Ω, g – риманова метрика на M.

Определение 1.4. *Аффинором, ассоциированным с 2-формой Ω, называется непрерывное поле эндоморфизмов Φ касательных подпространств на M, удовлетворяющее следующим свойствам:*

$$\Omega(X, Y) = g(\Phi X, Y), \quad X, Y \in C^1(TM),$$

$$G(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y), \quad X, Y \in C^1(D).$$

В [2] доказано, что непосредственно из определения вытекают следующие свойства аффинора:

Предложение 1.5. *Пусть Ф – аффинор, ассоциированный с ненулевой регулярной 2-формой Ω с рабочим расслоением D. Тогда:*

1) $\ker\Phi = \mathrm{rad}\Omega$;

2) $\Phi^2\big|_D = -\mathrm{id}$, *где* id *– поле тождественных операторов на M*;

3) $\Phi^*\Omega = \Omega\circ\Phi = \Omega$;

4) *Для любых* $X, Y \in C^1(D)\Omega(X, \Phi Y)$ *есть скалярное произведение на сечениях рабочего расслоения.*

Таким образом, аффинор Ф есть обобщение почти комплексной структуры, положительно ассоциированной с невырожденной 2-формой на многообразии произвольной размерности с вырожденной регулярной 2-формой. А четверка (Ω, *D*, Ф, *g*) есть обобщение твисторной структуры.

Определение 1.6. *Субтвисторной структурой на многообразии M размерности n* ≥ 3 *называется набор объектов* (Ω, *D*, Ф, *g*)*, где Ω – ненулевая регулярная кососимметричная 2-форма на M, D – рабочее расслоение на M, Ф – аффинор, ассоциированный с 2-формой Ω, g – риманова метрика на M.*

Из этого определения видно, что кэлерова, почти кэлерова и твисторная структуры являются частными случаями субтвисторной структуры в случае, когда $\mathrm{rad}\Omega = \{0\}$ и *n* четно. В этом случае рабочее расслоение *D* = *TM*.

2-форма Ω в определении 1.6 называется *фундаментальной 2-формой* субтвисторной структуры. Из п. 3 теоремы 1.2 и теоремы Фробениуса для распределений следует, что если вещественное многообразие *M* размерности ≥ 3 допускает субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой Ω, то через каждую точку $x \in M$ проходит интегральное риманово подмногообразие $R_x : TR_x = \mathrm{rad}\Omega\big|_{R_x}$. Отсюда получаем:

Следствие 1.7. *Если вещественное многообразие M допускает субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой и радикалом ранга r* ≥ 1*, то M есть слоение с римановыми слоями размерности r.*

2. Субкэлеровы структуры

Здесь мы рассмотрим частный случай субтвисторных структур – субкэлеровы структуры.

Определение 2.1. *Субкэлеровой структурой на вещественном многообразии M размерности n* ≥ 3 *называется субтвисторная структура* $(\Omega, D, \Phi, g) : d\Omega = 0$ *на M вместе с подмногообразием* $Q : TQ = D\big|_Q$, *и ограничение аффинора Ф на Q есть комплексная структура.*

Из определения видно, что ограничение субкэлеровой структуры на подмногообразие *Q* есть кэлерова структура на *Q*. Таким образом, если на вещественном многообразии размерности *n* ≥ 3 существует субкэлерова структура с радикалом ранга *r* ≥ 1, то в *M* существует кэлерово подмногообразие комплексной размерности $\frac{n-r}{2}$. Из теоремы Фробениуса для распределений следует, что для инволютивного распределения всегда существует интегральное подмногообразие максимальной размерности. Таким образом, чтобы субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и инволютивным рабочим расслоением индуцировала субкэлерову структуру, достаточно найти интегральное подмногообразие максимальной размерности для рабочего расслоения, ограничение на которое аффинора есть комплексная структура на этом подмногообразии. Далее рассмотрим примеры субтвисторных структур, удовлетворяющих этим условиям.

