ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
2. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
3. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
4. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. Т. 88. Вып. 5. С. 643–650.

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/15/28

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ГРАФОВ С ЗАДАННЫМИ МЕРАМИ СВЯЗНОСТИ[1]

Б. А. Теребин, М. Б. Абросимов

Вершинной связностью k называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Рёберной связностью λ нетривиального графа называется наименьшее число рёбер, удаление которых приводит к несвязному графу. Исследуются минимальные по числу рёбер n-вершинные графы, которые имеют заданные значения вершинной и рёберной связности. Помимо теоретического интереса, графы с заданными значениями вершинной или рёберной связности представляют и прикладной интерес как модели отказоустойчивых сетей. Основной результат состоит в том, что для определённой области значений k и λ удалось описать графы, которые при заданном n имеют минимальное число рёбер.

Ключевые слова: *граф, вершинная связность, рёберная связность, отказоустойчивость.*

Введение

Изучение графов с заданной вершинной или рёберной связностью представляет интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. В теоретическом плане эти исследования восходят к работам [1–3], в прикладном — к работе [4], в которой исследуется построение сетей минимальной стоимости с заданнной связностью. Большой интерес представляют графы Харари, которые имеют минимальное число рёбер при заданном значении вершинной связности [2, 5].

Рассмотрим простые неориентированные графы и их основные меры связности. Понятия из теории графов используются в соответствии с [6, 7]. Напомним, что *связным* называется граф, любая пара вершин которого соединена путём. В противном случае граф называется *несвязным. Тривиальным* называется одновершинный граф. Граф, любые две вершины которого смежны, называется *полным.*

Определение 1. *Вершинной связностью* k графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу.

Определение 2. *Рёберная связность* λ нетривиального графа G определяется как наименьшее количество рёбер, удаление которых приводит к несвязному графу.

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках госзадания (проект № FSRR-2020-0006).

Например, деревья имеют вершинную и рёберную связности 1. Полный n-вершинный граф имеет вершинную и рёберную связности $n-1$. Далее будем рассматривать только связные графы. Обозначим минимальную степень вершины в графе через δ.

Вершинная связность k, рёберная связность λ и минимальная степень вершины δ произвольного графа связаны следующим неравенством:

Теорема 1 [1]. Для любого графа G справедливо неравенство $k \leqslant \lambda \leqslant \delta$.

Доказано, что для любых подходящих значений k, λ и δ существует соответствующий граф:

Теорема 2 [3]. Для любых натуральных чисел a, b, c, таких, что $0 < a \leqslant b \leqslant c$, существует граф G, у которого $k = a$, $\lambda = b$, $c = \delta$.

В работах [8, 9] рассматривается задача о поиске графов с минимальным числом вершин и рёбер для любых a, b, c из теоремы 2. В данной работе решается задача описания графов с заданным числом вершин n и с минимальным числом рёбер для пар возможных значений k и λ.

Обозначим $N_{k,\lambda}$ минимальное число вершин, которое может содержать граф с заданной вершинной связностью k и рёберной связностью λ.

Теорема 3.

$$N_{k,\lambda} = \begin{cases} 2(\lambda+1)-k & \text{при } \lambda > k, \\ \lambda+1 & \text{при } \lambda = k. \end{cases}$$

Обозначим $E_{k,\lambda}$ минимальное число рёбер, которое может содержать граф с заданной вершинной связностью k и рёберной связностью λ.

Теорема 4.

$$E_{k,\lambda} = \begin{cases} \lambda^2 - k^2 + k + \lambda + \sigma & \text{при } \lambda > k, \\ \lambda(\lambda+1)/2 & \text{при } \lambda = k, \end{cases}$$

где $\sigma = \begin{cases} 0, & \text{если } \lceil (2k^2 - k\lambda - 2k)/2 \rceil \leqslant 0, \\ \lceil (2k^2 - k\lambda - 2k)/2 \rceil & \text{иначе.} \end{cases}$

Очевидно, что построить граф, содержащий заданное число вершин n, с минимальным числом рёбер для заданных значений k и λ можно только при $n \geqslant N_{k,\lambda}$. Если $k = \lambda = 1$, то $N_{1,1} = 2$. Легко видеть, что граф с минимальным числом рёбер для заданного числа вершин n с $k = \lambda = 1$ — дерево с числом рёбер $n-1$.

Основной результат

Определение 3. *Диагональю порядка* i назовём множество пар (k, λ), удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\lambda - k = i$;
2) для заданных k и λ можно построить граф с вершинной связностью k и рёберной связностью λ;
3) граф из условия 2 является либо λ-регулярным, либо одна из его вершин имеет степень $\lambda+1$, а остальные вершины имеют степени λ;
4) условие 3 должно выполняться для графов с любым числом вершин $n \geqslant N_{k,\lambda}$.

Определение 4. Под парой значений $(k_{\min(i)}, \lambda_{\min(i)})$ будем понимать образующий элемент диагонали порядка i. Образующий элемент — это такая пара значений, которая удовлетворяет условиям из определения 3 и является наименьшим значением (k, λ) для соответствующей диагонали.

