НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2021)

МАТЕРИАЛЫ
XX Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
1–5 декабря 2021 г.

ТОМСК
Издательство Томского
государственного университета
2022

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ M/M/1/N–1 С ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ

А. А. Назаров[1], С. В. Рожкова[1,2], Е. Ю. Титаренко[1,2]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*
[2] *Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск, Россия*

В работе асимптотическим методом исследована RQ-система M/M/1/N–1 с мгновенной и отложенной обратными связями. В системе имеется один обслуживающий прибор и буфер, содержащий N–1 мест для ожидания. Входящая заявка, заставшая прибор занятым, а буфер заполненным, попадает на орбиту, где ожидает случайное время и повторяет попытку попасть на обслуживание или в очередь. После обслуживания заявка либо покидает систему, либо повторно поступает на обслуживание, либо переходит на орбиту. В работе показано, что асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите при условии растущего среднего времени ожидания на орбите является гауссовским, получены уравнения для нахождения параметров распределения.
Ключевые слова: *Асимптотический анализ, RQ-система, очередь, обратная связь.*

Введение

В теории массового обслуживания рассматриваются системы с потерей заявок (с отказами) и системы с ожиданием, имеющие конечный или бесконечный буфер для ожидания. Во втором случае заявка, поступившая в систему и заставшая прибор занятым, становится в очередь. Особое значение имеют системы с повторными вызовами (RQ-системы), в которых заявка, заставшая прибор занятым, ожидает на орбите случайное время и повторяет попытку попасть на обслуживание. Поскольку эффект повторных попыток типичен для многих телекоммуникационных сетей, исследованию RQ-систем посвящено большое количество работ [1], [2]. Кроме того, в реальных сетях связи происходит повторная передача ошибочно переданных данных. В системах массового обслуживания такая возможность обеспечивается обратной связью. Модели с обратными связями мало изучены. В [3] рассматривается модель системы с бесконечным буфером, мгновенной обратной связью матрично-геометрическим методом.

В данной работе рассматривается система с повторными вызовами, имеющая один обслуживающий прибор и буфер, содержащий $N-1$ мест для ожидания. Входящая заявка, заставшая прибор занятым, а буфер заполненным, попадает на орбиту, где ожидает случайное время и повторяет попытку попасть на обслуживание или в очередь. В системе учитывается возможность повторного обслуживания в виде мгновенной и отсроченной обратной связи. Система исследуется методом асимптотического анализа при условии растущего среднего времени ожидания заявок на орбите.

1. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания M/M/1/N–1 с повторными вызовами (рис. 1). На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Если обслуживающий прибор свободен, то заявка поступает на обслуживание. Если прибор занят, то при наличии мест в буфере для ожидания заявка становится в очередь, а при отсутствии мест попадает на орбиту. Время обслуживания заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ. Заявка, обслуживание которой завершено, покидает систему с вероятностью r_0, мгновенно поступает на повторное обслуживание с вероятностью r_1 или переходит на орбиту с вероятностью r_2, таким образом $r_0+r_1+r_2=1$. На орбите заявки ожидают повторного обслуживания в течение времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром σ, после чего делают попытку встать в очередь. В случае отсутствия мест в буфере заявки остаются на орбите.

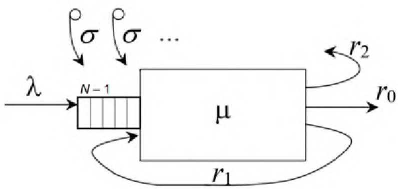

Рис. 1. Схема системы

Обозначим $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t, процесс $n(t)$ определяет состояние прибора и буфера для ожидания следующим образом: $n(t)=0$, если прибор свободен; $n(t)=n$, если прибор занят и в очереди $n-1$ заявка, $n=\overline{1,N}$. Двумерный процесс

$\{i(t), n(t)\}$ является цепью Маркова с непрерывным временем. Обозначим вероятности числа заявок на орбите с учетом состояния прибора $P_n(i,t) = P\{i(t) = i,\ n(t) = n\}, n = \overline{0, N};\ i = \overline{0, \infty}$. Требуется найти стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите.

2. Уравнения Колмогорова

Для стационарного распределения вероятностей $P_n(i) \equiv P_n(i,t)$, запишем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&-(\lambda + i\sigma) P_0(i) + \mu r_0 P_1(i) + \mu r_2 P_1(i-1) = 0;\\
&\lambda P_{n-1}(i) + (i+1)\sigma P_{n-1}(i+1) - (\lambda + \mu r_0 + \mu r_2 + i\sigma) P_n(i) + \mu r_0 P_{n+1}(i) +\\
&+ \mu r_2 P_{n+1}(i-1) = 0, \quad n = \overline{1, N-1};\\
&(i+1)\sigma P_{N-1}(i+1) - (\lambda + \mu r_0 + \mu r_2) P_N(i) + \lambda P_{N-1}(i) + \lambda P_N(i-1) = 0.
\end{aligned}
$$