Определение 2.2. *Аффинорной метрической структурой на вещественном многообразии M размерности* $n \geq 3$ *называется набор объектов* (α, D, Φ, g)*, где* α *– 1-форма на M, внешний дифференциал которой есть регулярная ненулевая 2-форма на M, D – рабочее расслоение для 2-формы* $d\alpha$*,* Φ *– аффинор, ассоциированный с 2-формой* $d\alpha$*, g – риманова метрика на M.*

Поскольку $d^2\alpha = 0$, из этого определения следует, что аффинорная метрическая структура всегда индуцирует субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой. Аффинорная метрическая структура является обобщением контактной метрической структуры на многообразия произвольной размерности. В частности, контактная метрическая структура на многообразии нечетной размерности есть аффинорная метрическая структура с радикалом ранга 1.

Пусть (α, D, Φ, g) – аффинорная метрическая структура на многообразии M. По теореме Фробениуса рабочее расслоение D инволютивно тогда и только тогда, когда через каждую точку $x \in M$ проходит интегральное подмногообразие $Q_x : TQ_x = D\big|_{Q_x}$. Остается выяснить, когда ограничение аффинора Φ на такие подмногообразие есть комплексная структура. Сначала заметим, что ограничение аффинора Φ на любое подмногообразие $Q : TQ = D\big|_Q$ есть почти комплексная структура на Q в силу п. 2 предложения 1.5. Необходимо, чтобы эта почти комплексная структура была интегрируемой, т.е. позволяла ввести на подмногообразии Q комплексные локальные координаты, согласованные с действием поля линейных операторов Φ в слоях касательного расслоения TQ (см.: [5. Гл. 9]).

Пусть $D^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes D$ – комплексификация рабочего расслоения D. Тогда $D^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$, где

$$W_+ = \{X \in C^1(D^{\mathbb{C}}) : \Phi X = X\},$$
$$W_- = \{X \in C^1(D^{\mathbb{C}}) : \Phi X = -X\}.$$

Если $TQ = D\big|_Q$, то ограничение аффинора Φ на Q есть интегрируемая почти комплексная структура тогда и только тогда, когда распределения $W_+\big|_Q$ и $W_-\big|_Q$ инволютивны (см.: [5. Гл. 9]). Поскольку в случае инволютивного рабочего расслоения D подмногообразие Q можно провести через любую точку $x \in M$, окончательно получаем:

Теорема 2.3. *Аффинорная метрическая структура* (α, D, Φ, g) *на вещественном многообразии M размерности* $n \geq 3$ *индуцирует субкэлерову структуру на M, если все распределения* D, W_+, W_- *инволютивны. В этом случае ограничение* *индуцированной субкэлеровой структуры на любое подмногообразие* $Q : TQ = D\big|_Q$ *есть кэлерова структура на Q, и Q есть кэлерово подмногообразие в M.*

Радикалом аффинорной метрической структуры называется радикал индуцированной этой аффинорной метрической структурой субтвисторной структуры.

Следствие 2.4. *Если вещественное многообразие M размерности* $n \geq 3$ *допускает аффинорную метрическую структуру с радикалом ранга* $r \geq 1$, *инволютивным рабочим расслоением D и инволютивными комплексными распределениями* W_+, W_-, *то M есть слоение с кэлеровыми слоями комплексной размерности* $\frac{n-r}{2}$.

Простейшим примером многообразия, допускающего аффинорную метрическую структуру с инволютивным рабочим расслоением, является прямое произведение $Q \times R$, где Q – симплектическое многообразие с точной симплектической структурой, R – любое риманово многообразие. В этом случае рабочее расслоение – это TQ, а радикал – это TR. В частности, многообразие $T^{2n} \times P$, где T^{2n} – $2n$-мерный тор, а P – риманово многообразие нечетной размерности, не допускает кэлеровой структуры, но допускает субкэлерову структуру с радикалом TP. Примером многообразия, не допускающего субкэлерову структуру, является четырехмерная сфера S^4. В [2] доказано, что S^4 не допускает субтвисторных структур с радикалом любого допустимого ранга, а следовательно, не допускает субкэлеровых структур.

