ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2022 Математика и механика № 77
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 539.3/.6
doi: 10.17223/19988621/77/4

Расчет ступенчатого стержня при продольно-поперечном изгибе с дискретной осевой нагрузкой

Сергей Васильевич Бакушев

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, Пенза, Россия, bakuchsv@mail.ru

Аннотация. Рассматривается построение расчетных соотношений для изгибающих моментов и поперечных сил в прямолинейном упругом ступенчатом стержне, находящемся в условиях плоского продольно-поперечного изгиба. Каждая ступень стержня (его интервал) может быть изготовлена из разного материала и иметь свою форму и размеры поперечного сечения. Кроме того, стержень может быть нагружен в начале каждой ступени осевой продольной силой. Учитывается эксцентриситет продольных сил в начале каждой ступени (интервала), возникающий за счет несовпадения продольных осей на текущей и предыдущей ступенях. На каждом интервале стержня может быть приложено поперечное воздействие в виде сосредоточенных изгибающих моментов и сосредоточенных сил, а также равномерно распределенной нагрузки.
Ключевые слова: упругий ступенчатый стержень, продольно-поперечный изгиб, изгибающие моменты, поперечные силы

Для цитирования: Бакушев С.В. Расчет ступенчатого стержня при продольно-поперечном изгибе с дискретной осевой нагрузкой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 38–53. doi: 10.17223/19988621/77/4

Original article

Calculation of a stepped rod under longitudinal-transverse bending with discrete axis loading

Sergey V. Bakushev

Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russian Federation, Bakuchsv@mail.ru

Abstract. This paper aims at obtaining formulas for bending moments and shear forces in a rectilinear elastic stepped rod under plane longitudinal-transverse bending. Each step of the rod (segment) can consist of different materials and have its own shape and cross-

sectional dimensions. The rod can be loaded by an axial longitudinal force at the beginning of each step. The eccentricity of longitudinal forces at the beginning of each step (segment) is taken into account, which occurs due to the mismatch of longitudinal axes at the current and previous steps. Each segment of the rod can be exposed to a transverse action represented as concentrated bending moments, concentrated forces, and uniformly distributed loading.
The resulting algebraic equations of the bending moments and shear forces are obtained for the stepped rod under longitudinal-transverse bending. The numerical model has been considered.
The study results show that allowance for longitudinal action on the stepped rod bending with discrete axial loading leads to an increase in the ordinates of epures and bending moments, as well as in shear forces as compared to transverse bending caused by transverse loading only. Moreover, the internal transverse forces do not remain constant on the rod segments which are free from uniformly-distributed transverse loading. The obtained formulas for bending moments and transverse forces can be applied in calculations of elastic stepped rods under longitudinal-transverse bending.
Keywords: elastic step rod, longitudinal-transverse bending, bending moments, transverse forces

For citation: Bakushev, S.V. (2022) Calculation of a stepped rod under longitudinal-transverse bending with discrete axis loading. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 38–53. doi: 10.17223/19988621/77/4

Введение

Достаточно часто несущие колонны и стойки гражданских и промышленных зданий находятся в условиях продольно-поперечного изгиба. Причем и продольная, и поперечная нагрузка изменяется по длине стержня, как правило, дискретно. Более того, площадь и форма поперечного сечения также не остаются постоянными и на разных участках стержня могут иметь разные значения. Кроме того, и материал стержня, или по крайней мере его механические характеристики, на разных участках стержня могут иметь разные значения. Это приводит к необходимости иметь методику расчета таких ступенчатых стержней при продольно-поперечном изгибе с дискретной осевой нагрузкой.

Надо сказать, что расчету стержней при продольно-поперечном изгибе посвящены многие разработки как отечественных, так и зарубежных инженеров. Так, в работе [1] рассматривается продольно-поперечный изгиб балок, материал которых описывается нелинейной диаграммой деформирования. В статье [2] разработано дифференциальное уравнение для прогибов сжато-изогнутого стержня в начальных параметрах. В работе [3] выполнено теоретическое и экспериментальное исследование упругого деформирования прямого гибкого стержня при продольно-поперечном изгибе. В статье [4] на основе энергетического метода определения критической нагрузки и метода Галеркина рассмотрена методика расчета на прочность и устойчивость ферменной мачты – трехгранной фермы постоянного поперечного сечения, находящейся в условиях продольно-поперечного изгиба от действия собственного веса мачты и поперечной ветровой нагрузки. В работе [5] рассматривается проблема расчета на продольно-поперечный изгиб и устойчивость стержней ступенчато-переменного сечения при наличии сосредоточенных и распределенных продольных нагрузок. Принятая математическая модель, полученная на основе аналитического решения уравнения изгиба в функциях Бесселя и Ломмеля, позволяет рассматривать стержневые системы с любым видом граничных условий. В статье [6] приводится аналитическое решение задачи продольно-поперечного изгиба для стержней, изгибная жесткость которых изменяется по степенному закону.

В работе [7] предложена математическая модель, позволяющая учесть поперечную нагрузку, возникающую из-за поддерживающего влияния сальника и возможных погрешностей при изготовлении и монтаже винта, при моделировании потери продольной устойчивости винтов приводов затворов напорных трубопроводов. В статье [8] рассматривается процедура вычисления изгибающих моментов в сжато-изогнутом, статически неопределимом стержне, нагруженном распределенной вдоль его оси сжимающей силой. В работе [9] рассматриваются вопросы определения прочности стержней переменного сечения при продольно-поперечном изгибе. В статье [10] установлены источник и характер систематической ошибки, вкравшейся в методической базе в расчетные формулы для продольно-поперечного изгиба трубопроводов на участках с активными грунтовыми изменениями.

В работе [11] описывается новое направление в моделировании стержневых и континуальных систем при расчете на статические и динамические нагрузки, а также на устойчивость, основанное на синтезируемой электронной модели исследуемого объекта, позволяющей получить точные алгебраические уравнения, соответствующие дифференциальным уравнениям равновесия при поперечном и продольно-поперечном изгибе как с учетом, так и без учёта вязкоупругих свойств материала. В статье [12] получены дифференциальные уравнения равновесия трубопровода, моделируемого протяженной упругой балкой с исходной кривизной. Для прямолинейных участков трубопровода полученные уравнения переходят в общеизвестные уравнения продольно-поперечного изгиба и продольного сдвига. В работе [13] описывается способ определения перемещений стержня малой жесткости при продольно-поперечном изгибе от равномерно распределенной поперечной нагрузки и продольной силы. На основе решения полного дифференциального уравнения изогнутой оси стержня выполнено сравнение результатов расчета при линейном и нелинейном решении.

