НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра теоретической механики

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ 2019–2021 гг.

Томск
Издательство Томского государственного университета
2021

РАССМОТРЕНО И ОДОБРЕНО методической комиссией механико-математического факультета

Протокол от 24 декабря 2021 г. № 8

Председатель комиссии Е.А. Тарасов

В учебно-методическом пособии представлены задачи с решениями олимпиад по теоретической механике, которые прошли в Томском государственном университете в 2019–2021 гг.

Предложенные задания могут быть использованы для подготовки к олимпиаде по теоретической механике студентов, изучающих основы теоретической механики.

СОСТАВИТЕЛИ: доцент кафедры теоретической механики, к. физ.-мат. наук В.А. Штанько, доцент кафедры теоретической механики, к. физ.-мат. наук Н.С. Бондарева, доцент кафедры теоретической механики, к. физ.-мат. наук Д.О. Диль, доцент кафедры теоретической механики, к. физ.-мат. наук И.В. Мирошниченко, зав. кафедрой теоретической механики, д. физ.-мат. наук М.А. Шеремет.

© Томский государственный университет, 2021

Конкурсные задачи вузовского тура олимпиады 2019 года

Задача 1 (4 балла)

На штангу AB действует сила $\overline{F}$ (рисунок 1). Определить момент m пары сил, которую следует приложить к стержню OE, чтобы механизм находился в равновесии, если $\angle EAB = \alpha$, $\angle OEA = \beta$, длина стержня OE равна a.

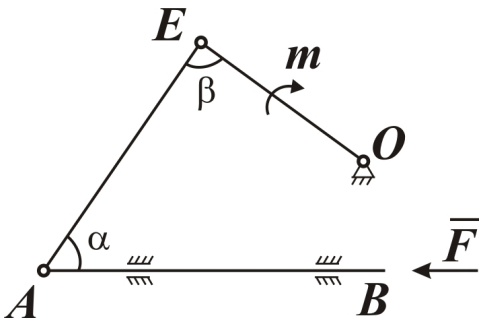

Рис. 1. Иллюстрация к задаче 1

Задача 2 (8 баллов)

Диск радиуса $R = 0.5$ м катится со скольжением по горизонтальной плоскости (рисунок 2). Центр O диска имеет в данный момент скорость $\upsilon_O = 2$ м/с и ускорение $w_O = 2$ м/с^2. Направления скорости $\overline{\upsilon}_O$ и ускорения $\overline{w}_O$ указаны на рисунке 2. Ускорение точки C диска равно нулю в данный момент. По ободу диска в направлении вращения диска движется точка A с постоянной по величине относительной скоростью $u = 1$ м/с. Определить абсолютные скорость и ускорение точки A.

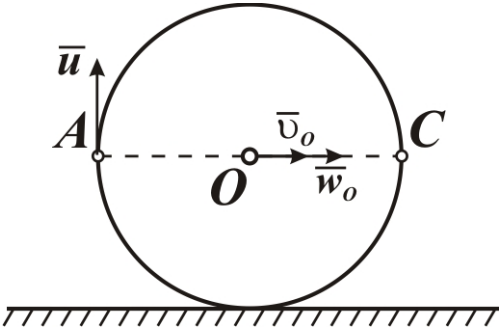

Рис. 2. Иллюстрация к задаче 2

Задача 3 (8 баллов)

Механическая система состоит из груза *1* веса *P*, ступенчатого блока *2* веса *Q* с радиусом инерции ρ и пружины с коэффициентом жесткости *c*. К блоку приложен момент *M* (рисунок 3). Система под действием приложенных сил находится в равновесии и приходит в движение вследствие того, что груз *1* отклонен вниз от положения равновесия на величину x_0 и отпущен без начальной скорости. Определить амплитуду и период колебаний груза *1*.

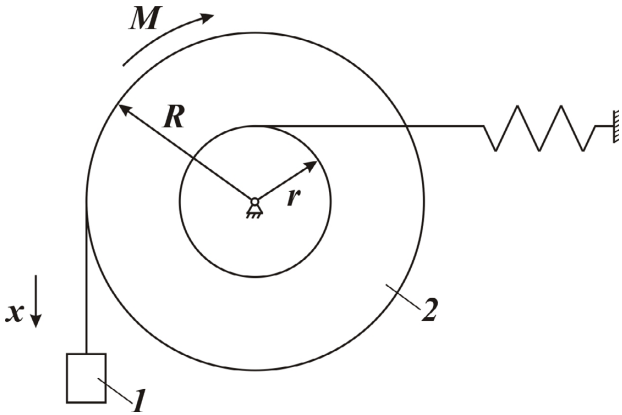

Рис. 3. Иллюстрация к задаче 3

Решения конкурсных задач вузовского тура олимпиады 2019 года

Задача 1 (4 балла)

Механическая система состоит из трех стержней, соединенных шарнирами и расположенных в одной плоскости (рисунок 4). Поэтому система сил, приложенных к системе, является плоской, при равновесии для каждого тела могут быть выписаны известные уравнения равновесия плоской системы сил.

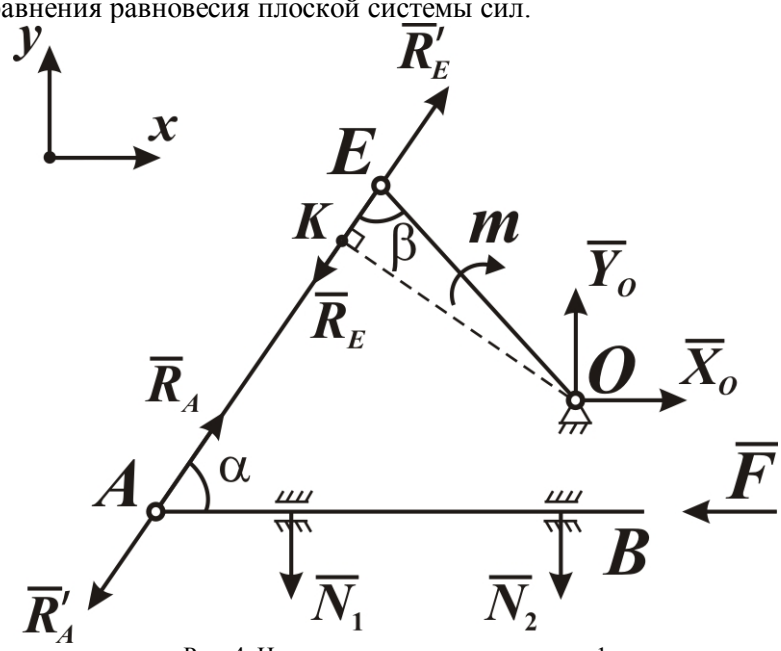

Рис. 4. Иллюстрация к решению задачи 1

1. Рассмотрим сначала равновесие стержня *AE*, к нему приложены две силы в шарнирах *A* и *E*. По аксиоме 1 статики, *если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, приложенные в двух его точках, то от действия этих сил состояние покоя или движения тела не изменится, если эти силы равны по модулю и направлены по прямой, проходящей через точки приложения сил, в противоположные стороны, то есть эти две силы образуют*

простейшую уравновешенную систему сил или простейшую систему сил эквивалентную нулю, отсюда следует, что $R'_A = R'_E$ и $\overline{R}'_A = -\overline{R}'_E$. Если $\overline{R}_E$ – это сила, с которой стержень *AE* действует на стержень *EO*, то в силу закона равенства действия и противодействия стержень *EO* действует на стержень *AE* с силой $R'_E = R_E$ и $\overline{R}'_E = -\overline{R}_E$, аналогично взаимодействие стержней *AE* и *AB* можно описать следующими соотношениями $R'_A = R_A$ и $\overline{R}'_A = -\overline{R}_A$.

