

* *
*

УДК 621.314

Г.А. КОБЗЕВ, Ю.Н. ТАНОВИЦКИЙ, Д.А. САВИН, В.В. ТУРАН

МЕТОД АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В ФОРМЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ

Предлагается метод анализа устойчивости в целом динамических систем с широтно-импульсной модуляцией, представленных в форме отображений Пуанкаре, обладающий повышенной эффективностью с точки зрения вычислительных затрат. Результаты работы могут быть использованы при анализе и автоматизированном проектировании таких систем.

Ключевые слова: устойчивость в целом, широтно-импульсная модуляция.

Одной из важных задач, возникающих при анализе нелинейных динамических систем, является исследование устойчивости стационарных установившихся решений. Основы теории устойчивости были заложены А.М. Ляпуновым. Устойчивость в малом, называемая также локальной устойчивостью, означает, что система вернется к стационарному состоянию, если возмущение будет мало, а устойчивость в целом означает, что система вернется к стационарному состоянию при произвольном возмущении. Исследование устойчивости в малом оказывается значительно проще, поскольку анализируются лишь локальные окрестности искомых решений, где линеаризованная модель еще остается адекватной. К настоящему времени сформировались два основных аналитических направления исследования устойчивости в целом, пригодных для анализа динамических систем с широтно-импульсными регуляторами. Первая группа методов основывается на идеях А.И. Лурье и В.Н. Постникова, которые предложили находить функции Ляпунова в виде суммы квадратичной формы и интеграла от нелинейности. Развитие этого подхода можно найти в работах [1–3]. Он позволяет получать критерии «абсолютной устойчивости» при соблюдении определенных ограничений на свойства нелинейного элемента. Этот подход прост в реализации, однако параметрические границы устойчивости определяются с большим, иногда десятикратным, запасом [4]. Другая группа методов, предложенная М.А. Айзерманом и В.М. Поповым, базируется на частотных методах исследования устойчивости. Этот подход может дать хороший результат при анализе систем высокой размерности с одной или несколькими гладкими нелинейностями. Однако применение частотного анализа для систем с широтно-импульсным регулированием ограничено импульсной природой их функционирования, то есть минимальным временем реакции, которое не может быть меньше периода квантования широтно-импульсного модулятора (ШИМ). По этой причине частотные характеристики, получаемые при частотах, сопоставимых или больших, чем частота ШИМ, теряют обычный смысл и называются псевдочастотными [5].

Исследование устойчивости производится на динамических моделях, которые для систем с ШИМ сначала получают в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dX/dt = G(t, X), \quad (1)$$

где $X = X(t)$ – однострочная матрица, вектор переменных состояния, изменяющийся в зависимости от времени t ; $G(t, X)$ – нелинейный оператор. Для целей анализа устойчивости систем с ШИМ удобно выполнить переход к отображению Пуанкаре в форме

$$X_{k+1} = F(X_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где F – вектор-функция, которая позволяет по известным входным значениям на начало тактового интервала $X_k = X(t = kT_q)$ получить вектор переменных состояния в конце тактового интервала $X_{k+1} = X(t = (k+1)T_q)$. При этом решения рассматриваются лишь в дискретные моменты времени $t_k = kT_q$, где T_q – период ШИМ; k – дискретное время модели. Отображение Пуанкаре (2) может

быть получено путем решения уравнения (1) с начальными условиями X_k на интервале $[0, T_q]$ численными или аналитическими методами. Суть прямого метода Ляпунова [6], введенного изначально для систем, представленных в форме дифференциальных уравнений, заключается в нахождении скалярной функции V , называемой функцией Ляпунова, такой, что

$$V(X_C, t) \equiv 0, \quad V(X, t)|_{X \neq X_C} > 0, \quad \frac{dV}{dt} < 0, \quad (3)$$

где $X_C(t) \equiv X_C(t + T_q)$ – стационарное состояние, устойчивость которого анализируется. С учетом последнего неравенства (3) и перехода к дискретному времени k в отображении Пуанкаре условия (3) будут выглядеть следующим образом:

$$V(X_C) = 0, \quad V(X_k)|_{X_k \neq X_C} > 0, \quad V(X_{k+1}) < V(X_k)|_{X_k \neq X_C}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

В простейшем случае в качестве функции Ляпунова можно выбрать квадратичную норму от разности $\|X_{k+m} - X_C\|_2$, где $k = 0$, а m – целое число, большое настолько, что время mT_q будет заведомо больше продолжительности возможных переходных процессов. Совокупность всех точек $X_{k=0}$, для которых выполняется условие $\lim_{m \rightarrow \infty} \|X_m(X_0) - X_C\| = 0$, называется *областью притяжения*.