В статье [14] рассматривается обратная задача продольно-поперечного изгиба стержня: по значениям прогибов стержня в пяти точках требуется найти общие краевые условия упругого закрепления стержня и интенсивность поперечной распределенной нагрузки. В работах [15, 16] рассматриваются многослойные бетонные стержни постоянного поперечного сечения, находящиеся в условиях продольно-поперечного изгиба. Закон деформирования каждого слоя стержня аппроксимирован полиномом третьего порядка. Решение строится методом Бубнова–Галёркина. В статье [17] рассматривается предельное состояние многослойных бетонных и железобетонных стержней постоянного поперечного сечения при сложном и продольно-поперечном изгибе. В качестве критерия условного предельного состояния принимается условие, при котором в одном или нескольких слоях стержня возникает максимальная деформация, соответствующая предельно допустимому значению при растяжении или сжатии, соответствующему на диаграмме деформирования точкам перехода к ниспадающей ветви. Исследование и анализ работы бетонных и железобетонных стержней, находящихся в условиях продольно-поперечного изгиба, нашли свое отражение в ряде публикаций в зарубежных журналах [18–29].

В данной работе поставлена цель модификации расчетной методики профессора С.Н. Соколова для определения внутренних усилий (изгибающих моментов и поперечных сил) в ступенчатых стержнях при продольно-поперечном изгибе с дискретной осевой нагрузкой.

Описание метода профессора С.Н. Соколова

Один из приемов расчета стержней при продольно-поперечном изгибе был разработан доктором техничсеских наук, профессором кафедры сопротивления материалов Московского института химического машиностроения С.Н. Соколовым еще в конце 40-х – начале 50-х гг. XX столетия. Этот метод основан не на определении формы упругой линии стержня, а на вычислении в сжато-изогнутом стержне изгибающих моментов. Метод профессора С.Н. Соколова изложен в руководствах по сопротивлению материалов [30, 31] М.В. Рубинина. Отсылая читателей к указанным выше руководствам по сопротивлению материалов для более подробного ознакомления с методом С.Н. Соколова, приведем здесь лишь окончательные расчетные формулы для определения функций изгибающих моментов и поперечных сил на различных участках сжато-изогнутого упругого стержня постоянного поперечного сечения, выполненного из материала с модулем упругости E и моментом инерции поперечного сечения относительно нейтральной линии I (рис. 1).

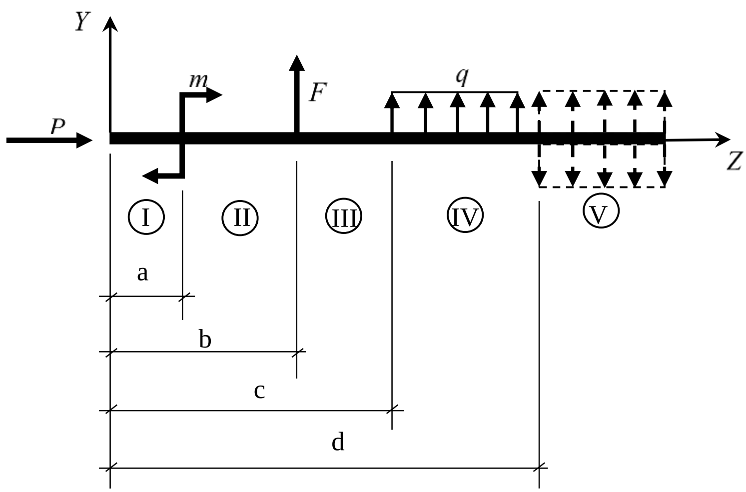

Рис. 1. Стержень в условиях продольно-поперечного изгиба
Fig. 1. A rod under longitudinal-transverse bending

Участок I: $0 \le z \le a$.

$$M^I(z) = M_0 \cos(kz) + \frac{Q_0}{k}\sin(kz); \;\; Q^I(z) = -M_0 k \sin(kz) + Q_0 \cos(kz). \qquad (1)$$

Участок II: $a \le z \le b$.

$$M^{II}(z) = M^{I}(z) + m\cos\left[k(z-a)\right];\;\; Q^{II}(z) = Q^{I}(z) - mk\sin\left(\left[k(z-a)\right]\right). \quad (2)$$

Участок III: $b \le z \le c$.

$$M^{III}(z) = M^{II}(z) + \frac{F}{k}\sin\left[k(z-b)\right];\;\; Q^{III}(z) = Q^{II}(z) + F\cos\left[k(z-b)\right]. \quad (3)$$

Участок IV: $c \le z \le d$.

$$M^{IV}(z) = M^{II}(z) + \frac{q}{k^2}\left\{1-\cos\left[k(z-c)\right]\right\};$$
$$Q^{IV}(z) = Q^{III}(z) + \frac{q}{k}\sin\left[k(z-c)\right]. \quad (4)$$

Участок V: $z \ge d$.

$$M^{V}(z) = M^{IV}(z) - \frac{q}{k^2}\left\{1-\cos\left[k(z-d)\right]\right\};$$
$$Q^{V}(z) = Q^{IV}(z) - \frac{q}{k}\sin\left[k(z-d)\right]. \quad (5)$$

В формулах (1)–(5) параметр $k^2 = \dfrac{P}{EI}$. Величины M_0 и Q_0 представляют собой начальные параметры (постоянные интегрирования на первом участке) и определяются из условий на опорах.

При выводе соотношений (1)–(5) С.Н. Соколов исходил из условий, что каждый силовой участок имеет свое дифференциальное уравнение для изгибающих моментов, а постоянные интегрирования на каждом последующем участке выражаются через постоянные предыдущего участка, причем на стыке участков выполняются граничные условия для изгибающих моментов и поперечных сил (рис. 2).

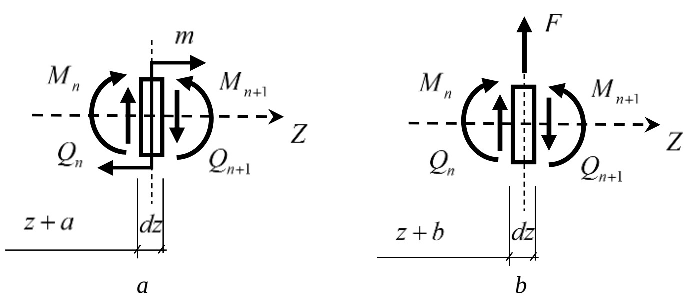

Рис. 2. Стыки участков стержня
Fig. 2. Joints of rod sections

Если стык участков соответствует сосредоточенному изгибающему моменту (см. рис. 2, *a*), то граничные условия имеют вид:

$$M_n + m = M_{n+1};\;\; Q_n = Q_{n+1}. \quad (6)$$

Если стык участков соответствует сосредоточенной силе (рис. 2, *b*), то граничные условия записываются в форме:

$$M_n = M_{n+1};\;\; Q_n + F = Q_{n+1}. \quad (7)$$

Модификация метода проф. С.Н. Соколова.