Рассмотрим теперь равновесие стержня *EO* под действием пары сил с моментом *m*, реакций $\overline{X}_O$, $\overline{Y}_O$ шарнира в точке *O* и силы $\overline{R}_E$, приложенной в шарнире *E*. Составим сумму моментов всех сил относительно точки *O* и приравняем ее к нулю:

$$\sum_i m_O\left(\overline{F}_i\right) = -m + R_E \cdot OK + 0 + 0 = 0, \quad OK = a \cdot \sin(\beta)$$

тогда $-m + R_E \cdot a \cdot \sin(\beta) = 0$ или $R_E \cdot a \cdot \sin(\beta) = m$. Поскольку $R'_A = R_A = R'_E = R_E$, то $R_A \cdot a \cdot \sin(\beta) = m$.

Стержень *AB* находится в равновесии под действием сил $\overline{R}_A, \overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{F}$. Сумма проекций этих сил на ось *x* дает $R_A \cdot \cos(\alpha) - F = 0$, отсюда с учетом равенства $R_A \cdot a \cdot \sin(\beta) = m$ получаем $\dfrac{m}{a \cdot \sin(\beta)} \cdot \cos(\alpha) - F = 0$. В результате $m = \dfrac{F \cdot a \cdot \sin(\beta)}{\cos(\alpha)}$.

2. Эту задачу рационально решать с помощью принципа виртуальных перемещений в форме $\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \cdot \overline{\upsilon}_i = 0$ (рисунок 5). Это равенство означает, что *при равновесии системы со стационарными, удерживающими, голономными связями сумма мощностей активных сил ровна нулю*. Сообщим стержню *OE* виртуальную угловую скорость ω (по часовой стрелке) вокруг оси, проходящей через точку *O* перпендикулярно плоскости рисунка. Точка *E* получит виртуальную скорость $\overline{\upsilon}_E \perp EO$ и $\upsilon_E = \omega \cdot a$.

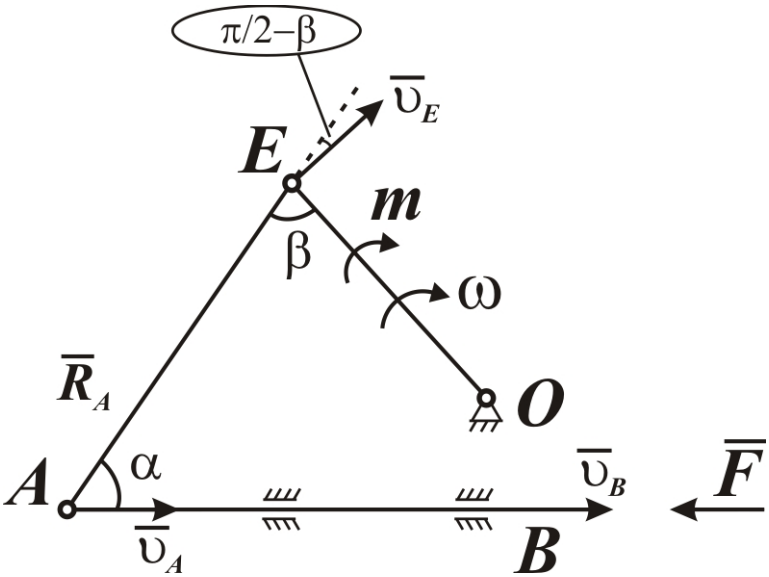

Рис. 5. Иллюстрация к решению задачи 1

Точка A будет иметь скорость $\overline{\upsilon}_A$ такую, что $\upsilon_A \cdot \cos(\alpha) = \upsilon_E \cdot \cos(\pi/2 - \beta)$ или $\upsilon_A \cdot \cos(\alpha) = \upsilon_E \cdot \sin(\beta)$ или $\upsilon_A \cdot \cos(\alpha) = a \cdot \omega \cdot \sin(\beta)$. В результате $\upsilon_A = \upsilon_B = a \cdot \omega \cdot \dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha)}$.

Тогда $\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \cdot \overline{\upsilon}_i = m \cdot \omega - F \cdot \upsilon_B = 0$ или $m \cdot \omega - F \cdot a \cdot \omega \cdot \dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha)} = 0$.

Таким образом, $m = F \cdot a \cdot \dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha)}$.

Ответ: $m = F \cdot a \cdot \dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha)}$.

Задача 2 (8 баллов)

Ускорение точки C $\overline{w}_C = 0$, поэтому точка C является мгновенным центром ускорений и, принимая ее за полюс, имеем $w_{OC}^n = R \cdot \omega^2$, $\overline{w}_{OC}^n \parallel OC$, $\overline{w}_{OC}^\tau \perp OC$. Проектируя выражение вида $\overline{w}_O = \overline{w}_{OC}^n + \overline{w}_{OC}^\tau$ на ось x, получим $w_{Ox} = w_O = w_{OC}^n = R\omega^2$, отсюда $\omega = \sqrt{\dfrac{w_O}{R}} = \sqrt{\dfrac{2}{0.5}} = 2$ ñ$^{-1}$. Проекция этого равенства $\left(\overline{w}_O = \overline{w}_{OC}^n + \overline{w}_{OC}^\tau\right)$ на ось y дает соотношение вида: $0 = w_{OC}^\tau = R \cdot \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 0$ (рисунок 6).