Выполняя проверку вычислительными средствами для множества точек с достаточно плотной сеткой, можно построить область притяжения. Если окажется, что все проверенные точки принадлежат области притяжения проектного режима X_C , то он устойчив в целом. Для моделей невысокой размерности этот способ обладает наилучшей точностью при определении границы устойчивости по параметру. Однако он требует огромных затрат вычислительных ресурсов, и даже в случае размерности два такие затраты могут оказаться недопустимо высокими. Для сокращения вычислительных затрат при сохранении точности определения параметрической границы устойчивости в целом предлагается метод, который базируется на следующих допущениях в отношении исследуемых динамических объектов, выполняющихся для многих систем с ШИМ:

- в технических объектах обычно присутствуют потери энергии, а мощности источников энергии ограничены, поэтому вместо рассмотрения динамики с неограниченными диапазонами начальных условий возможно найти некоторое замкнутое множество начальных условий D_0 с границей Γ_0 , включающее в себя режим X_C , и рассмотреть последовательности преобразований множества отображением Пуанкаре D_k , $k = 0, 1, 2, \dots$;

- отображения Пуанкаре динамических систем с ШИМ, за исключением особых точек, называются непрерывными на множестве начальных условий, поэтому достаточно рассматривать трансформации границ Γ_k множеств начальных условий с учетом процессов в окрестностях особых точек.

Для анализа выполнения условия сходимости удобно ввести параметр R_k – радиус множества D_k . Если проектный режим X_C оказывается единственным, то все точки множества будут стремиться к X_C , а радиус – к нулю. В этом случае R_k будет удовлетворять требованиям (4), предъявляемым к функции Ляпунова. Частным случаем множества начальных условий являются множества, обладающие свойством $D_{k+1} \subset D_k$. Такие множества назовем *сжимающимися*.

Теорема 1. Пусть $F: X_k \rightarrow X_{k+1}$ задает отображение пространства X в себя. Пусть D_k – ограниченное множество $D_k \in X$, имеющее границу Γ_k . Пусть D_{k+1} получается преобразованием множества D_k отображением F и $D_{k+1} \subset D_k$, т.е. D_{k+1} является подмножеством множества D_k . Тогда для любого целого $m > 0$ справедливо $D_{k+1+m} \subset D_{k+m}$.

Доказательство построено от противного. Пусть граница множества D_{k+2} выходит за границу D_{k+1} . Это означает, что внутри D_{k+1} имеется хотя бы одна точка P_{A+1} , которая отображением F переводится из множества D_{k+1} во множество D_k / D_{k+1} , но этого не может быть, потому что точка P_{A+1} также принадлежит множеству D_k , а преобразование F множества D_k дает D_{k+1} .

Отношения между математическими объектами, использованными при доказательстве теоремы, иллюстрирует рис. 1. Таким образом, при выполнении условия $D_{k+1} \subset D_k$ каждое последующее новое множество, получаемое преобразованием F , всегда будет частью предшествующего.

Соответственно все точки границы Γ_{k+1+m} будут находиться внутри множества, ограниченного Γ_{k+m} , либо принадлежать границе Γ_{k+m} . При этом отображение F может быть произвольным, в том числе нелинейным, содержащим разрывы, а множество D_k – неодносвязным.

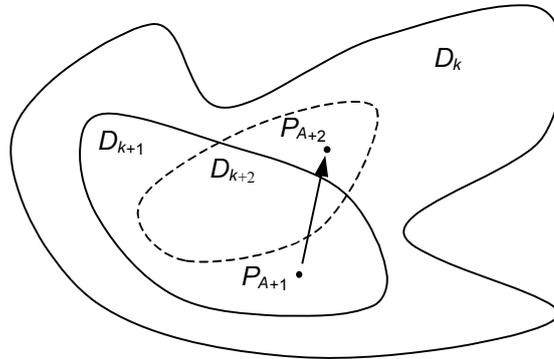


Рис. 1. К доказательству теоремы о сжимающем отображении

Предлагаемый метод реализуется следующей последовательностью действий:

1. Определяется граница множества начальных условий $\Gamma_{k=0}$, включающая в себя проектный режим X_C . В случае размерности два граница хранится в памяти ЭВМ в виде замкнутой ломаной линии, а ее сложность характеризуется количеством точек – поворотов ломаной.
2. Производится однократная трансформация точек границы Γ_k множества D_k отображением Пуанкаре, и в результате находится граница Γ_{k+1} множества D_{k+1} .
3. Выполняется упрощение границы Γ_{k+1} , если сложность границы превышает критическое значение.
4. Рассчитывается размер R_{k+1} множества D_{k+1} .
5. Если $R_{k+1} = 0$, то алгоритм завершается сообщением «система устойчива в целом».
6. Если размер не убывает – $R_{k+1} = R_k$ и номер шага $k > k_{\max}$, то алгоритм завершается сообщением «устойчивость в целом не установлена».
7. Выполняется переход к п. 2.