Составим уравнения изгибающих моментов и поперечных сил для стержня, имеющего несколько, например *n*, интервалов, на каждом из которых имеется пять, вообще говоря, участков, показанных на рис. 1. В начале каждого *j*-го интервала приложена сосредоточенная продольная сила P_j, совпадающая по направлению с центральной осью *j*-го интервала. Изгибная жесткость в пределах интервала остается постоянной: $E_j I_j = const$ (рис. 3).

При составлении уравнений изгибающих моментов и поперечных сил будем исходить из уравнений (1)–(5) и равенств (6) и (7), а также из условия, что на стыке интервалов изгибающие моменты и сосредоточенные силы на пятом участке предыдущего интервала будут равны изгибающим моментам и поперечным силам на первом участке последующего интервала с учетом изгибающего момента, возникающего за счет эксцентриситета центральных осей на (*j* – 1)-м и *j*-м интервалах.

На рис. 3 показан *j*-й интервал длиной e_j, для которого параметр

$$k_j^2 = \left(\sum_{i=1}^{j} P_i \right) \Big/ \left(E_j I_j \right). \tag{8}$$

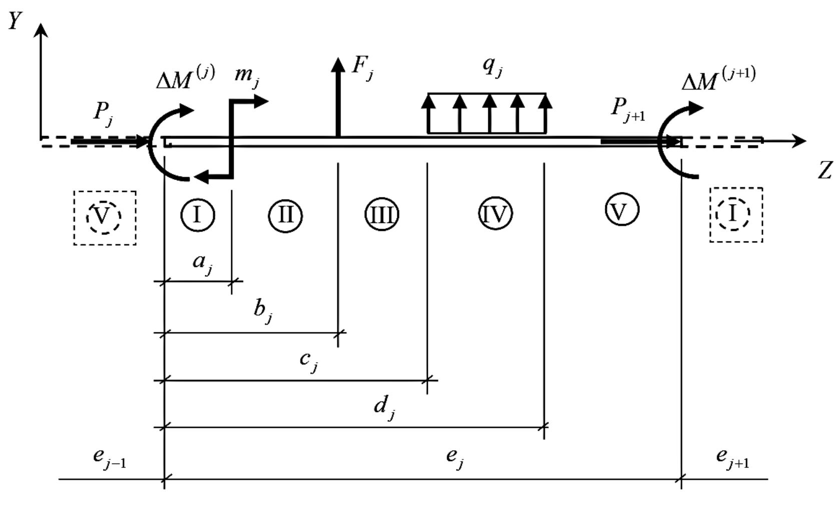

Рис. 3. *j*-й интервал стержня в условиях продольно-поперечного изгиба

Fig 3. *j*th segment of the rod under longitudinal-transverse bending

Изгибающий момент, возникающий за счет эксцентриситета центральных осей $\Delta M^{(j)}$, можно рассматривать как внешний момент, приложенный в начале *j*-го участка (рис. 4). Тогда

$$M_{(V)}^{(j-1)} + \Delta M^{(j)} = M_{(I)}^{(j)}; \;\; Q_{(V)}^{(j-1)} = Q_{(I)}^{(j)}, \text{ где } \Delta M^{(j)} = P_{(V)}^{(j-1)} \cdot \left(y_{Z_j} - y_{Z_{j-1}} \right) \tag{9}$$

Для изгибающего момента $\Delta M^{(j)}$ примем следующее правило знаков: если момент направлен по ходу часовой стрелки, то он считается положительным.

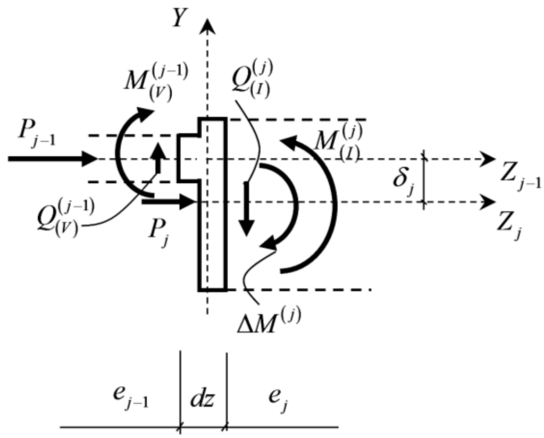

Рис. 4. Стыки интервалов стержня с разными жесткостями
Fig. 4. Joints of rod segments with different stiffness

Итак, уравнения изгибающих моментов и поперечных сил на каждом участке j-го интервала будут иметь вид:

Участок I: $\sum_{i=1}^{j-1} e_i \le z \le \sum_{i=1}^{j-1} e_i + a_j$.

$$M_{(I)}^{(j)}(z) = \left[M_{(V)}^{(j-1)}\left(\sum_{i=1}^{j-1} e_i\right) + \Delta M^{(j)} \right] \cdot \cos\left[k_j \left(z - \sum_{i=1}^{j-1} e_i \right) \right] +$$
$$+ \frac{1}{k_j} Q_{(V)}^{(j-1)}\left(\sum_{i=1}^{j-1} e_i\right) \cdot \sin\left[k_j \left(z - \sum_{i=1}^{j-1} e_i \right) \right];$$
$$Q_{(I)}^{(j)}(z) = -\left[M_{(V)}^{(j-1)}\left(\sum_{i=1}^{j-1} e_i\right) + \Delta M^{(j)} \right] \cdot k_j \sin\left[k_j \left(z - \sum_{i=1}^{j-1} e_i \right) \right] +$$
$$+ Q_{(V)}^{(j-1)}\left(\sum_{i=1}^{j-1} e_i\right) \cdot \cos\left[k_j \left(z - \sum_{i=1}^{j-1} e_i \right) \right]. \qquad (10)$$

Участок II: $\sum_{i=1}^{j-1} e_i + a_j \le z \le \sum_{i=1}^{j-1} e_i + b_j$.

$$M_{(II)}^{(j)}(z) = M_{(I)}^{(j)}(z) + m_j \cos\left[k_j \left(z - \left(\sum_{i=1}^{j-1} e_i + a_j \right) \right) \right];$$
$$Q_{(II)}^{(j)}(z) = Q_{(I)}^{(j)}(z) - m_j \cdot k_j \sin\left[k_j \left(z - \left(\sum_{i=1}^{j-1} e_i + a_j \right) \right) \right]. \qquad (11)$$