Введем частичные характеристические функции числа заявок на орбите $H_n(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_n(i)$ и преобразуем систему к виду

$$
-\lambda H_0(u) + j\sigma \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} + \left(\mu r_0 + \mu r_2 e^{ju}\right) H_1(u) = 0; \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda H_{n-1}(u) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_{n-1}(u)}{\partial u} - (\lambda + \mu r_0 + \mu r_2) H_n(u) + j\sigma \frac{\partial H_n(u)}{\partial u} +\\
&+ \left(\mu r_0 + \mu r_2 e^{ju}\right) H_{n+1}(u) = 0, \quad n = \overline{1, N-1};\\
&\lambda H_{N-1}(u) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_{N-1}(u)}{\partial u} - \left(\lambda - \lambda e^{ju} + \mu r_0 + \mu r_2\right) H_N(u) = 0.
\end{aligned}
$$

Полная характеристическая функция числа заявок на орбите $H(u) = \sum_{n=0}^{N} H_n(u)$. Сложим уравнения системы (1), получим

$$
\mu r_2 \sum_{n=1}^{N-1} H_n(u) + j\sigma e^{-ju} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial H_n(u)}{\partial u} + (\lambda + \mu r_2) H_N(u) = 0. \tag{2}
$$

3. Асимптотика первого порядка

Решим уравнения для характеристической функции (1), (2) при асимптотическом условии растущего среднего времени ожидания на орбите, то есть будем полагать, что $\sigma \to 0$. Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в RQ-системы $M/M/1/N-1$ с обратными связями, тогда для последовательности характеристических функций выполняется равенство $\lim\limits_{\sigma\to 0} M\left\{e^{jwi(t)\sigma}\right\} = e^{jw\varkappa_1}$, где $\varkappa_1$ является решением уравнения

$$\frac{d^N-1}{d-1}\varkappa_1 = \mu r_2 \frac{d(d^N-1)}{d-1} + \lambda d^N, d = \frac{\lambda+\varkappa_1}{\mu r_0 + \mu r_2}. \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим $\sigma = \varepsilon$ и сделаем в системе (1), (2) замены: $u = \varepsilon w$, $H_n(u) = F_n(w,\varepsilon)$, $n = \overline{0,N}$. В полученной системе уравнений выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$ и обозначим $F_n(w) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} F_n(w,\varepsilon)$. Будем искать решение системы в виде $F_n(w) = R_n\Phi(w) + O(\varepsilon)$. После преобразований получим систему

$$-\lambda R_0 + jR_0\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + (\mu r_0 + \mu r_2)\,R_1 = 0; \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda R_{n-1} - jR_{n-1}\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} - (\lambda + \mu r_0 + \mu r_2)\,R_n + jR_n\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + \\
&+ (\mu r_0 + \mu r_2)\,R_{n+1} = 0, \quad n = \overline{1, N-1}; \\
&\lambda R_{N-1} - jR_{N-1}\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} - (\mu r_0 + \mu r_2)\,R_n = 0; \\
&\mu r_2 \sum_{n=1}^{N} R_n + j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}\sum_{n=0}^{N-1} R_n + \lambda R_N = 0.
\end{aligned}$$

Из системы (4) видно, что $\Phi'(w)/\Phi(w)$ не зависит от w, тогда можно обозначить $\Phi'(w)/\Phi(w) = j\varkappa_1$ и записать $\Phi(w)$ в виде $\Phi(w) = \exp\{jw\varkappa_1\}$, что и утверждается в формулировке теоремы. Решая первые $N+1$ уравнений системы (4) с учетом условия $\sum_{n=0}^{N} R_n = 1$, получим $R_n = \frac{d^n(d-1)}{d^{N+1}-1}$, а из последнего уравнения системы получим алгебраическое уравнение (3) для $\varkappa_1$. В общем случае алгебраическое уравнение N степени имеет N корней. Многочисленные численные эксперименты показали, что среди корней только один действительный положительный корень, который и будет значением $\varkappa_1$. ■

Из теоремы 1 следует, что $F_n(w) = R_n e^{j\varkappa_1 w}, n = \overline{0,N}$, тогда асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите имеет вид

$$H(u) = \sum_{n=0}^{N} F_n(w,\varepsilon) \approx \sum_{n=0}^{N} F_n(w) = \exp\{j\varkappa_1 w\} = \exp\left\{j\frac{\varkappa_1}{\sigma}u\right\}.$$

4. Асимптотика второго порядка

Основной результат анализа асимптотики второго порядка представим в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в RQ-системы $M/M/1/N-1$ с обратными связями, тогда для последовательности характеристических функций выполняется равенство

$$\lim_{\sigma\to 0} M\left\{e^{jw\sqrt{\sigma}(i(t)-\varkappa_1/\sigma)}\right\} = \exp\left\{(jw)^2\varkappa_2/2\right\},$$