Согласно выводу теоремы, если множества оказываются *сжимающимися*, R_k может убывать лишь монотонно, что значительно упрощает анализ. Для диссипативных систем, в которых присутствует рассеяние энергии, сжимающееся множество почти всегда может быть получено расширением некоторого исходного множества D_0 путем объединения:

$$D_{j+1} = D_j \cup D_{j-1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \text{ пока } D_{j+1} \not\subset D_j.$$

В качестве примера, иллюстрирующего предлагаемый метод, рассмотрим широтно-импульсный стабилизатор понижающего напряжения, модель которого опубликована в [7] (рис. 2). В момент времени, соответствующий началу тактового интервала t_k , ключ K соединяет источник питания E_0 и фильтр преобразователя, состоящий из дросселя L с внутренним сопротивлением R и конденсатора C . Разность напряжения уставки U_y и напряжения, получаемого с датчика выходного напряжения (ДН), усиливается пропорциональным корректирующим звеном (ПЗ) с коэффициентом передачи α . На выходе ПЗ формируется напряжение $U_{КЗ}$, которое сравнивается компаратором с пилообразным напряжением U_p . С течением времени напряжение на нагрузке растет, что приводит к срабатыванию компаратора, после чего ключи меняют свое состояние и нагрузка, представленная резистором R_n , питается энергией, запасенной в дросселе и конденсаторе. Параметры дросселя и конденсатора выбираются таким образом, чтобы в проектном режиме пульсации выходного напряжения были малы, в рассмотренном примере – это 0,3 %.

Одной из важных задач, возникающих при проектировании таких стабилизаторов, является расчет коэффициентов обратных связей. В данном примере малое значение α не позволяет реализовать стабилизирующие свойства, а большое ведет к потере устойчивости. Согласно результатам

[7], потеря устойчивости проектного режима в малом происходит при $\alpha = 86$, однако при $\alpha = 52,67$ наряду с устойчивым проектным режимом появляется устойчивый режим с периодом $3T_q$, и возникает неединственность устойчивых состояний. То есть при $\alpha = 52,67$ проектный режим теряет устойчивость в целом. Какой из двух устойчивых режимов работы реализуется, зависит от начальных условий. Случайные помехи могут приводить к смене режимов работы. Очевидно, что целесообразно использовать стабилизатор со значением параметра α менее 52,67, однако определить эту границу, опираясь лишь на результаты анализа устойчивости в малом, невозможно.

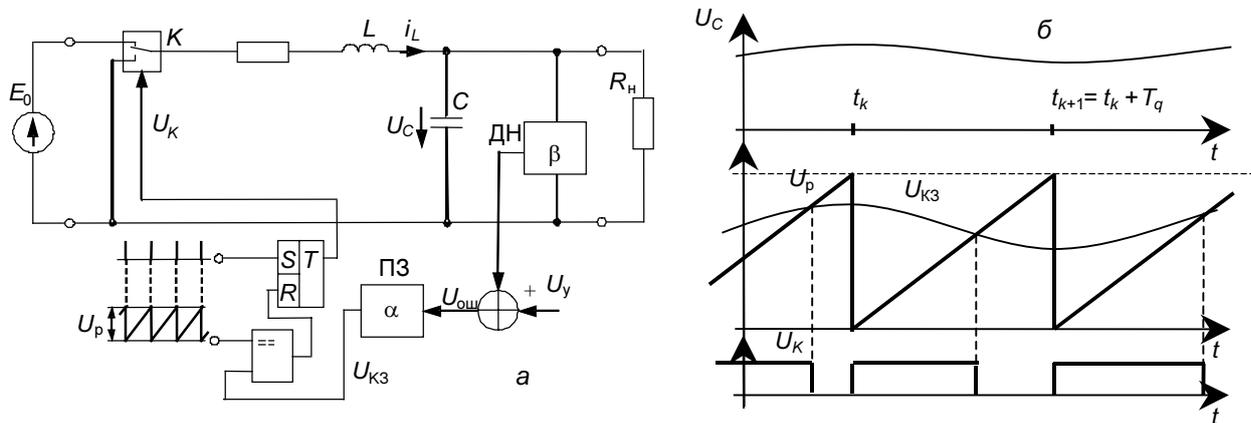


Рис. 2. Стабилизированный преобразователь напряжения с ШИМ: а – электрическая схема; б – диаграммы работы

В ходе вычислительных экспериментов параметры модели были такими же, как в [7], а значения α изменялись. Текущее состояние преобразователя характеризуется током индуктивности i_L и напряжением на конденсаторе U_C . В качестве исходного множества D_0 был выбран прямоугольник в пространстве состояний (i_L, U_C) с координатами $(0,0)$, $(0,900)$, $(9,900)$, $(9,0)$.