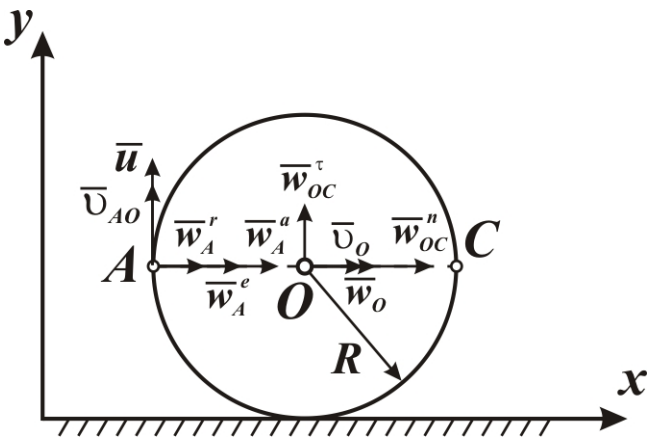

Рис. 6. Иллюстрация к решению задачи 2

По теореме сложения скоростей имеем: $\overline{\upsilon}_A^a = \overline{\upsilon}_A^e + \overline{\upsilon}_A^r$. Переносная скорость $\overline{\upsilon}_A^e = \overline{\upsilon}_O + \overline{\upsilon}_{AO}$, где $\upsilon_{AO} = R \cdot \omega$ и $\overline{\upsilon}_{AO} \perp AO$. Относительная скорость точки A $\overline{\upsilon}_A^r = \overline{u}$. Таким образом, $\overline{\upsilon}_A^a = \overline{\upsilon}_O + \overline{\upsilon}_{AO} + \overline{u}$. Проецируя это равенство на оси x и y, получим $\upsilon_{Ax}^a = \upsilon_O$, $\upsilon_{Ay}^a = \upsilon_{AO} + u = R \cdot \omega + u$ и величина

$$\upsilon_A^a = \sqrt{\upsilon_{Ax}^2 + \upsilon_{Ay}^2} = \sqrt{\upsilon_O^2 + \left(R \cdot \omega + u\right)^2} = \sqrt{4 + \left(0.5 \cdot 2 + 1\right)^2} = 2\sqrt{2} \text{ ì /ñ}$$

По теореме Кориолиса имеем $\overline{w}_A^a = \overline{w}_A^r + \overline{w}_A^e + \overline{w}_A^{cor}$. Здесь $w_A^r = \dfrac{u^2}{R} = \dfrac{1}{0.5} = 2$ ì /ñ^2 и $\overline{w}_A^r$ направлено от точки *A* к точке *O*. Переносное ускорение $\overline{w}_A^e = \overline{w}_C + \overline{w}_{AC}^{\tau} + \overline{w}_{AC}^n = \overline{w}_{AC}^n$, $w_A^e = 2R \cdot \omega^2 = 2 \cdot 0.5 \cdot 4 = 4$ ì /ñ^2. Ускорение Кориолиса $\overline{w}_A^{cor} = 2\left(\overline{\omega} \times \overline{\upsilon}^r\right) = 2\left(\overline{\omega} \times \overline{u}\right)$ или $w_A^{cor} = 2 \cdot \omega \cdot u = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ ì /ñ^2 и направлено $\overline{w}_A^{cor}$ от точки *A* к точке *O*. Проецируя $\overline{w}_A^a$ на оси *x* и *y*, будем иметь $w_{Ax}^a = w_A^r + w_A^e + w_A^{cor} = 2 + 4 + 4 = 10$ ì /ñ^2, $w_{Ay}^a = 0$ ì /ñ^2. Таким образом, $w_A^a = 10$ ì /ñ^2.

Ответ: $\upsilon_A^a = 2\sqrt{2}$ ì /ñ, $w_A^a = 10$ ì /ñ^2.

Задача 3 (8 баллов)

Положение тела *1* будем определять вертикальной координатой x, отсчитываемой от положения статического равновесия, где $x = 0$ (рисунок 7). Применим теорему о кинетическом моменте относительно оси C_z, проходящей через центр барабана *2*, перпендикулярной плоскости барабана и направленной к нам: $\frac{dK_z}{dt} = M_z^e$.

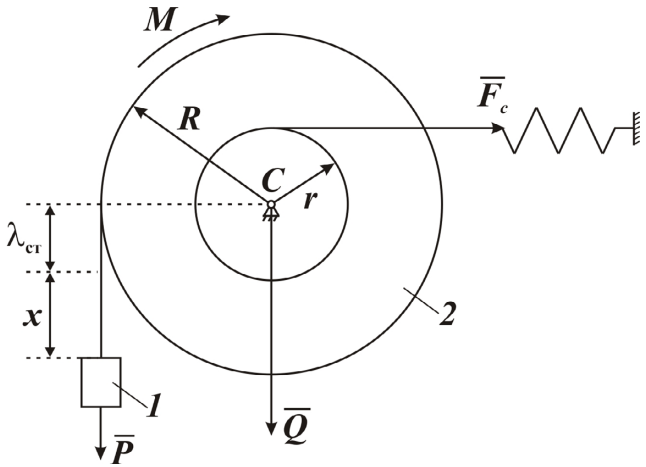

Рис. 7. – Иллюстрация к решению задачи 3

Здесь $K_z = \frac{P}{g}\dot{x}\cdot R + I_z\cdot\omega = \frac{P}{g}\dot{x}\cdot R + \frac{Q}{g}\rho^2\cdot\frac{\dot{x}}{R} = \frac{\dot{x}}{g}\left(P\cdot R + Q\frac{\rho^2}{R}\right) =$

$= \frac{\dot{x}}{gR}\left(P\cdot R^2 + Q\cdot\rho^2\right)$.

Далее $M_z^e = P\cdot R - M - F_c\cdot r$, где $F_c = c\left(\lambda_{\text{ñò}} + \frac{r}{R}x\right)$, $\lambda_{\text{ст}}$ – удлинение пружины при равновесии. При равновесии системы ($x = 0$) $M_z^e = 0 = P\cdot R - M - c\cdot\lambda_{\text{ñò}}\cdot r$. Тогда при $x \neq 0$: $M_z^e = -c\cdot\frac{r^2}{R}\cdot x$ и уравнение движения будет следующим:

$\frac{\ddot{x}}{Rg}\left(P\cdot R^2+Q\cdot\rho^2\right)=-c\cdot\frac{r^2}{R}\cdot x$ или $\ddot{x}+k^2x=0$, где введено обозначение $k^2=cg\cdot\frac{r^2}{P\cdot R^2+Q\cdot\rho^2}$. Общее решение этого уравнения можно представить в виде $x=a\cdot\sin\left(kt+\varepsilon\right)$, где a и ε – постоянные интегрирования. Начальные условия: при $t=0$ $x=x_0$, $\dot{x}=0$. Для определения a и ε имеем уравнения: $x_0=a\cdot\sin\left(\varepsilon\right)$ и $0=ak\cdot\cos\left(\varepsilon\right)$, отсюда $a=x_0$, $\varepsilon=\pi/2$. Поэтому частное решение будет следующим $x=x_0\cdot\sin\left(kt+\frac{\pi}{2}\right)$ èëè $x=x_0\cdot\cos\left(kt\right)$. Тогда амплитуда колебаний $a=x_0$ и период колебаний $T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{P\cdot R^2+Q\cdot\rho^2}{cgr^2}}$.

Ответ: амплитуда колебаний $a=x_0$, период колебаний $T=2\pi\sqrt{\frac{P\cdot R^2+Q\cdot\rho^2}{cgr^2}}$.

Конкурсные задачи межвузовского тура олимпиады 2019 года (задачи от ТГУ)

Задача 1 (8 баллов)

Прямоугольный треугольник движется в своей плоскости, касаясь катетами точек *A* и *B* неподвижной конструкции, изображенной на рисунке 8. Угловая скорость ω вращения треугольника постоянная. Определить скорость и ускорение точки *C*. Определить также скорость мгновенного центра ускорений и ускорение мгновенного центра скоростей треугольника.