где

$$\varkappa_2 = \frac{\varkappa_1(R_N-1)-(\varkappa_1+\lambda)g_N+\mu r_2 g_0}{R_N-1+(\varkappa_1+\lambda)\varphi_N-\mu r_2\varphi_0}, \qquad (5)$$

$\varphi_n = \frac{(n-N)d^{n+N+1}+(N-n+1)d^{n+N}-(n+1)d^n+nd^{n-1}}{(d^{N+1}-1)^2(\mu r_0+\mu r_2)}$, $n=\overline{0,N}$, а функции g_0 и g_N являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned}
&-(\lambda+\varkappa_1)g_0+(\mu r_0+\mu r_2)g_1=-\mu r_2 R_1;\\
&(\lambda+\varkappa_1)\,g_{n-1}-(\lambda+\mu r_0+\mu r_2+\varkappa_1)\,g_n+(\mu r_0+\mu r_2)\,g_{n+1}=\\
&=\varkappa_1 R_{n-1}-\mu r_2 R_{n+1},\quad n=\overline{1,N-1};\\
&(\lambda+\varkappa_1)\,g_{N-1}-(\mu r_0+\mu r_2)\,g_N=\varkappa_1 R_{N-1}-\lambda R_N.
\end{aligned}$$

Доказательство. В системе уравнений (1), (2) выполним замену $H_n(u)=H_n^{(2)}(u)e^{ju\varkappa_1/\sigma}$, $n=\overline{0,N}$. Здесь $H_n^{(2)}(u)$ – характеристическая функция центрированной случайной величины $i(t)-\varkappa_1/\sigma$. Затем обозначим $\sigma=\varepsilon^2$ и введем замену $u=\varepsilon w$, $H_n^{(2)}(u)=F_n^{(2)}(w,\varepsilon)$, $n=\overline{0,N}$. Решение полученной системы запишем в виде разложения $F_n^{(2)}(w,\varepsilon)=\Phi_2(w)\,(R_n+j\varepsilon wf_n)+O(\varepsilon^2)$. После преобразований, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 1, можно обозначить $\frac{\Phi'{}_2(w)}{w\Phi_2(w)}=-\varkappa_2$ и записать $\Phi_2(w)=exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\varkappa_2\right\}$. Тогда после замены $f_n=C\cdot R_n+g_n+\varkappa_2\varphi_n$, $n=\overline{0,N}$ получим (5). ■

Теорема 2 показывает, что асимптотическая функция числа заявок на орбите в RQ-системы $M/M/1/N-1$ с обратными связями является характеристической функцией гауссовской случайной величины с математическим ожиданием $\varkappa_1/\sigma$ и дисперсией $\varkappa_2/\sigma$.

Отметим, что результат теоремы 1 и 2 при $N=1$ и отсутствии буфера для ожидания согласуется с результатом, полученным в [4].

Заключение

В работе проведено исследование системы массового обслуживания $M/M/1/N-1$ с обратными связями и повторными вызовами. Показано, что асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите при условии растущего среднего времени ожидания на орбите является гауссовским с параметрами $\varkappa_1/\sigma$ и $\sqrt{\varkappa_2/\sigma}$. Получены уравнения для нахождения параметров распределения. Многочисленные численные эксперименты показали, что уравнения позволяют найти единственное положительное значение параметров распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишневский В. М., Дудин А. Н.* Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей //Автоматика и телемеханика. 2017. № 8. С. 3–59.
2. *Степанов С. Н.* Теория телетрафика. Концепции, модели, приложения. М.: НТИ «Горячая линия–Телеком», 2015. С. 860.
3. *Melikov A., Divya V., Aliyeva S.* Analyses of feedback queue with positive server setup time and impatient calls //Информационные технологии и математическое моделирование: материалы XIX Международной конференции имени А. Ф. Терпугова, г. Томск: Издательство НТЛ, 2021. С. 77–81.
4. *Nazarov A. A., Rozhkova S. V., Titarenko E. Y.* Asymptotic Analysis of RQ-System with Feedback and Batch Poisson Arrival Under the Condition of Increasing Average Waiting Time in Orbit //Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications. DCCN 2020. Communications in Computer and Information Science, vol 1337. Springer, Cham., 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66242-4_26.

Назаров Анатолий Андреевич — д-р техн. наук, профессор, профессор, кафедра теории вероятностей и математической статистики, Институт прикладной математики и компьютерных наук ТГУ. E-mail: *nazarov.tsu@gmail.com*

Рожкова Светлана Владимировна — д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор, отделение математики и информатики ШБИП ТПУ, кафедра теории вероятностей и математической статистики, Институт прикладной математики и компьютерных наук ТГУ. E-mail: *rozhkova@tpu.ru*

Титаренко Екатерина Юрьевна — аспирант, старший преподаватель, отделение информационных технологий ИШИТР ТПУ, физический факультет ТГУ. E-mail: *teu@tpu.ru*