Участок III: $\sum_{i=1}^{j-1} e_i + b_j \le z \le \sum_{i=1}^{j-1} e_i + c_j$.

$$M_{(III)}^{(j)}(z) = M_{(II)}^{(j)}(z) + \frac{F_j}{k_j} \sin\left[k_j \left(z - \left(\sum_{i=1}^{j-1} e_i + b_j \right) \right) \right]; \qquad (12)$$

$$Q_{(III)}^{(j)}(z)=Q_{(II)}^{(j)}(z)+F_j\cos\left[k_j\left(z-\left(\sum_{i=1}^{j-1}e_i+b_j\right)\right)\right].$$

Участок IV: $\sum_{i=1}^{j-1}e_i+c_j\le z\le\sum_{i=1}^{j-1}e_i+d_j$.

$$M_{(IV)}^{(j)}(z)=M_{(III)}^{(j)}(z)+\frac{q_j}{k_j^2}\left\{1-\cos\left[k_j\left(z-\left(\sum_{i=1}^{j-1}e_i+c_j\right)\right)\right]\right\};$$
$$Q_{(IV)}^{(j)}(z)=Q_{(III)}^{(j)}(z)+\frac{q_j}{k_j}\sin\left[k_j\left(z-\left(\sum_{i=1}^{j-1}e_i+c_j\right)\right)\right]. \qquad (13)$$

Участок V: $\sum_{i=1}^{j-1}e_i+d_j\le z\le\sum_{i=1}^{j-1}e_i+e_j$.

$$M_{(V)}^{(j)}(z)=M_{(IV)}^{(j)}(z)-\frac{q_j}{k_j^2}\left\{1-\cos\left[k_j\left(z-\left(\sum_{i=1}^{j-1}e_i+d_j\right)\right)\right]\right\};$$
$$Q_{(V)}^{(j)}(z)=Q_{(IV)}^{(j)}(z)-\frac{q_j}{k_j}\sin\left[k_j\left(z-\left(\sum_{i=1}^{j-1}e_i+d_j\right)\right)\right]. \qquad (14)$$

Пример расчета сжато-изогнутого стержня.

Рассмотрим стержень на двух опорах, нагруженный поперечной и продольной нагрузками (рис. 5). Стержень находится в условиях продольно-поперечного изгиба и состоит из трtх интервалов с длинами e_1, e_2 и e_3. При этом $k_1^2=\frac{P_1}{E_1I_1}$; $k_2^2=\frac{P_2}{E_2I_2}$; $k_3^2=\frac{P_3}{E_3I_3}$. Таким образом, изгибная жесткость постоянна в пределах каждого интервала. Пусть для определенности $E_1=E_2=E_3$ и $I_1=I_3<I_2$. Стержень выполнен из двутавровых профилей, причем на стыках интервалов стержни обварены по контуру с совмещением по верхнему обрезу полок. При этом момент, возникающий за счет эксцентриситета осей на стыке первого и второго интервалов, будет положительным, а на стыке второго и третьего интервалов – отрицательным.

Вертикальные опорные реакции от действия поперечной нагрузки на левой шарнирно-подвижной и правой шарнирно-неподвижной опорах будут определяться соотношениями

$$R_A=\frac{1}{e_1+e_2+e_3}\left[F_2(e_2+e_3-b_2)-m_1+q_3(d_3-c_3)\left(e_3-d_3+\frac{d_3-c_3}{2}\right)\right];$$
$$R_B=\frac{1}{e_1+e_2+e_3}\left[F_2(e_1+b_2)+m_1+q_3(d_3-c_3)\left(e_1+e_2+c_3+\frac{d_3-c_3}{2}\right)\right].$$

Горизонтальная реакция на правой шарнирно-неподвижной опоре от действия продольных сил $H=P_1+P_2+P_3$.