Замечание 2.5. *Поскольку контактная метрическая структура – это аффинорная метрическая структура с радикалом ранга 1, а контактное распределение всегда максимально неинволютивно, контактная метрическая структура не может индуцировать субкэлерову структуру с инволютивным рабочим расслоением.*

3. Кручение субтвисторной структуры

Чтобы получить условие, когда субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой порождает субкэлерову структуру, нам потребуется ввести дополнительный объект.

Определение 3.1. *Тензором кручения субтвисторной структуры* (Ω, D, Φ, g) *на многообразии M размерности* ≥ 3 *называется непрерывное тензорное поле N типа* (2, 1), *определенное на паре векторных полей* $X, Y \in C^1(TM)$ *следующим образом:*

$$N(X,Y) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X,Y],$$

где $[X, Y]$ *– скобка Ли векторных полей X и Y.*

Из определения 3.1 и предложения 1.5 следует, что для любого интегрального подмногообразия $Q : TQ = D\big|_Q$ ограничение тензора кручения N на Q есть тензор Нейенхейса почти комплексной структуры $\Phi\big|_Q$. Интегрируемость этой почти комплексной структуры на Q эквивалентна условию $N\big|_Q = 0$ (см.: [5. Гл. 9].

Теорема 3.2. *Пусть M – вещественное многообразие размерности* $n \geq 3$, *и* (Ω, D, Φ, g) *– субтвисторная структура на M с радикалом ранга* $r \geq 1$, *замкнутой фундаментальной 2-формой* Ω *и нулевым тензором кручения. Тогда рабочее расслоение D есть инволютивное распределение на M, любое интегральное подмногообразие* $Q : TQ = D\big|_Q$ *есть кэлерово подмногообразие комплексной размерности* $\dfrac{n-r}{2}$, *и* (Q, Ω, D, Φ, g) *есть субкэлерова структура на M.*

Доказательство. Будем обозначать проекцию векторного поля X на распределение $\mathrm{rad}\Omega$ через X_R. Из предложения 2.5 следует, что $\Phi(TM) = D$. Если $X, Y \in C^1(D)$, то из определения 3.1 получаем

$$N_R(X,Y) = [\Phi X, \Phi Y]_R.$$

Условие $N = 0$ влечет $N_R = 0$, откуда $[\Phi X, \Phi Y]_R = 0$. Поскольку Φ есть линейный автоморфизм слоев рабочего расслоения D, получаем, что распределение D инволютивно. По теореме Фробениуса инволютивное распределение вполне голономно, а следовательно, через каждую точку $x \in M$ проходит подмногообразие $Q : TQ = D\big|_Q$. Ограничение аффинора Φ на любое такое подмногообразие есть почти комплексная структура на Q, и ограничение тензора кручения N на Q есть ее тензор Нейенхейса. Условие $N = 0$ влечет, что Φ есть комплексная структура на Q, и Q есть кэлерово подмногообразие комплексной размерности $\dfrac{n-r}{2}$. Таким образом, выполнено определение 2.1, и теорема доказана. ■

Заметим, что аффинор субтвисторной структуры с нулевым тензором кручения удовлетворяет данному в [6] определению оператора Нейенхейса. Следовательно, аффинор субтвисторной структуры с нулевым тензором кручения всегда есть оператор Нейенхейса с набором собственных значений $0, \pm i$, где . $i = \sqrt{-1}$.

Субтвисторная структура (Ω, D, Φ, g) на многообразии M с нетривиальным радикалом всегда задает разложение касательного расслоения TM в сумму Уитни распределений D и $\mathrm{rad}\Omega$. Эта пара распределений задает на M структуру почти произведения ψ:

$$\psi\big|_D = \Phi^2 = -\mathrm{id}, \psi\big|_{\mathrm{rad}\Omega} = \mathrm{id}.$$

Для структуры почти произведения ψ определен тензор кручения P_ψ:

$$P_\psi(X,Y) = [\psi X, \psi Y] + [X,Y] - \psi[\psi X, Y] - \psi[X, \psi Y],$$

$$X, Y \in C^1(TM).$$

Будем называть этот тензор *тензором индуцированного кручения* субтвисторной структуры. В случае, когда распределения D и $\mathrm{rad}\Omega$ инволютивны, структура почти произведения ψ называется интегрируемой, или *структурой произведения* на многообразии M. По аналогии с почти комплексной структурой структура почти произведения интегрируема тогда и только тогда, когда ее тензор кручения равен 0 на M. Если структура почти произведения ψ интегрируема, то многообразие M локально диффеоморфно прямому произведению подмногообразий $Q : TQ = D\big|Q$