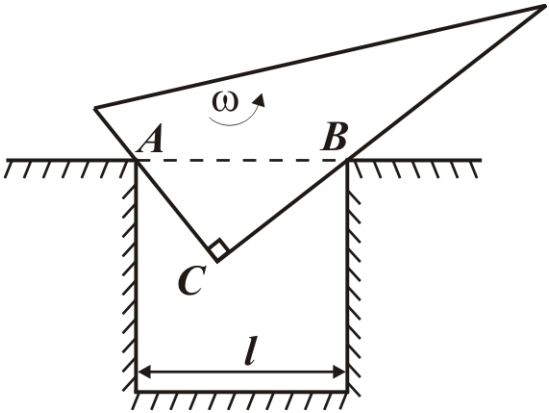

Рис. 8. – Иллюстрация к задаче 1

Задача 2 (8 баллов)

Стержни *CE* и *CD* вращаются равномерно вокруг неподвижного шарнира *C* с угловыми скоростями, соответственно равными ω и 2ω. Стержень *AB*, длиной *a*, соединяет ползуны, скользящие по стержням *CE* и *CD*, причем ползун *A* движется относительно стержня *CE* со скоростью υ_A^r (рисунок 9) и ускорением w_A^r. Определить скорость и ускорение ползуна *B* относительно стержня *CD*, а также угловую скорость ω_{AB} стержня

AB в момент, когда угол ACB прямой и угол BAC равен 30º, $\upsilon_A^r = 0.5a\omega$, $w_A^r = a\omega^2\sqrt{3}$.

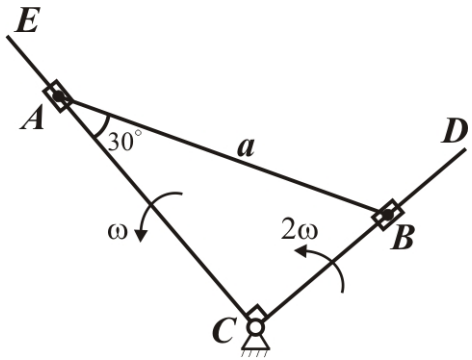

Рис. 9. – Иллюстрация к задаче 2

Задача 3 (5 баллов)

Стержень OA длины a вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, по закону $\varphi = t^2 + 5\cdot t$ рад (рисунок 10). Из точки A вдоль стержня движется к оси точка M. По какому закону должно изменяться со временем расстояние $s = AM$ для того, чтобы абсолютное ускорение точки M всегда было направлено по стержню?

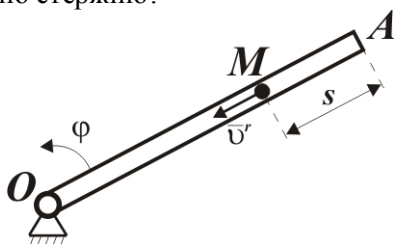

Рис. 10. – Иллюстрация к задаче 3

Решения конкурсных задач межвузовского тура олимпиады 2019 года (задачи от ТГУ)

Задача 1 (8 баллов)

1. Скорости точек A и B треугольника направлены вдоль катетов, поэтому МЦС находится в точке P пересечения перпендикуляров к $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$ (см. рисунок 11). Фигура $ACBP$ – прямоугольник, поэтому $CP = AB = l$. Тогда скорость υ_C точки C будет $\upsilon_C = l \cdot \omega$ и $\overline{\upsilon}_C \perp CP$.

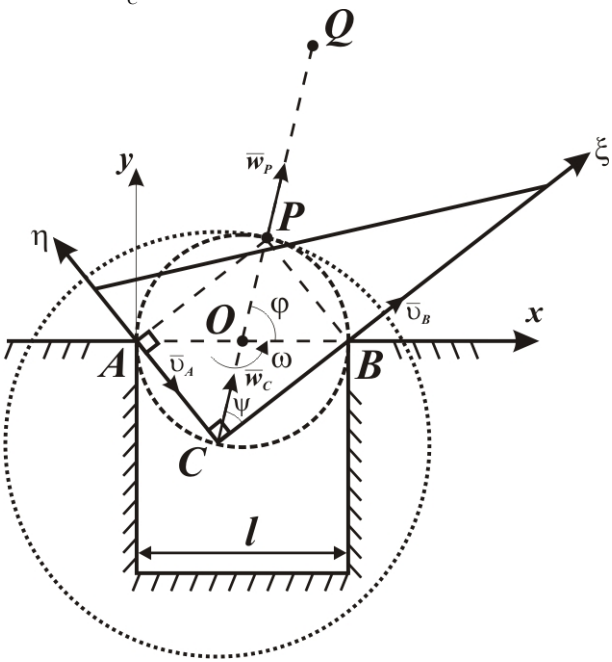

Рис. 11. – Иллюстрация к решению задачи 1

2. В неподвижной системе координат Axy координаты мгновенного центра скоростей (МЦС) точки P будут

$$x_P = OA + OP \cdot \cos(\varphi) = 0.5l\left(1 + \cos(\varphi)\right);$$

$$y_P = OP \cdot \sin(\varphi) = 0.5l \sin(\varphi)$$

Здесь учтено, что $OA = OP = l/2$. Уравнение неподвижной центроиды $\left(x_P - 0.5l\right)^2 + y_P^2 = \left(l/2\right)^2$ – окружность радиуса $l/2$ с центром в точке O. OP является радиусом этой окружности и он ортогонален касательной к неподвижной центроиде в точке P. Известно, что ускорение МЦС точки P $\overline{w}_P$ направлено по перпендикуляру к указанной касательной, то есть $\overline{w}_P$ направлено вдоль COP. Координаты подвижной центроиды в системе координат $C\xi\eta$ будут $\xi_P = l\cos\left(\psi\right)$, $\eta_P = l\sin\left(\psi\right)$, так как $CP = l$. Поэтому подвижной центроидой является окружность $\xi_P^2 + \eta_P^2 = l^2$ радиуса l с центром в точке C. Ускорение $\overline{w}_P$ направлено в сторону подвижной центроиды, то есть $\overline{w}_P$ направлено во вне центроид (см. рисунок 11).

Угловая скорость $\omega = \text{const}$, поэтому $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$ и $\text{tg}\left(\mu\right) = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2} = 0$, $\mu = 0$. Тогда ускорения любых точек треугольника будут образовывать с направлением на МЦУ (точка Q) угол $\mu = 0$, поэтому ускорение точки C $\overline{w}_C$ будет направлено вдоль CP и величина $w_C = \left(CP + PQ\right)\omega^2 = w_{CQ}^n$. Примем точку P за полюс, тогда $\overline{w}_C = \overline{w}_P + \overline{w}_{CP}^n$, $w_{CP}^n = l\omega^2$, $\overline{w}_{CP}^n \parallel \overline{CP}$. Спроецируем это векторное равенство на направление $\overline{CP}$, получим $w_C = w_P + l\omega^2$, $w_P = PQ \cdot \omega^2$, $w_C - w_P = l\omega^2$.