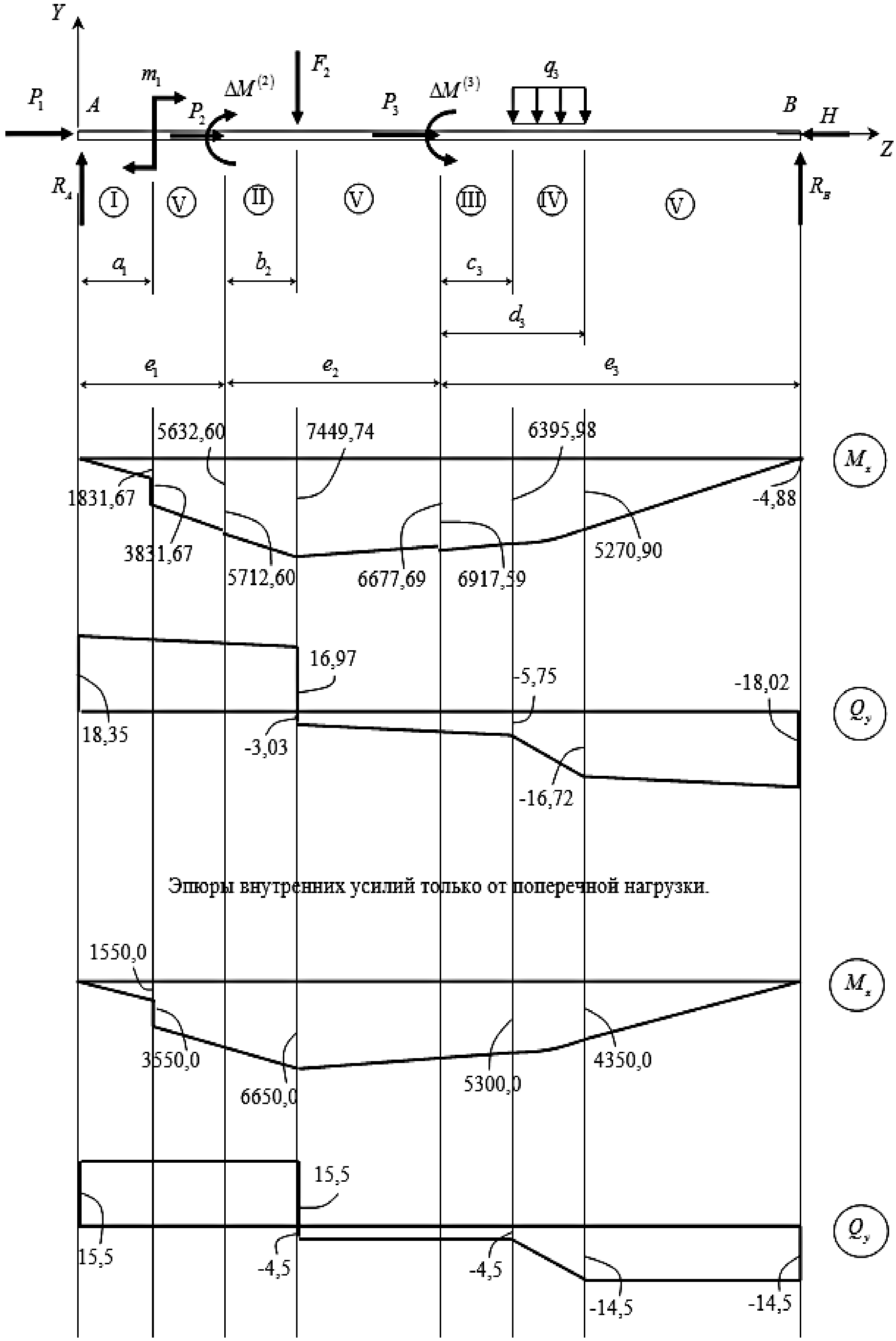

Рис. 5. Стержень на двух опорах в условиях продольно-поперечного изгиба
Fig. 5. A rod on two supports under longitudinal-transverse bending

Выпишем расчетные формулы для изгибающих моментов и поперечных сил.

Интервал $j=1$, участок I: $0 \le z \le a_1$.

$$M_{(I)}^{(1)}(z)=M_0\cos(k_1 z)+\frac{Q_0}{k_1}\sin(k_1 z);\quad Q_{(I)}^{1}(z)=-M_0 k_1\sin(k_1 z)+Q_0\cos(k_1 z).$$

Интервал $j=1$, участок V: $a_1 \le z \le e_1$.

$$M_{(V)}^{(1)}(z)=M_{(I)}^{(1)}(z)+m_1\cos\left[k_1(z-a_1)\right];\quad Q_{(V)}^{(1)}(z)=Q_{(I)}^{(1)}(z)-m_1 k_1\sin\left[k_1(z-a_1)\right].$$

Интервал $j=2$, участок II: $e_1 \le z \le e_1+b_2$.

$$M_{(II)}^{(2)}(z)=\left[M_{(V)}^{(1)}(e_1)+\Delta M^{(2)}\right]\cdot\cos\left[k_2(z-e_1)\right]+\frac{Q_{(V)}^{(1)}(e_1)}{k_2}\sin\left[k_2(z-e_1)\right];$$

$$Q_{(II)}^{(2)}(z)=-\left[M_{(V)}^{(1)}(e_1)+\Delta M^{(2)}\right]\cdot k_2\sin\left[k_2(z-e_1)\right]+Q_{(V)}^{(1)}(e_1)\cdot\cos\left[k_2(z-e_1)\right].$$

Интервал $j=2$, участок V: $e_1+b_2 \le z \le e_1+e_2$.

$$M_{(V)}^{(2)}(z)=M_{(II)}^{(2)}(z)+\frac{F_2}{k_2}\sin\left[k_2\left(z-(e_1+b_2)\right)\right];$$

$$Q_{(V)}^{(2)}(z)=Q_{(II)}^{(2)}(z)+F_2\cos\left[k_2\left(z-(e_1+b_2)\right)\right].$$

Интервал $j=3$, участок III.

$$M_{(III)}^{(3)}(z)=\left[M_{(V)}^{(2)}(e_1+e_2)+\Delta M^{(3)}\right]\cdot\cos\left[k_3\left(z-(e_1+e_2)\right)\right]+$$
$$+\frac{Q_{(V)}^{(2)}(e_1+e_2)}{k_3}\sin\left[k_3\left(z-(e_1+e_2)\right)\right];$$

$$Q_{(III)}^{(3)}(z)=-\left[M_{(V)}^{(2)}(e_1+e_2)+\Delta M^{(3)}\right]\cdot k_3\sin\left[k_3\left(z-(e_1+e_2)\right)\right]+$$
$$+Q_{(V)}^{(2)}(e_1+e_2)\cdot\cos\left[k_3\left(z-(e_1+e_2)\right)\right].$$

Интервал $j=3$, участок IV: $e_1+e_2+c_3 \le z \le e_1+e_2+d_3$.

$$M_{(IV)}^{(3)}(z)=M_{(III)}^{(3)}(z)+\frac{q_3}{k_3^2}\left\{1-\cos\left[k_3\left(z-(e_1+e_2+c_3)\right)\right]\right\};$$

$$Q_{(IV)}^{(3)}(z)=Q_{(III)}^{(3)}(z)+\frac{q_3}{k_3}\sin\left[k_3\left(z-(e_1+e_2+c_3)\right)\right].$$

Интервал $j=3$, участок V: $e_1+e_2+d_3 \le z \le e_1+e_2+e_3$.

$$M_{(V)}^{(3)}(z)=M_{(IV)}^{(3)}(z)-\frac{q_3}{k_3^2}\left\{1-\cos\left[k_3\left(z-(e_1+e_2+d_3)\right)\right]\right\};$$

$$Q_{(V)}^{(3)}(z)=Q_{(IV)}^{(3)}(z)-\frac{q_3}{k_3}\sin\left[k_3\left(z-(e_1+e_2+d_3)\right)\right].$$

Для определения начальных параметров M_0, Q_0 воспользуемся условиями на опорах:

– при $z=0$ имеем $M_{(I)}^{(1)}(0)=0$, т.е. $M_0=0$;

– при $z=e_1+e_2+e_3$ имеем $M_{(V)}^{(3)}(e_1+e_2+e_3)=0$, т.е.