На рис. 3 показано множество D_8 , полученное после 8 шагов последовательного преобразования прямоугольника D_0 при параметре $\alpha = 16$. Видно, что в силу нелинейных свойств модели прямоугольник превращается в сложную фигуру, имеющую характерные «хвосты». Причем наилучшие начальные условия, которым соответствует длительный переходный процесс, обычно оказываются на кончиках «хвостов».

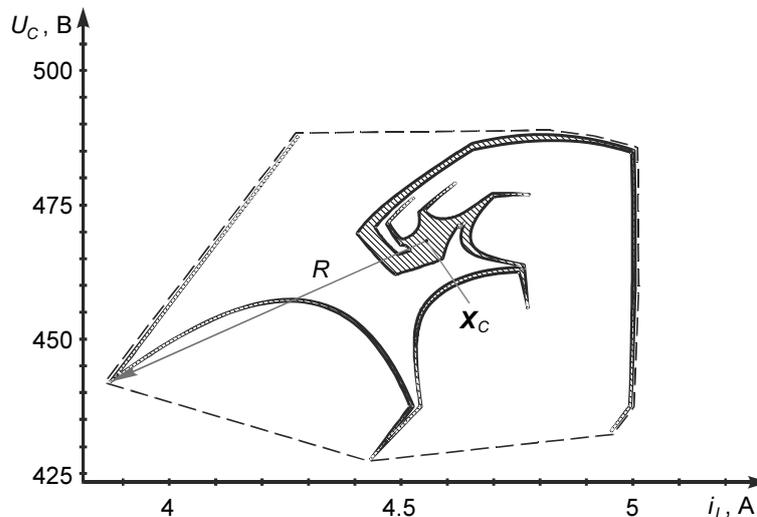


Рис. 3. Множество D_8 , полученное при параметре $\alpha = 16$

С ростом параметра α и номера шага k количество точек, необходимых для хранения в памяти компьютера множеств D_k , может возрастать экспоненциально, что приводит к увеличению не-

обходимой памяти, процессорного времени и к замедлению вычислений вплоть до их полной остановки. Решение этой проблемы заключается в редукации сложности границ тем или иным способом, для чего предусмотрен шаг 3 алгоритма. Один из простых подходов, оказавшийся в то же время эффективным, – замена сложной границы выпуклым многоугольником в случае размерности два или выпуклым многогранником в случае размерности три. Примером такой редукации является выпуклый многоугольник, показанный на рис. 3 пунктиром. Известны относительно простые в реализации алгоритмы поиска выпуклых оболочек. С иллюстрацией таких алгоритмов можно познакомиться на интернет-странице [8]. Следует отметить, что замена сложного многоугольника выпуклой оболочкой всегда приводит к появлению добавочной погрешности на каждом шаге алгоритма. Однако если наблюдается сходимость с добавочной погрешностью, то без такой погрешности сходимость будет еще быстрее. Таким образом, предлагаемый метод анализа дает достаточное условие сходимости.

На рис. 4 показана работа алгоритма, когда на каждом шаге производится упрощение границы путем нахождения выпуклой оболочки. На рисунке изображено несколько вложенных друг в друга областей D_k в форме выпуклых многоугольников.

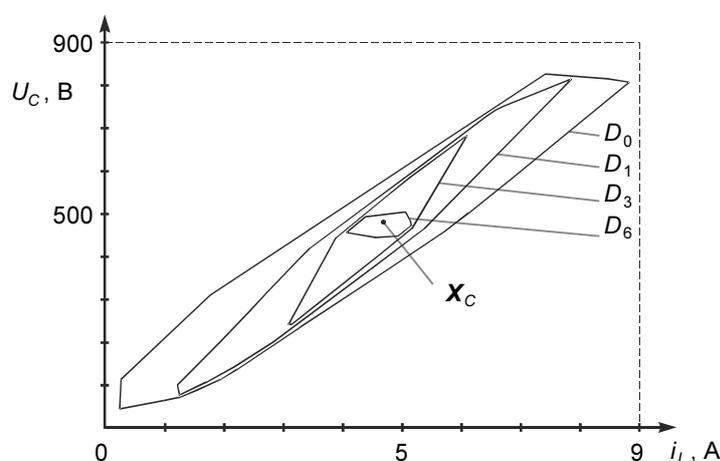


Рис. 4. Множества D_k при $\alpha = 26$ и упрощении границ путем нахождения выпуклой оболочки

Практический интерес представляет поиск параметрической границы устойчивости в целом. На рис. 5 показаны зависимости радиуса множества начальных условий R от номера шага k для граничных значений α .