При вращении треугольника точка C все время будет находиться на неподжвижной центроиде и двигаться с постоянной скоростью $\upsilon_C = l \cdot \omega$. Тогда ускорение ее будет состоять только из нормального ускорения $w_C = w_C^n = \upsilon_N^2 / \rho$, где $\rho = l/2$, то есть $w_C = \dfrac{l^2\omega^2}{0.5l} = 2l\omega^2$. Подставим это значение в уравнение $w_C - w_P = l\omega^2$, будем иметь $2l\omega^2 - PQ \cdot \omega^2 = l\omega^2$, отсюда $PQ = l$. Таким образом, МЦУ будет находиться на продолжении прямой

CP на расстоянии l от точки P. Тогда скорость точки Q будет $\upsilon_Q = QP \cdot \omega = l\omega$, а ускорение точки P $w_P = l\omega^2$.

Ответ: $\upsilon_C = l\omega,\ w_C = 2l\omega^2,\ \upsilon_Q = l\omega,\ w_P = l\omega^2$.

Задача 2 (8 баллов)

1. Движение ползунов рассматриваем как сложное, тогда по теореме сложения скоростей будем иметь $\overline{\upsilon}_A^a = \overline{\upsilon}_A^r + \overline{\upsilon}_A^e$ и $\overline{\upsilon}_B^a = \overline{\upsilon}_B^r + \overline{\upsilon}_B^e$, где $\upsilon_A^r = 0.5a\omega$, $\upsilon_A^e = \omega \cdot CA = \omega \cdot a \cdot 0.5\sqrt{3}$, $\overline{\upsilon}_A^e \perp CE$, υ_B^r – неизвестна, $\upsilon_B^e = 2\omega \cdot CB = \omega \cdot a$, $\overline{\upsilon}_B^e \perp CD$ (см. рисунок 12).

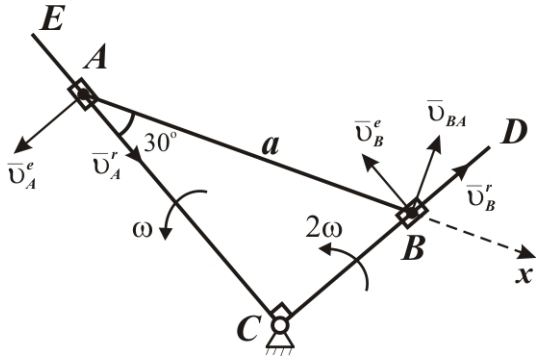

Рис. 12. – Иллюстрация к решению задачи 2

Теперь принимаем ползуны *A* и *B* как точки стержня *AB*, тогда, считая точку *A* полюсом, можем записать $\overline{\upsilon}_B^a = \overline{\upsilon}_A^a + \overline{\upsilon}_{BA}$, $\upsilon_{BA} = \omega_{BA} \cdot a$, $\overline{\upsilon}_{BA} \perp BA$. Подставляя выражения абсолютных скоростей в это равенство, получим

$$\overline{\upsilon}_B^r + \overline{\upsilon}_B^e = \overline{\upsilon}_A^r + \overline{\upsilon}_A^e + \overline{\upsilon}_{BA} \qquad (a)$$

2. Спроецируем соотношение (*a*) на направление $\overline{AB}$, будем иметь

$$\upsilon_B^r \cos(60°) - \upsilon_B^e \cos(30°) = \upsilon_A^r \cos(30°) - \upsilon_A^e \cos(60°)$$

или

$$0.5\upsilon_B^r - 0.5\upsilon_B^e\sqrt{3} = 0.5\upsilon_A^r\sqrt{3} - 0.5\upsilon_A^e$$

Отсюда $\upsilon_B^r = \upsilon_B^e\sqrt{3} + \upsilon_A^r\sqrt{3} - \upsilon_A^e = a\omega\sqrt{3}$. Таким образом, $\upsilon_B^r = a\omega\sqrt{3}$.

3. Спроецируем соотношение (*a*) на направление $\overline{\upsilon}_{BA}$, получим

$$\upsilon_B^r \cos(30°) + \upsilon_B^e \cos(60°) = -\upsilon_A^r \cos(60°) - \upsilon_A^e \cos(30°) + \upsilon_{BA}$$

или

$$0.5\upsilon_B^r\sqrt{3}+0.5\upsilon_B^e=-0.5\upsilon_A^r-0.5\upsilon_A^e\sqrt{3}+\omega_{BA}\cdot a$$

Отсюда $\omega_{BA}=\dfrac{1}{2a}\left(3a\omega+a\omega+0.5a\omega+1.5a\omega\right)=3\omega$. Таким образом, $\omega_{BA}=3\omega$.

4. По теореме Кориолиса (см. рисунок 13)

$$\overline{w}_A^a=\overline{w}_A^r+\overline{w}_A^e+\overline{w}_A^{cor},\ \ \overline{w}_B^a=\overline{w}_B^r+\overline{w}_B^e+\overline{w}_B^{cor},$$

где $w_A^r=a\omega^2\sqrt{3}$, $w_A^e=w_A^{en}=CA\cdot\omega^2=\omega^2 a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $w_A^{cor}=a\omega^2$, $\overline{w}_A^{cor}\perp CE$

w_B^r – неизвестно, $w_B^{en}=2a\omega^2$, $w_B^{cor}=a\omega^2 4\sqrt{3}$, $\overline{w}_B^{cor}\perp CD$.

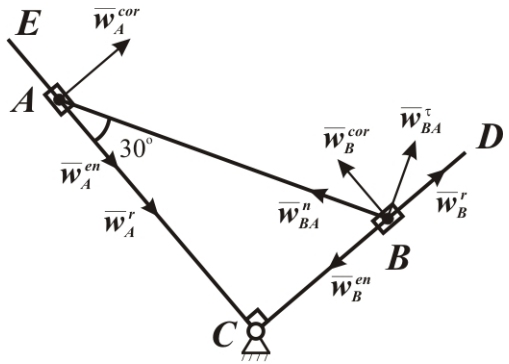

Рис. 13. – Иллюстрация к решению задачи 2

Для ползунов A и B, как точек стержня AB, по формуле распределения ускорений при плоском движении, имеем $\overline{w}_B^a=\overline{w}_A^a+\overline{w}_{BA}^n+\overline{w}_{BA}^\tau$, $\overline{w}_{BA}^n$ направлен от точки B к точке A и $w_{BA}^n=a\omega_{AB}^2=9a\omega^2$.

Подставим сюда выражения для $\overline{w}_B^a$ и $\overline{w}_A^a$, получим

$$\overline{w}_B^r+\overline{w}_B^e+\overline{w}_B^{cor}=\overline{w}_A^r+\overline{w}_A^e+\overline{w}_A^{cor}+\overline{w}_{BA}^n+\overline{w}_{BA}^\tau$$

Спроецируем это соотношение на направление $\overline{AB}$, получим:

$$w_B^r \cos(60°) - w_B^{en} \cos(60°) - w_B^{cor} \cos(30°) =$$
$$= w_A^r \cos(30°) + w_A^{en} \cos(30°) + w_A^{cor} \cos(60°) - w_{BA}^n + 0$$

Отсюда $w_B^r = 1.5a\omega^2$.