$$Q_0 = \Bigg\langle -\frac{F_2}{k_2}\sin\left[k_2\left(e_2-b_2\right)\right]\cdot\cos\left(k_3e_3\right)-\frac{F_2}{k_3}\cos\left[k_2\left(e_2-b_2\right)\right]\cdot\sin\left(k_3e_3\right)-$$

$$-\frac{q_3}{k_3}\left\{1-\cos\left[k_3\left(e_3-c_3\right)\right]\right\}+\frac{q_3}{k_3}\left\{1-\cos\left[k_3\left(e_3-c_3\right)\right]\right\}-m_1\cos\left[k_1\left(e_1-a_1\right)\right]\times$$

$$\times\left[\cos\left(k_2e_2\right)\cdot\cos\left(k_3e_3\right)-\frac{k_2}{k_3}\sin\left(k_2e_2\right)\cdot\sin\left(k_3e_3\right)\right]+m_1k_1\sin\left[k_1\left(e_1-a_1\right)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{k_2}\sin\left(k_2e_2\right)\cdot\cos\left(k_3e_3\right)+\frac{1}{k_3}\cos\left(k_2e_2\right)\cdot\sin\left(k_3e_3\right)\right]+\Delta M^{(3)}\cos\left(k_3e_3\right)-$$

$$-\Delta M^{(2)}\left[\cos\left(k_2e_2\right)\cdot\cos\left(k_3e_3\right)-\frac{k_2}{k_3}\sin\left(k_2e_2\right)\cdot\sin\left(k_3e_3\right)\right]\Bigg\rangle\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{k_1}\sin\left(k_1e_1\right)\cdot\left[\cos\left(k_2e_2\right)\cdot\cos\left(k_3e_3\right)-\frac{k_2}{k_3}\sin\left(k_2e_2\right)\cdot\sin\left(k_3e_3\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\cos\left(k_1e_1\right)\cdot\left[\frac{1}{k_2}\sin\left(k_2e_2\right)\cdot\cos\left(k_3e_3\right)+\frac{1}{k_3}\cos\left(k_2e_2\right)\cdot\sin\left(k_3e_3\right)\right]\right\}^{-1}.$$

На рис. 5 показаны эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для следующих значений исходных данных:

$$a_1 = 1.0 \text{ м};\; b_2 = 1.0 \text{ м};\; c_3 = 1.0 \text{ м};\; d_3 = 2.0 \text{ м};\; e_1 = 2.0 \text{ м};\; e_2 = 3.0 \text{ м};\; e_3 = 5.0 \text{ м};$$

$$m_1 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м};\; F_2 = 20 \text{ кН};\; q_3 = 10 \text{ кН/м};\; P_1 = 40 \text{ кН};\; P_2 = 80 \text{ кН};\; P_3 = 60 \text{ кН};$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 200\,000 \text{ МПа};\; I_1 = 1\,840 \text{ см}^4;\; I_2 = 3\,460 \text{ см}^4;\; I_1 = 1\,840 \text{ см}^4.$$

При этом $\Delta M^{(2)} = 2P_1 = 80$ кН·см; $\Delta M^{(3)} = 2(P_1 + P_2) = 240$ кН·см; $Q(0) = Q_0 = 18.350$ кН.

Замечание. Ненулевое значение изгибающего момента на правой шарнирно-неподвижной опоре сжато-изогнутого стержня объясняется накоплением погрешностей округлений при выполнении арифметических операций.

Выводы

Численные расчеты позволили сделать следующие выводы.

1. Учет продольного воздействия при изгибе ступенчатого стержня с дискретной осевой нагрузкой приводит к увеличению ординат эпюр, изгибающих моментов и поперечных сил, а следовательно, и опорных реакций по сравнению поперечным изгибом только от поперечной нагрузки.

2. На участках стержня, свободных от равномерно-распределенной поперечной нагрузки, при продольно-поперечном изгибе внутренние поперечные силы не остаются постоянными, в отличие от плоского поперечного изгиба.

3. Учет эксцентриситета продольных сил в начале каждой ступени (интервала), возникающий за счет несовпадения продольных осей на текущей и предыдущей ступенях, приводит к незначительному скачку на эпюре моментов.

4. Полученные расчетные соотношения для изгибающих моментов и поперечных сил могут найти применение при расчете упругих ступенчатых стержней, находящихся в условиях продольно-поперечного изгиба.

Список источников

1. *Ахметзянова Д.Р., Иванов С.П.* Продольно-поперечный изгиб физически нелинейных балок // Научному прогрессу – творчество молодых. 2018. № 1. С. 88–90.
2. *Семёнов В.В., Уламбаяр Х.* Расчет гибких стержней на продольно-поперечный изгиб // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2018. Т. 8, № 2 (25). С. 148–158.
3. *Жубрин А.Н., Куликов Ю.А., Чернышова О.И.* Расчетно-экспериментальное исследование упругого деформирования прямого гибкого стержня при продольно-поперечном изгибе // Научному прогрессу – творчество молодых. 2018. № 1. С. 70–73.
4. *Лыкина Н.А.* Устойчивость и продольно-поперечный изгиб ферменной мачты сотовой связи // Молодежный научно-технический вестник. 2016. № 6. С. 13.
5. *Улитин Г.М., Царенко С.Н.* Продольно-поперечный изгиб и устойчивость весомой стержневой системы // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 2 (271). С. 18–23.
6. *Царенко С.Н.* Продольно-поперечный изгиб стержней переменной жесткости // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2016. № 1 (685). С. 5–13.
7. *Проскуряков Н.Е., Лопа И.В.* Продольно-поперечный изгиб винтов запорной арматуры // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 12-2. С. 277–282.
8. *Каган-Розенцвейг Л.М.* Развитие прикладного метода расчета сжато-изогнутых стержней // Вестник гражданских инженеров. 2017. № 4 (63). С. 130–134. doi: 10.23968/1999-5571-2017-14-4-130-134
9. *Чупеев Г.В.* Продольно-поперечный изгиб стержней переменного поперечного сечения // Молодой ученый. 2015. № 8 (88). С. 340–344.
10. *Глазков А.С., Климов В.П., Гумеров К.М.* Продольно-поперечный изгиб трубопровода на участках грунтовых изменений // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2012. № 1 (87). С. 63–70.
11. *Овсянко В.М.* Моделирование дифференциальных уравнений при расчете на поперечный и продольно-поперечный изгиб стержневых систем без учета и с учетом вязкоупругих свойств материалов // Наука и техника. 2012. № 4. С. 35–43.
12. *Гумеров А.К., Шадрин В.С., Валекжанин Д.Ю., Идрисов Р.Х., Хазипов Р.Х.* Уравнения продольнопоперечного изгиба и сдвига трубопровода с учётом исходной кривизны участков // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2013. № 4 (94). С. 77–82.
13. *Кауров П.В., Тимофеев А.А.* Новый способ определения перемещений стержня малой жесткости при продольно-поперечном изгибе // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2011. № 1 (26). С. 163–171.
14. *Ахтямов А.М., Захарова М.А.* Обратная задача для продольно-поперечного изгиба стержня // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 4. С. 31–33.
15. *Немировский Ю.В., Тихонов С.В.* Продольно-поперечный изгиб многослойного стержня из физически нелинейного материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 247–253. doi: 10.37972/chgpu.2020.46.88.028
16. *Немировский Ю.В., Тихонов С.В.* Продольно-поперечный изгиб многослойных стержней из бетонов и сталефибробетонов // Известия Алтайского государственного университета. 2021. № 1 (117). С. 40–46. doi: 10.14258/izvasu(2021)1-06
17. *Немировский Ю.В., Тихонов С.В.* Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 60–73.