и $R:TR=\mathrm{rad}\Omega\big|_R$. В случае, когда $d\Omega=0$, если тензор кручения этой субтвисторной структуры равен 0 на M, то из теоремы 3.2 следует, что (Q, Ω, D, Φ, g) есть субкэлерова структура на M. Заметим, что в этом случае ограничение метрики g на подмногообразие Q есть кэлерова метрика на Q, ограничение метрики g на подмногообразие R есть риманова метрика на R, а метрика g есть метрика прямого произведения на $Q \times R$. Таким образом, получаем:

Предложение 3.3. *Если вещественное многообразие M допускает субкэлерову структуру с радикалом ранга $r \geq 1$ и нулевым тензором индуцированного кручения, то M локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия Q коразмерности r и риманова подмногообразия R размерности r.*

Тензоры кручения и индуцированного кручения субтвисторной структуры можно объединить в один объект.

Определение 3.4. *Пусть (Ω, D, Φ, g) – субтвисторная структура на вещественном многообразии M, $T_{\mathbb{C}}M=\mathbb{C}\otimes TM$ – комплексификация касательного расслоения TM, N – тензор кручения этой субтвисторной структуры, и p_Ψ – тензор индуцированного кручения. Комплексным кручением субтвисторной структуры называется трилинейная форма τ на M:*

$$\tau(X,Y,Z)=g(N(X,Y),Z)+ig(p_\Psi(X,Y),Z),$$
$$X,Y,Z\in C^1(T_{\mathbb{C}}M),\ i=\sqrt{-1}.$$

Сразу из определения следует, что $\tau = 0$ тогда и только тогда, когда $N=p_\Psi=0$. Из теоремы 3.2 и предложения 3.3 получаем:

Следствие 3.5. *Если вещественное многообразие M допускает субтвисторную структуру с радикалом ранга $r \geq 1$, замкнутой фундаментальной 2-формой и нулевым комплексным кручением, то M локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия Q коразмерности r и риманова подмногообразия R размерности r.*

Поскольку множество нулей любой полилинейной формы всегда есть замкнутое множество, и для связного многообразия M любое непустое открытое и замкнутое подмножество совпадает с M, получаем:

Следствие 3.6. *Если дивизор комплексного кручения субтвисторной структуры $(\Omega, D, \Phi, g): d\Omega=0$ на вещественном связном многообразии M есть открытое множество в M, то (Ω, D, Φ, g) индуцирует субкэлерову структуру на M, распределение D инволютивно, и M локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия $Q:TQ=D\big|_Q$ и риманова подмногообразия $R:TR=\mathrm{rad}\Omega\big|_R$.*

4. Необходимые и достаточные условия существования субкэлеровых структур

Здесь мы приведем условия и примеры существования на многообразиях субкэлеровых структур. Сначала получим необходимые топологические условия существования субтвисторной структуры.

Пусть (Ω, D, Φ, g) – субтвисторная структура на многообразии M размерности ≥ 3, $w_1(E)$ – первый класс Штиффеля–Уитни векторного расслоения E, $e(E)$ – класс Эйлера векторного расслоения E, и $\lambda^n(M)$ – расслоение внешних форм степени n на многообразии M. Из предложения 1.5 видно, что аффинор Φ есть комплексная структура в слоях рабочего расслоения D. Поскольку комплексная структура всегда задает ориентацию в векторном пространстве, аффинор Φ задает непрерывный выбор ориентации в слоях рабочего расслоения на M. Это дает $w_1(D)=0$ (см.: [7]). Кроме того, поскольку фундаментальная 2-форма Ω есть глобальное, всюду отличное от нуля, сечение векторного расслоения $\lambda^n(M)$, $e(\lambda^2(M))=0$ (см.: [7]). Таким образом получаем:

Предложение 4.1. *Если вещественное многообразие M размерности* ≥ 3 *допускает субтвисторную (в частности субкэлерову) структуру с рабочим расслоением D, то*

$$w_1(D)=e(\lambda^2(M))=0.$$

Если M – компактное многообразие без края с эйлеровой характеристикой $\chi(M)$, то из равенства $\chi(M)=\int\limits_M e(M)$, где $e(M)$ – класс Эйлера касательного расслоения TM, и предложения 4.1 получаем:

Следствие 4.2. *Если вещественное многообразие M размерности* ≥ 3 *допускает субтвисторную (в частности субкэлерову) структуру, а пространство расслоения* $\lambda^2(M)$ есть компактное многообразие без края, *то* $\chi(\lambda^2(M))=0$.

С помощью этого следствия в [8] получены примеры многообразий, не допускающих субтвисторных структур, в частности четырехмерная сфера S^4 и прямое произведение $S^4\times S^4$. Следующий результат дает пример многообразия, допускающего субкэлерову структуру.

Предложение 4.3. *Пусть P – главное расслоение над кэлеровым многообразием M со слоем G. Тогда на P существует субкэлерова структура с радикалом TG.*

Доказательство. Пусть (Ω_0, J_0, h_0) – кэлерова структура на многообразии M, где Ω_0 – симплектическая структура на M, J_0 – комплексная структура на M, сохраняющая 2-форму Ω_0, h_0 – кэлерова метрика на M, а π – проекция $P\to M$. Поскольку слоем главного расслоения P является группа Ли G, а любая группа Ли всегда допускает правоинвариантную риманову метрику, на группе Ли G существует риманова метрика g_0. Пусть ρ – проекция $TP\to TG$. Тогда $g=h_0\circ d\pi+g_0\circ\rho$ есть риманова метрика на многообразии P. Обозначим через D ортогональное дополнение к распределению TG относительно метрики g. Положим $\Omega=\Omega_0\circ d\pi$. Ω есть замкнутая регулярная кососимметричная 2-форма на P с радикалом TG и рабочим расслоением D. Заметим, что D есть связность на главном расслоении P, т.е. $TP=D\oplus TG$. Ограничение $d\pi$ на рабочее расслоение D есть линейный изоморфизм $D\to TM$. Определим аффинор Φ, ассоциированный с 2-формой Ω на P, следующим образом:

$$\Phi\big|_D=d\pi^{-1}\circ J_0\circ d\pi,\ \Phi\big|_{TG}=0.$$

Мы получили субтвисторную структуру $(\Omega, D, \Phi, g): d\Omega = 0$ на многообразии P с радикалом TG. Ограничение этой субтвисторной структуры на подмногообразие $Q = P / G$ в многообразии P по построению есть кэлерова структура на Q. Поскольку $TQ = D\Big|_Q$, выполнено определение 2.1, и теорема доказана. ■

Заметим, что пространство расслоения вещественных ортонормированных реперов на кэлеровом многообразии комплексной размерности n имеет вещественную размерность $n(2n + 1)$. При нечетном n это число также нечетно, а следовательно, пространство расслоения не допускает кэлерову структуру при нечетном n. Слой этого расслоения имеет вещественную размерность $n(2n - 1)$. Из предложения 4.3 получаем:

Следствие 4.4. *Пусть M – кэлерово многообразие комплексной размерности* n*, и P – расслоение вещественных ортонормированных реперов на M. Тогда на P существует субкэлерова структура с радикалом ранга* $n(2n - 1)$.

Поскольку нечетномерную сферу S^{2n+1} можно рассматривать как расслоение Хопфа над комплексным проективным пространством комплексной размерности n со слоем S^1, получаем:

Следствие 4.5. *Нечетномерная сфера* S^{2n+1} *не допускает кэлерову структуру, но допускает субкэлерову структуру с радикалом ранга 1.*

Заметим, что субкэлерова структура в следствии 4.5 имеет ненулевой тензор кручения, поскольку ее рабочее расслоение есть контактное распределение контактной метрической структуры, построенной в [9], а по теореме 3.2 субтвисторная структура с нулевым тензором кручения имеет инволютивное рабочее расслоение.