Ответ: $\upsilon_B^r = a\omega\sqrt{3},\ \omega_{BA} = 3\omega,\ w_B^r = 1.5a\omega^2$.

Задача 3 (5 баллов)

Движение точки M рассматриваем как сложное, где относительным движением ее будет движение вдоль трубки, а переносным – вращение трубки OA по заданному закону (см. рисунок 14).

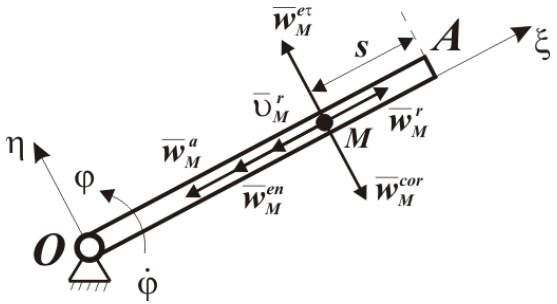

Рис. 14. – Иллюстрация к решению задачи 3

Применим теорему Кориолиса, имеем

$$\overline{w}_M^a = \overline{w}_M^r + \overline{w}_M^{en} + \overline{w}_M^{e\tau} + \overline{w}_M^{cor} \qquad (a)$$

По условию ускорение $\overline{w}_M^a$ должно быть направлено по OA, поэтому проецируя соотношение (a) на ось $O\eta$, получим

$$0 = w_M^{e\tau} - w_M^{cor} \qquad (б)$$

Здесь

$$w_M^{e\tau} = MO \cdot \ddot{\varphi} = (a - s)2, \;\; w_M^{cor} = 2\dot{\varphi}\upsilon_M^r = 2 \cdot (2t + 5) \cdot \frac{ds}{dt}, \;\; \upsilon_M^r = \frac{ds}{dt}.$$

Подставим выражения $w_M^{e\tau}$ и w_M^{cor} в соотношение ($б$) получим

$$0 = 2(a - s) - 2(2t + 5)\frac{ds}{dt}$$

Отсюда $\frac{ds}{dt} = \frac{a - s}{2t + 5}$. Проинтегрируем это дифференциальное уравнение, принимая при $t = 0$, $s = 0$, тогда будем иметь

$$\int_0^s \frac{ds}{a-s} = \int_0^t \frac{dt}{2t+5} \Rightarrow -\ln(a-s)\Big|_0^s = 0.5\ln(2t+5)\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\ln(a-s) + \ln(a) = 0.5\ln(2t+5) - 0.5\ln(5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{a}{a-s}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{2t+5}{5}}\right) \Rightarrow \frac{a}{a-s} = \sqrt{\frac{2t+5}{5}} \Rightarrow s = a\left(1-\sqrt{\frac{5}{2t+5}}\right)$$

Ответ: $s = a\left(1-\sqrt{\frac{5}{2t+5}}\right)$.

Конкурсные задачи вузовского тура олимпиады 2020 года

Задача 1 (4 балла)

Однородная балка *AB* весом *G* = 60 кГ и длиной 4 метра опирается концом *A* на гладкий горизонтальный пол и промежуточной точкой *D* на столб высотой 3 м, образуя с вертикалью угол 30 градусов (рисунок 15). Балка удерживается в таком положении веревкой *FE*, протянутой горизонтально от середины балки. Пренебрегая трением определить натяжение веревки и реакции опор *A* и *D*.

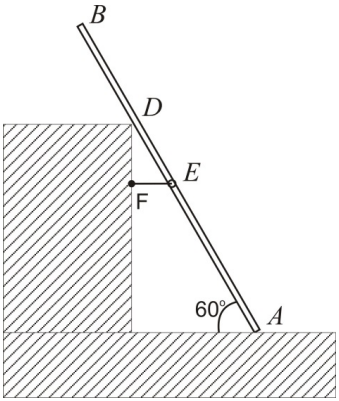

Рис. 15. – Иллюстрация к задаче 1

Задача 2 (5 баллов)

Тело, представляющее собой треугольную пластину *OAB*, вращается вокруг оси, проходящей через точку *O* по закону $\varphi = 0.5 \cdot t^2 + 2 \cdot t$ рад (рисунок 16). Уравнение относительного движения точки *M* в пазу $s = 9 \cdot t^2 + 1$ см; *OB* = 10 см. Определить для момента времени $t_1 = 1$ с абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M*. Угол *BOA* прямой, угол *OBA* указан на рисунке 16.

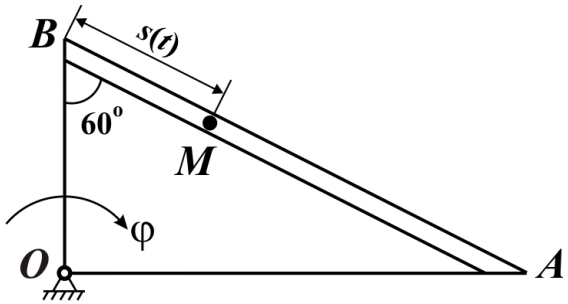

Рис. 16. – Иллюстрация к задаче 2

Задача 3 (7 баллов)

Система, состоящая из колеса 1 радиуса R и массы m, блока 2 массы $2m$ с внутренним и внешним радиусами r и $2r$ соответственно и груза 3 массы $3m$, первоначально находится в покое (рисунок 17). Момент инерции блока 2 равен $6mr^2$. Определите скорость вращения блока 2 в момент времени, когда тело 3 переместится на расстояние s от начального положения, если коэффициент трения между телом 3 и поверхностью, по которой оно спускается, равен f.

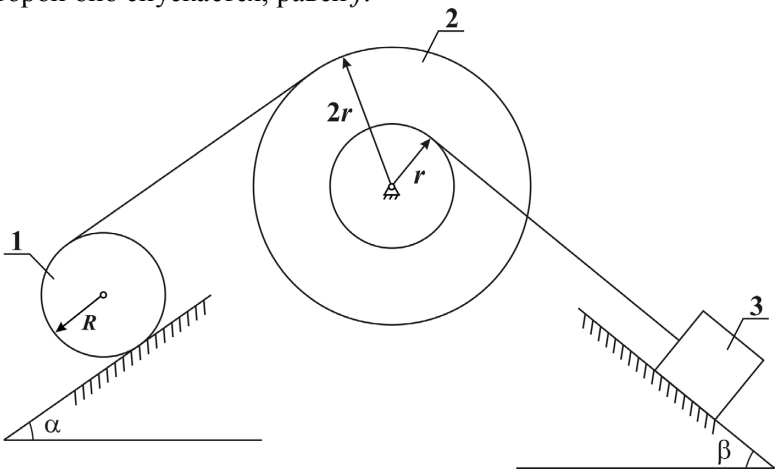

Рис. 17. – Иллюстрация к задаче 3

Решения конкурсных задач вузовского тура олимпиады 2020 года

Задача 1 (4 балла)

Рассмотрим равновесие сил, приложенных к балке AB (рисунок 18). Для этого воспользуемся *аксиомой связей*: *связи, приложенные к несвободному твердому телу, можно отбросить, заменив их действие реакциями связей, и рассматривать это тело как свободное, находящееся под действием приложенных к нему активных сил и сил реакций отброшенных связей*. Таким образом, вводим следующие реакции связей: $\overline{S}$ – сила натяжения веревки, $\overline{R}_D$ – реакция в точке D, $\overline{R}_A$ – реакция в точке A, $\overline{G}$ – вес балки. Оси абсцисс и ординат проведем по горизонтали и вертикали.