18. *Nemirovskii Y., Tikhonov S.* Complex bend of multilayered concrete rods // EPJ Web of Conferences. 2019. V. 221. Art. 01048. doi: 10.1051/epjconf/201922101048
19. *Cho C.-G., Lee S.-J.* Inelastic Responses and Finite Element Predictions of Fiber Cementitious Composite and Concrete Columns // Materials. 2021. V. 14. Art. 2180. doi: 10.3390/ma14092180
20. *Milanović M., Cvetkovska M., Knežević P.* Load-bearing capacity of fire exposed composite columns // Građevinar. 2015. V. 67 (12). P. 1187–1197. doi: 10.14256/JCE.1329.2015
21. *Agapov V.P., Vasil'ev A.V.* Account for geometrical nonlinearity in the analysis of reinforced concrete columns of rectangular section by finite element method // Vestnik MGSU. 2014. No. 4. P. 37–43.
22. *Rogovskii I.L., Titova L.L., Davydenko O.O., Trokhaniak V.I., Trokhaniak O.M.* Technology of producing reinforced concrete columns of circular cross-sectional and investigation of their strain-stress state at transverse-longitudinal bending // Acta Polytechnica. 2019. V. 59 (5). P. 510–517. doi: 10.14311/AP.2019.59.0510
23. *Trapko T., Musiał M.* Effect of PBO–FRCM Reinforcement on Stiffness of Eccentrically Compressed Reinforced Concrete Columns // Materials. 2020. V. 13 (5). Art. 1221. doi: 10.3390/ma13051221
24. *Tamrazyan A., Avetisyan L.* Comparative analysis of analytical and experimental results of the strength of compressed reinforced concrete columns under special combinations of loads // MATEC Web of Conferences. 2016. V. 86. Art. 01029. doi: 10.1051/matecconf/20168601029
25. *Yin S.P., Hu X.Q., Hua Y.T.* Compression performance and bearing capacity calculation model of small-eccentricity columns strengthened with textile-reinforced mortar (TRM) // Materiales de Construccion. 2019. V. 69 (335). e195. doi: 10.3989/mc.2019.08418
26. *Sarafraz E.M.* Flexural Strengthening of RC Columns with Low Longitudinal Steel Ratio using GFRP Bars // International Journal of Concrete Structures and Materials. 2019. V. 13 (1). P. 1–11. doi: 10.1186/s40069-019-0354-z
27. *Arslan G., Hacisalihoglu M.* Nonlinear analysis of RC columns using the Drucker-Prager model // Journal of Civil Engineering and Management. 2013. V. 19 (1). P. 69–77. doi: 10.3846/13923730.2012.734858
28. *Zong-Cai D., Daud J.R., Hui L.* Seismic Behavior of Short Concrete Columns with Prestressing Steel Wires // Advances in Materials Science and Engineering. 2014. V. 2014, Art. 180193. doi: 10.1155/2014/180193
29. *Li Q., Kuang Y., Guo W., Zhang Y.* Experimental Research on Mechanical Performance of SSRC Columns under Eccentric Compression // Applied Sciences. 2020. V. 10 (16). Art. 5629. doi: 10.3390/app10165629
30. *Рубинин М.В.* Сопротивление материалов. Теория. М. : Машгиз, 1961. 467 с.
31. *Рубинин М.В.* Руководство к практическим занятиям по сопротивлению материалов. 3-е изд. М. : Машгиз, 1957. 603 с.

References

1. Akhmetzyanova D.R., Ivanov S.P. (2018) Prodol'no-poperechnyy izgib fizicheski nelineynykh balok [Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear beams]. *Nauchnomu progressu – tvorchestvo molodykh*. 1. pp. 88–90.
2. Semenov V.V., Ulambayar Kh. (2018) Raschet gibkikh sterzhney na prodol'no-poperechnyy izgib [Longitudinal and transverse bending of flexible rods]. *Izvestiya vuzov. Investitsii. Stroitel'stvo. Nedvizhimost' – Proceedings of Universities. Investment. Construction. Real Estate*. 8. 2(25). pp. 148–158.
3. Zhubrin A.N., Kulikov Yu.A., Chernyshova O.I. (2018) Raschetno-eksperimental'noe issledovanie uprugogo deformirovaniya pryamogo gibkogo sterzhnya pri prodol'no-poperechnom izgibe [Computational and experimental study of elastic deformation in a straight flexible rod under longitudinal-transverse bending]. *Nauchnomu progressu – tvorchestvo molodykh*. 1. pp. 70–73.

4. Lukina N.A. (2016) Ustoychivost' i prodol'no-poperechnyy izgib fermennoy machty sotovoy svyazi [Stability and longitudinal-transverse bending of a communication tower]. *Molodezhnyy nauchno-tekhnicheskiy vestnik*. 6. pp. 1–13.
5. Ulitin G.M., Tsarenko S.N. (2017) Prodol'no-poperechnyy izgib i ustoychivost' vesomoy sterzhnevoy sistemy [Longitudinal-transverse bending and stability of weight rod system]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2(271). pp. 18–23.
6. Tsarenko S.N. (2016) Prodol'no-poperechnyy izgib sterzhney peremennoy zhestkosti [Longitudinal-transverse bending of variable stiffness rods]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Stroitel'stvo – News of Higher Educational Institutions. Construction.* 1(685). pp. 5–13.
7. Proskuryakov N.E., Lopa I.V. (2017) Prodol'no-poperechnyy izgib vintov zapornoy armatury [Longitudinal-transverse bending of the shutoff valves spindles]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya Tula State University. Technical Sciences.* 12–2. pp. 277–282.
8. Kagan-Rozentsveyg L.M. (2017) Razvitie prikladnogo metoda rascheta szhato-izognutykh sterzhney [Development of the applied approach to analysis of rods subjected to bending and compression]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*. 4(63). pp. 130–134. DOI: 10.23968/1999-5571-2017-14-4-130-134.
9. Chupeev G.V. (2015) Prodol'no-poperechnyy izgib sterzhney peremennogo poperechnogo secheniya [Longitudinal-transverse bending of rods with variable cross-section]. *Molodoy uchenyy*. 8(88). pp. 340–344.
10. Glazkov A.S., Klimov V.P., Gumerov K.M. (2012) Prodol'no-poperechnyy izgib truboprovoda na uchastkakh gruntovykh izmeneniy [Longitudinal and transverse pipeline bending in the areas of ground changes]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefti i nefteproduktov*. 1(87). pp. 63–70.
11. Ovsyanko V.M. (2012) Modelirovanie differentsial'nykh uravneniy pri raschete na poperechnyy i prodol'no-poperechnyy izgib sterzhnevykh sistem bez ucheta i s uchetom vyazkouprugikh svoystv materialov [Differential equation simulation in calculation of lateral and transverse-longitudinal bending of frame structures without and with due account of viscoelastic material properties]. *Nauka i tekhnika*. 4. pp. 35–43.
12. Gumerov A.K., Shadrin V.S., Valekzhanin D.Yu., Idrisov R.Kh., Khazipov R.Kh. (2013) Uravneniya prodol'nopoperechnogo izgiba i sdviga truboprovoda s uchetom iskhodnoy krivizny uchastkov [Equations of longitudinal and transverse bending and shift of pipeline accounting the initial curvature of pipeline sections]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefti i nefteproduktov*. 4(94). pp. 77–82.
13. Kaurov P.V., Timofeev A.A. (2011) Novyy sposob opredeleniya peremeshcheniy sterzhnya maloy zhestkosti pri prodol'no-poperechnom izgibe [A new method of determining deflection of low flexure stiffness rod at transverse-longitudinal bending]. *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putey soobshcheniya – Proceedings of Petersburg Transport University.*1(26). pp. 163–171.
14. Akhtyamov A.M., Zakharova M.A. (2011) Obratnaya zadacha dlya prodol'no-poperechnogo izgiba sterzhnya [The inverse problem for longitudinal-and-transversal bending of bar]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy – Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 4. pp. 31–33.
15. Nemirovskiy Yu.V., Tikhonov S.V. (2020) Prodol'no-poperechnyy izgib mnogosloynogo sterzhnya iz fizicheski nelineynogo materiala [Longitudinal-transverse bending of a multilayer bar made of a physically nonlinear material]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya – Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 3(45). pp. 247–253. DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.88.028.