5. Сублагранжевы подмногообразия

В симплектической геометрии для многообразий четной размерности хорошо известно понятие лагранжева подмногообразия (см.: [10]). Здесь мы обобщим это понятие для субтвисторных структур с замкнутой фундаментальной 2-формой на многообразиях любой размерности. Сначала выясним, какую максимальную размерность может иметь подмногообразие, касающееся во всех своих точках рабочего расслоения субтвисторной структуры, на котором фундаментальная 2-форма обращается в 0.

Предложение 5.1. *Пусть* $(\Omega, D, \Phi, g): d\Omega = 0$ *– субтвисторная структура на многообразии M размерности* ≥ 3*, и ранг рабочего расслоения D равен* $2k$*. Тогда для любого подмногообразия* $Q: TQ \subset D\Big|_Q, \Omega\Big|_Q = 0$ *размерность подмногообразия* $Q \leq k$.

Доказательство. Поскольку $TQ \subset D\Big|_Q$; из определения 1.4 следует, что для любых $X, Y \in C^1(TQ)$

$$g(\Phi X, Y) = \Omega(X, Y) = 0,$$

т.е. распределение ΦTQ ортогонально TQ относительно метрики g. Поскольку Φ есть линейный автоморфизм в слоях рабочего расслоения D, имеем $\mathrm{rank}(\Phi(TQ)) = \mathrm{rank}(TQ)$. Отсюда $2\mathrm{rank}(TQ) = \mathrm{rank}(\Phi(TQ) \oplus TQ) \leq \mathrm{rank}(D) = 2k$. ■

Определение 5.2. *Сублагранжевым подмногообразием для субтвисторной структуры* $(\Omega, D, \Phi, g): d\Omega = 0$ *на вещественном многообразии M размерности* ≥ 5 *с радикалом ранга* $r \geq 1$ *называется подмногообразие* $Q: TQ \subset D\big|_Q, \Omega\big|_Q = 0$, *и* $\dim(Q) = \dfrac{n-r}{2} \geq 2$.

Заметим, что для четырехмерных многообразий по теореме 1.2 субтвисторная структура может иметь только радикал либо ранга 2, либо ранга 0. Следовательно, сублагранжево подмногообразие может быть только либо классическим лагранжевым подмногообразием, либо одномерным подмногообразием. Поэтому в определении 5.2 требуется, чтобы размерность исходного многообразия была не меньше 5, а сублагранжева подмногообразия – не меньше 2. Пример субтвисторной структуры, допускающей сублагранжево подмногообразие дает следующий результат:

Предложение 5.3. *Пусть P – главное расслоение над комплексным проективным пространством* $\mathbb{C}P^n$ *со слоем G. Тогда P допускает субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой, и в P существует сублагранжево подмногообразие для этой субтвисторной структуры.*

Доказательство. Пусть π – проекция $P \to \mathbb{C}P^n$. Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ допускает кэлерову структуру (Ω_0, J_0, h_0), где

$$\Omega_0 = i\frac{\sum_{k=0}^{n} dz_k \wedge d\overline{z}_k}{\sum_{k=0}^{n} |z_k|^2}, (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\},$$

J_0 – комплексная структура, индуцированная умножением на мнимую единицу i, h_0 – метрика Фубини–Штуди. По предложению 4.3 эта кэлерова структура индуцирует на P субтвисторную структуру (Ω, D, Φ, g) с радикалом TG и замкнутой фундаментальной 2-формой $\Omega = \Omega_0 \circ d\pi$. Рассмотрим в $\mathbb{C}P^n$ вещественное подмногообразие

$$Q = \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} : \mathrm{Re}(z_k) = \mathrm{Im}(z_k), k = 0, 1, \ldots, n\}.$$

Подмногообразие Q имеет вещественную размерность n, и $\Omega_0\big|_Q = 0$. Теперь рассмотрим подмногообразие $S = \pi^{-1}(Q)$ в P. Подмногообразие S инвариантно относительно действия группы $G, \Omega\big|_S = 0$, и $TS \subset D\big|_S \oplus TG\big|_S$. Поскольку фундаментальная 2-форма Ω инвариантна относительно действия группы G, подмногообразие $W = S / G$ есть сублагранжево подмногообразие в P. ■