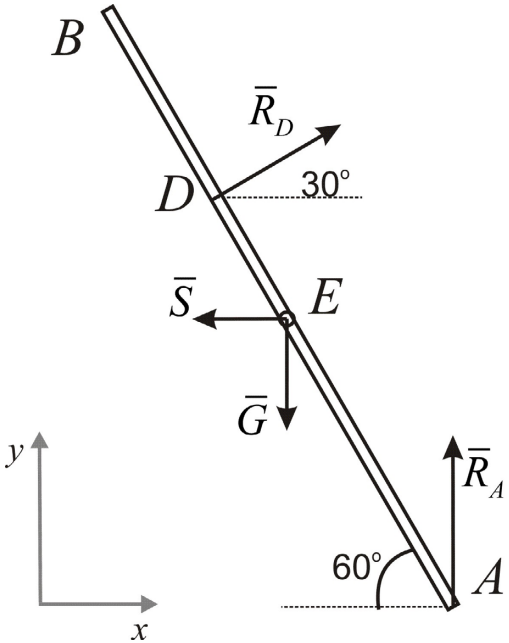

Рис. 18. – Иллюстрация к решению задачи 1

Рассмотрим уравнение равновесия относительно точки E (равенство нулю суммы моментов всех сил относительно центра масс балки):

$$\sum_i m_E\left(\overline{F}_i\right) = -R_D \cdot DE + R_A \frac{l}{2}\cos\left(60°\right) = 0 \Rightarrow R_D = R_A \frac{l\cos\left(60°\right)}{2DE} \qquad (1)$$

При этом $DE = AD - \frac{l}{2} = \frac{h}{\sin\left(60°\right)} - \frac{l}{2}$,

где l – длина балки AB и h – высота столба, на который опирается балка.

Составим суммы проекций всех сил на оси координат x и y, соответственно:

$$\sum_i X_i = -S + R_D\cos\left(30°\right) = 0 \Rightarrow S = R_D\cos\left(30°\right) \qquad (2)$$

$$\sum_i Y_i = R_A - G + R_D\sin\left(30°\right) = 0 \Rightarrow R_A = G - R_D\sin\left(30°\right) \qquad (3)$$

Подставляя полученное соотношение для R_A в соотношение для R_D, имеем

$$R_D = \frac{G \cdot l \cdot \cos\left(60°\right)}{2DE + l\sin\left(30°\right)\cos\left(60°\right)} = \frac{G \cdot l \cdot \cos\left(60°\right)}{\left(\frac{2h}{\sin\left(60°\right)} - l\right) + l\sin\left(30°\right)\cos\left(60°\right)}$$

Подставляя все заданные значения, получим

$$R_D = \frac{2G\sqrt{3}}{12 - 3\sqrt{3}} \approx 0.509G = 30.54 \text{ кГ}$$

Зная R_D можно определить S:

$$S = R_D\cos\left(30°\right) = \frac{2G\sqrt{3}\cos\left(30°\right)}{12 - 3\sqrt{3}} = \frac{3G}{12 - 3\sqrt{3}} \approx 0.441G = 26.46\text{êÃ}$$

Зная R_D также определяем R_A:

$$R_A = G - R_D\sin\left(30°\right) = G - \frac{G\sqrt{3}}{12 - 3\sqrt{3}} = G\frac{12 - 4\sqrt{3}}{12 - 3\sqrt{3}} \approx 0.745G = 44.7 \text{ кГ}$$

Ответ: $S = 26.46$ кГ, $R_A = 44.7$ кГ, $R_D = 30.54$ кГ.

Задача 2 (5 баллов)

Движение точки M является сложным: относительное движение точки M – это движение точки M в пазу, переносное движение точки M – это движение точки треугольной пластины, совпадающей с точкой M, а абсолютное движение точки M – это объединение указанных двух видов движения. Сначала определим положение точки M относительно пластины OAB в момент времени t_1:

$$s(t_1) = BM = 9t_1^2 + 1 = 10 \text{ см}$$

Замечаем, что $OB = BM$ и угол OBM равен 60°. Отсюда ΔOBM является равносторонним.

Абсолютная скорость точки M определяется с использованием теоремы сложения скоростей $\overline{\upsilon}_M^a = \overline{\upsilon}_M^e + \overline{\upsilon}_M^r$.

Переносную скорость точки M можно определить, рассматривая вращение пластины вокруг оси, проходящей через точку O по закону $\varphi = 0.5 \cdot t^2 + 2 \cdot t$ рад. При таком движении скорость любой точки пластины будет определяться соотношением вида: $\overline{\upsilon} = \overline{\omega} \times \overline{r}$, где $\overline{\omega}$ – вектор угловой скорости пластины, $\overline{r}$ – радиус-вектор точки, определяющий ее положение относительно точки O. Тогда $\overline{\upsilon}_M^e = \overline{\omega} \times \overline{OM}$ и $\upsilon_M^e = \omega \cdot OM$.

Величину угловой скорости вращения треугольной пластины OAB найдем, используя закон вращения пластины $\varphi = 0.5 \cdot t^2 + 2 \cdot t$ рад, следующим образом: $\omega(t) = d\varphi/dt = t + 2 \text{ с}^{-1}$. Тогда $\omega(t_1) = 3 \text{ ñ}^{-1}$.

В результате величина переносной скорости точки M: $\upsilon_M^e = \omega \cdot OM = 3 \cdot 10 = 30 \text{ см/с}$. Направление этой скорости указано на рисунке 19.

Величину относительной скорости точки M найдем, используя закон относительного движения этой точки $s = 9 \cdot t^2 + 1$, следующим образом: $\upsilon_M^r(t) = ds/dt = 18 \cdot t \text{ см/с}$ или $\upsilon_M^r(t_1) = 18 \text{ см/с}$.