Если есть образующий элемент диагонали порядка i, то можно получить образующий элемент диагонали $i+1$ следующим образом:

$$k_{\min(i+1)} = k_{\min(i)} + 1, \quad \lambda_{\min(i+1)} = \lambda_{in(i)} + 2.$$

По аналогии для $i-1$ диагонали:

$$k_{\min(i-1)} = k_{\min(i)} - 1, \quad \lambda_{\min(i-1)} = \lambda_{\min(i)} - 2.$$

Определение 5. Пару $(2, 2)$ назовём корневым образующим элементом и обозначим (k_r, λ_r).

Корневой образующий элемент является образующим элементом диагонали порядка 0. Остальные образующие элементы диагоналей можно найти по следующей формуле:

$$k_{\min(i)} = k_r + i, \quad \lambda_{\min(i)} = \lambda_r + 2i.$$

Обозначим множество диагоналей через D. Схематично множество D представлено на рис. 1.

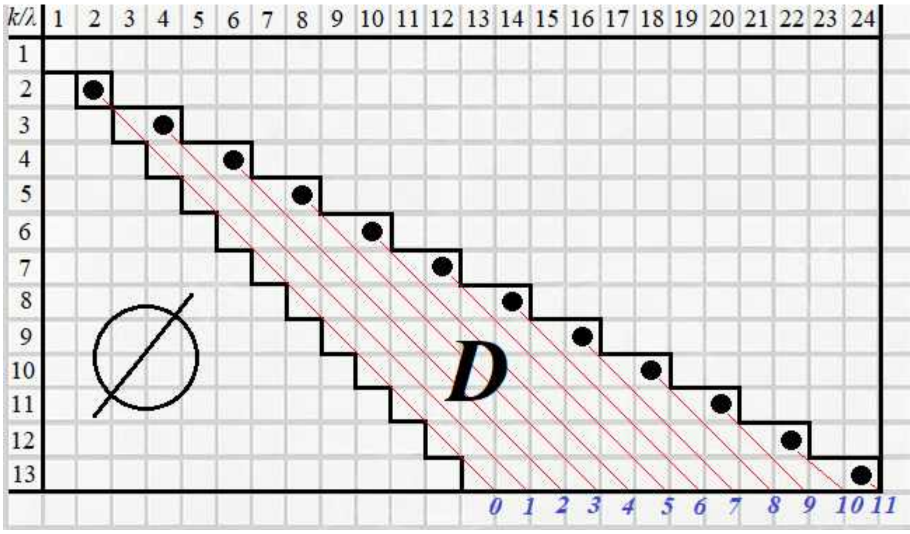

Рис. 1. Схема множества диагоналей D

На рис. 1 точками помечены образующие элементы соответствующих диагоналей. Линиями выделены сами диагонали. Цифрами снизу обозначены порядки диагоналей. В таблице по вертикали идут значения вершинной связности, по горизонтали — рёберной связности. Графы Харари образуют диагональ порядка 0. Напомним, что графом Харари $H_{t,n}$ называется n-вершинный граф с минимальным числом рёбер, у которого $k = \lambda = t$ [2]. Далее приводится основной результат работы, в котором описываются графы из множества D.

Теорема 5. Пусть $k \geqslant k_{\min(i)}$, $\lambda \geqslant \lambda_{\min(i)}$, $\lambda - k = i$, $i \geqslant 0$. Тогда для любого $n \geqslant N_{k,\lambda}$ существует граф G с заданными k и λ, содержащий n вершин, такой, что:

— если λ или n чётные, то G — λ-регулярный граф;

— если λ и n нечётные, то одна из вершин графа G имеет степень $(\lambda+1)$, остальные вершины имеют степени λ.

При этом граф G является оптимальным по рёбрам, то есть состоит из наименьшего возможного числа рёбер, равного $\lceil \lambda n/2 \rceil$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Whitney H.* Congruent graphs and the connectivity of graphs // Amer. J. Math. 1932. V. 54. Iss. 1. P. 150–168.
2. *Harary F.* The maximum connectivity of a graph // Proc. NAS USA. 1962. V. 48. P. 1142–1146.
3. *Chartrand G. and Harary F.* Graphs with prescribed connectivities // Theory of Graphs. N.Y.: Academic Press, 1968. P. 61–63.
4. *Steiglitz K., Weiner P., and Kleitman D.* The design of minimum-cost survivable networks // IEEE Trans. Circuit Theory. 1969. V. 16. No. 4. P. 455–460.
5. *Jafarpour M., Shekaramiz M., Javan A., and Moeini A.* Building graphs with maximum connectivity // Proc. IETS. 2020. P. 1–5.
6. *Харари Ф.* Теория графов М.: Мир, 1973.
7. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
8. *Теребин Б. А., Абросимов М. Б.* Об оптимальности реализации графов с заданными мерами связности // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2020. № 13. С. 103–105.
9. *Теребин Б. А., Абросимов М. Б.* О минимальном числе рёбер в реализациях графов с заданными мерами связности // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. 2021. С. 159–161.