Замечание 5.4. *В предложении 5.3 вместо комплексного проективного пространства можно рассматривать произвольное кэлерово многообразие, содержащее лагранжево подмногообразие.*

Поскольку нечетномерная сфера S^{2n+1} есть расслоение Хопфа над $\mathbb{C}P^n$ со слоем S^1, из предложения 5.3 и следствия 4.5 получаем:

Следствие 5.5. *Нечетномерная сфера* S^{2n+1} *допускает субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой и радикалом ранга 1, а при* $n \geq 2$ *содержит сублагранжево подмногообразие вещественной размерности* n.

Простым примером субтвисторной структуры на многообразии M произвольной размерности $n \geq 5$, для которой не существует сублагранжева подмногообразия, является субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и радикалом ранга $n - 2$. В этом случае рабочее расслоение D имеет ранг 2, и для любого интегрального для распределения D подмногообразия определение 5.2 не выполняется.

Список источников

1. *Blair D.E.* Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. Boston : Birkhauser, 2010. 260 p.
2. *Корнев Е.С.* Субкомплексные и субкэлеровы структуры // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 5. С. 1062–1077.
3. *Корнев Е.С.* Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53, № 1. С. 107–123.
4. *Корнев Е.С.* Аффинорные структуры на векторных расслоениях // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 6. С. 1283–1296.
5. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. М. : Наука, 1981.
6. *Bolsinov A.V., Konyaev A.Y., Matveev V.S.* Nijenhuis Geometry // Advances In Mathematics. 2022. V. 394. P. 108001–108131.
7. *Милнор Дж., Сташеф Дж.* Характеристические классы. М. : Мир, 1979. 371 с.
8. *Корнев Е.С.* Субтвисторные структуры и субтвисторное расслоение // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, № 6. С. 1310–1323.
9. *Boothby W., Wang H.* On contact manifolds // Annals of Math. 1958. V. 68. P. 721–734.
10. *Фоменко А.Т.* Симплектическая геометрия : методы и приложения. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988. 413 с.

References

1. Blair D.E. (2010) *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*. Boston: Birkhauser.
2. Kornev E.S. (2016) Subcomplex and sub-Kähler structures. *Siberian Mathematical Journal*. 57(5). pp. 830–840.
3. Kornev E.S. (2012) Invariant affinor metric structures on Lie groups. *Siberian Mathematical Journal*. 53(1). pp. 87–99.
4. Kornev E.S. (2014) Affinor structures on vector bundles. *Siberian Mathematical Journal*. vol. 55, no. 6, 1045–1055.
5. Kobayashi Sh.. Nomizu K. (1963) *Foundations of Differential Geometry*. Vols. 1 and 2. New York: Interscience Publishers.
6. Bolsinov A.V., Konyaev A.Y., Matveev V.S. (2022) Nijenhuis Geometry. *Advances In Mathematics*. 394. pp. 108001–108131.
7. Milnor J.W., Stasheff J.D. (1974) *Characteristic Classes*. Princeton: University Press.
8. Kornev E.S. (2019) Subtwistor structures and subtwistor bundle. *Siberian Mathematical Journal*. 60(6). pp. 1022–1031.
9. Boothby W., Wang H. (1958) On contact manifolds. *Annals of Mathematics*. 68. pp. 721–734.
10. Fomenko A.T. (1988) *Simplekticheskaya geometriya. Metody i prilozheniya* [Symplectic geometry. Methods and applications]. Moscow: Moscow State University.

***Сведения об авторе*:**
Корнев Евгений Сергеевич – младший научный сотрудник научно-инновационного управления Кемеровского государственного университета, Кемерово, Россия. E-mail: q148@mail.ru

***Information about the author*:**
Kornev Eugene S. (Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: q148@mail.ru

Статья поступила в редакцию 27.02.2023; принята к публикации 10.07.2023

The article was submitted 27.02.2023; accepted for publication 10.07.2023