16. Nemirovskiy Yu.V., Tikhonov S.V. (2021) Prodol'no-poperechnyy izgib mnogosloynykh sterzhney iz betonov i stalefibrobetonov [Transverse-longitudinal bending of multilayered concrete rods and steel fiber reinforced concrete rods]. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta – Izvestiya of Altai State University*. 1(117). pp. 40–46. DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-06.
17. Nemirovskiy Yu.V., Tikhonov S.V. (2020) Predel'noe sostoyanie betonnykh i zhelezobetonnykh sterzhney pri slozhnom i prodol'no-poperechnom izgibe [The limit state of concrete and reinforced concrete rods at complex and longitudinal-transverse bending]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 1. pp. 60–73.
18. Nemirovskii Y., Tikhonov S. (2019) Complex bend of multilayered concrete rods. *EPJ Web of Conferences*. 221. Article 01048. DOI: 10.1051/epjconf/201922101048.
19. Cho C.-G.; Lee S.-J. (2021) Inelastic responses and finite element predictions of fiber cementitious composite and concrete columns. *Materials.* 14. Article 2180. DOI: 10.3390/ma14092180.
20. Milanović M., Cvetkovska M., Knežević P. (2015) Load-bearing capacity of fire exposed composite columns. *Građevinar*. 67(12). pp. 1187–1197. DOI: 10.14256/JCE.1329.2015.
21. Agapov V.P., Vasil'ev A.V. (2014) Uchet geometricheskoy nelineynosti pri raschete zhelezobetonnykh kolonn pryamougol'nogo secheniya metodom konechnykh elementov [Account for geometrical nonlinearity in the analysis of reinforced concrete columns of rectangular section by finite element method]. *Vestnik MGSU*. 4. pp. 37–43.
22. Rogovskii I.L., Titova L.L., Davydenko O.O., Trokhaniak V.I., Trokhaniak O.M. (2019) Technology of producing reinforced concrete columns of circular cross-sectional and investigation of their strain-stress state at transverse-longitudinal bending. *Acta Polytechnica.* 59(5). pp. 510–517. DOI: 10.14311/AP.2019.59.0510.
23. Trapko T, Musiał M. (2020) Effect of PBO–FRCM reinforcement on stiffness of eccentrically compressed reinforced concrete columns. *Materials.* 13(5). Article 1221. DOI: 10.3390/ma13051221.
24. Tamrazyan A., Avetisyan L. (2016) Comparative analysis of analytical and experimental results of the strength of compressed reinforced concrete columns under special combinations of loads. *MATEC Web of Conferences*. 86. Article 01029. DOI: 10.1051/matecconf/20168601029.
25. Yin S.P., Hu X.Q., Hua Y.T. (2019) Compression performance and bearing capacity calculation model of small-eccentricity columns strengthened with textile-reinforced mortar (TRM). *Materiales de Construccion*. 69(335). DOI: 10.3989/mc.2019.08418.
26. Sarafraz E.M. (2019) Flexural strengthening of RC columns with low longitudinal steel ratio using GFRP bars. *International Journal of Concrete Structures and Materials*. 13(1). pp. 1–11. DOI: 10.1186/s40069-019-0354-z.
27. Arslan G., Hacisalihoglu M. (2013) Nonlinear analysis of RC columns using the Drucker-Prager model. *Journal of Civil Engineering and Management.* 19(1). pp. 69–77. DOI: 10.3846/13923730.2012.734858.
28. Zong-Cai D., Daud J.R., Hui L. (2014) Seismic behavior of short concrete columns with prestressing steel wires. *Advances in Materials Science and Engineering*. 2014. Article 180193. pp. 1–10. DOI: 10.1155/2014/180193.
29. Li Q., Kuang Y., Guo W., Zhang Y. (2020) Experimental research on mechanical performance of SSRC columns under eccentric compression. *Applied Sciences*. 10(16). Article 5629. DOI: 10.3390/app10165629.
30. Rubinin M.V. (1961) *Soprotivlenie materialov. Teoriya* [Strength of materials. Theory] Moscow: Mashgiz.
31. Rubinin M.V. (1957) *Rukovodstvo k prakticheskim zanyatiyam po soprotivleniyu materialov* [Guide to practical exercises on strength of materials] Moscow: Mashgiz.

***Сведения об авторе*:**
Бакушев Сергей Васильевич – доктор технических наук, профессор кафедры механики строительного факультета Пензенского государственного университета архитектуры и строительства, Пенза, Россия. E-mail: bakuchsv@mail.ru

***Information about the author*:**
Bakushev Sergey V. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russian Federation). E-mail: Bakuchsv@mail.ru

Статья поступила в редакцию 03.07.2021; принята к публикации 19.05.2022

The article was submitted 03.07.2021; accepted for publication 19.05.2022