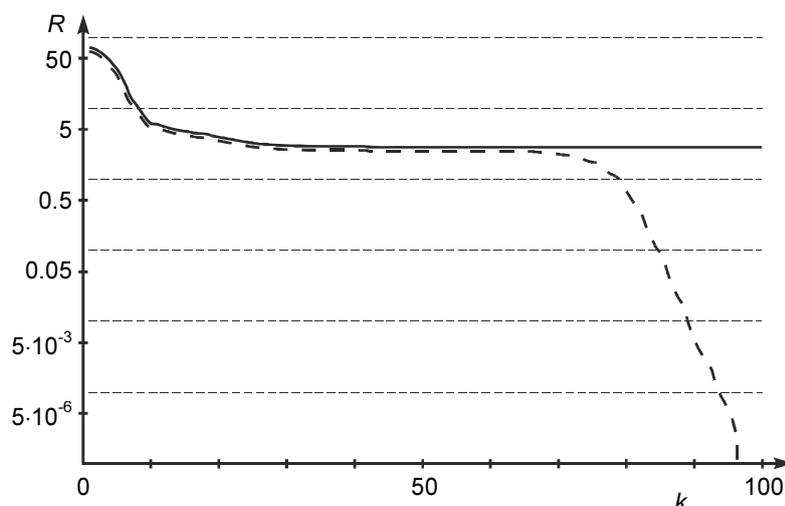


Рис. 5. Зависимости радиуса R от номера шага k при $\alpha = 52,67$ (пунктирная линия) и при $\alpha = 52,57$ (сплошная линия)

При $\alpha = 52,57$, когда режим X_C еще устойчив в целом (пунктирная линия), видно, что радиус стремится к нулю, но процесс убывания радиуса затягивается. При $\alpha = 52,67$ (сплошная линия) сходимость к нулю отсутствует, что означает отсутствие устойчивости в целом. Таким образом, граница устойчивости в целом, определяемая рассмотренным методом, совпадает со значением, полученным в [7].

Заключение

В сравнении с аналитическими методами [1–3] предложенный метод обладает в несколько раз более высокой точностью при определении параметрических границ устойчивости. В сравнении с методом, основанным на прямом построении области притяжения, вычислительные затраты оказываются на один-два порядка меньшими, поскольку преобразование Пункаре требуется выполнять лишь для точек, принадлежащих границе сжимающегося множества. Также снимаются многие проблемы, связанные с выбором шага сетки в пространстве состояний. В настоящее время авторами создана программа [9], которая выполняет анализ устойчивости в целом динамических объектов размерности два, версия программы для анализа отображений размерности три разрабатывается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беркович Е.И. // Электричество. – 1985. – № 7. – С. 44–48.
2. Белов Г.А. Динамика импульсных преобразователей. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2001. – 528 с.
3. Гелиг А.Х., Чурилов А.Н. // Дифференциальные уравнения. – 1997. – № 6. – С. 748–753.
4. Тановицкий Ю.Н., Кобзев Г.А. // 7-я Всерос. науч.-технич. конф. «Информационные технологии в электротехнике и электроэнергетике». – Чебоксары, 2010. – С. 117–119.
5. Мелешин В.И. // Электронная техника в автоматике / под ред. Ю.И. Конева. – М.: Радио и связь, 1986. – Вып. 17.
6. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.: Меркурий-Пресс, 2000. – 386 с.
7. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т. // Электричество. – 1992. – № 8. – С. 47–53.
8. Алгоритм HULL [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.cse.unsw.edu.au/~lambert/java/3d/hull.html>.
9. Тановицкий Ю.Н., Кобзев Г.А., Савин Д.А., Туран В.В. Программа для анализа устойчивости стабилизированных преобразователей с широтно-импульсной модуляцией. – Заявка на регистрацию программы в ВНИИЦ № 02069326.00232-01 2010 г.

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Россия
E-mail: tyn@mail.ru

Поступила в редакцию 25.02.11.