Для определения абсолютной скорости точки M спроецируем теорему сложения скоростей $\overline{\upsilon}_M^a = \overline{\upsilon}_M^e + \overline{\upsilon}_M^r$ на оси x и y. В результате получим (см. рисунок 19):

$$\upsilon_{Mx}^{a} = \upsilon_{M}^{e}\cos(60°) + \upsilon_{M}^{r}\cos(30°) \approx 30.59 \text{ см/с}$$

$$\upsilon_{My}^{a} = -\upsilon_{M}^{e}\sin(60°) - \upsilon_{M}^{r}\sin(30°) \approx -34.98 \text{ см/с}$$

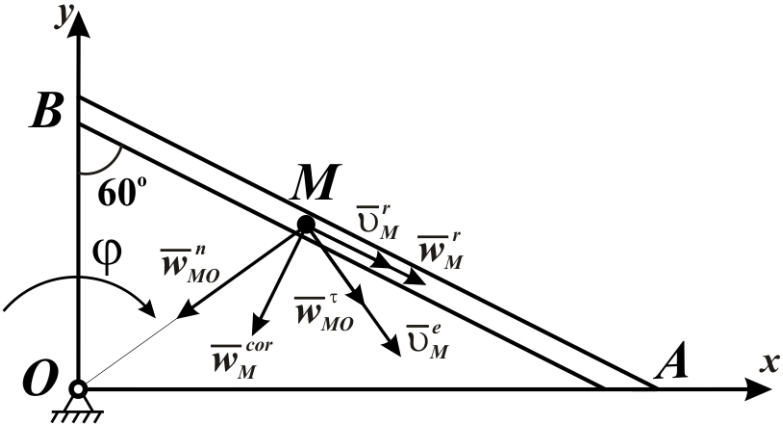

Рис. 19. – Иллюстрация к решению задачи 2

Зная проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат, найдем величину абсолютной скорости точки *M*:

$$\upsilon_{M}^{a} = \sqrt{\left(\upsilon_{Mx}^{a}\right)^2 + \left(\upsilon_{My}^{a}\right)^2} \approx 46.47 \text{ см/с}$$

Абсолютное ускорение точки *M* можно определить, воспользовавшись теоремой Кориолиса:

$$\overline{w}_{M}^{a} = \overline{w}_{M}^{r} + \overline{w}_{M}^{e} + \overline{w}_{M}^{cor}$$

Переносное ускорение $\overline{w}_{M}^{e} = \overline{w}_{O} + \overline{w}_{MO}^{\tau} + \overline{w}_{MO}^{n} = \overline{w}_{MO}^{\tau} + \overline{w}_{MO}^{n}$. Тогда величины тангенциальной и нормальной компонент переносного ускорения будут определяться по следующим соотношениям:

$$w_{MO}^{\tau} = \varepsilon \cdot MO, \;\; w_{MO}^{n} = \omega^2 \cdot MO$$

Величину углового ускорения треугольной пластины *OAB* найдем, используя закон вращения пластины $\varphi = 0.5 \cdot t^2 + 2 \cdot t$ рад, следующим образом: $\varepsilon(t) = d^2\varphi/dt^2 = 1$ ñ$^{-2}$. Тогда

$$w_{MO}^{\tau} = \varepsilon \cdot MO = 1 \cdot 10 = 10 \text{ см/с}^2, \;\; w_{MO}^{n} = \omega^2 \cdot MO = 3^2 \cdot 10 = 90 \text{ см/с}^2$$

Величину относительного ускорения точки M найдем, используя закон относительного движения этой точки $s = 9 \cdot t^2 + 1$, следующим образом: $w_M^r(t) = d^2 s / dt^2 = 18$ см/с^2.

Ускорение Кориолиса $\overline{w}_M^{cor} = 2\left(\overline{\omega} \times \overline{\upsilon}_M^r\right)$, величина этого ускорения $w_M^{cor} = 2 \cdot \omega \cdot \upsilon_M^r = 2 \cdot 3 \cdot 18 = 108$ см/с^2 и направлено $\overline{w}_M^{cor}$ так, как показано на рисунке 19.

Проецируя $\overline{w}_M^a$ на оси x и y (рисунок 19), будем иметь

$$w_{Mx}^a = w_M^r \cos(30°) + w_{MO}^\tau \cos(60°) - w_{MO}^n \cos(30°) - w_M^{cor} \cos(60°) =$$

$$= 18 \cdot 0.5 \cdot \sqrt{3} + 10 \cdot 0.5 - 90 \cdot 0.5 \cdot \sqrt{3} - 108 \cdot 0.5 \approx -111.35 \text{ см/с}^2,$$

$$w_{My}^a = -w_M^r \sin(30°) - w_{MO}^\tau \sin(60°) - w_{MO}^n \sin(30°) - w_M^{cor} \sin(60°) =$$

$$= -18 \cdot 0.5 - 10 \cdot 0.5 \cdot \sqrt{3} - 90 \cdot 0.5 - 108 \cdot 0.5 \cdot \sqrt{3} \approx -156.19 \text{ см/с}^2.$$

Таким образом, $w_A^a = \sqrt{\left(w_{Mx}^a\right)^2 + \left(w_{My}^a\right)^2} \approx 191.82$ см/с^2.

Ответ: $\upsilon_M^a = 46.47$ см/с, $w_A^a = 191.82$ см/с^2.

Задача 3 (7 баллов)

Поскольку по условию задачи необходимо найти скорость вращения блока 2 при известном перемещении тела 3, то для решения наиболее удобно воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии системы в виде:

$$T_{t=t_1} - T_{t=t_0} = \sum_k A_k^e + \sum_k A_k^i$$

Выразим кинетическую энергию каждого тела через угловую скорость блока 2:

$$T_1 = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{I_1\omega_1^2}{2} = \frac{3}{4}mr^2\omega_2^2, \quad T_2 = \frac{I_2\omega_2^2}{2} = 3mr^2\omega_2^2,$$

$$T_3 = \frac{3m\upsilon_3^2}{2} = \frac{3}{2}mr^2\omega_2^2, \quad T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{21}{4}mr^2\omega_2^2$$

где $\upsilon_1 = r\omega_2$ и $\upsilon_3 = r\omega_2$ – скорости центров масс тел 1 и 3; $\omega_1 = \frac{r}{R}\omega_2$ – угловая скорость вращения тела 1; $I_1 = \frac{mR^2}{2}$ и $I_2 = 6mr^2$ – моменты инерции тел 1 и 2 относительно осей, проходящих через их центры масс перепендикулярно плоскости рисунка.

Вычислим работу сил, приложенных к системе, полагая, что при движении системы тело 1 поднимается, а тело 3 опускается. Если вычисленная работа окажется отрицательной, то тела системы в действительности движутся в обратных направлениях. Сумма работ внутренних сил $\overline{T}_{12}$, $\overline{T}_{21}$, $\overline{T}_{32}$, $\overline{T}_{23}$ равна нулю, так как $\overline{T}_{12} = -\overline{T}_{21}$, $\overline{T}_{32} = -\overline{T}_{23}$, а точки приложения равных по модулю сил проходят одинаковые пути в одном направлении. Тогда на заданном перемещении системы работу совершают лишь силы тяжести тел 1 и 3, а также сила трения скольжения тела 3 по поверхности (рисунок 20). Для её определения рассмотрим движение тела 3 отдельно. Запишем для этого тела второй закон Ньютона в проекции на направление нормальной реакции опоры $\overline{N}_3$: $N_3 - 3mg\cos(\beta) = 0$.

Используя это соотношение и учитывая связь $F_f = f \cdot N_3$, определим работу всех сил на заданном перемещении:

$$A = \left\{-mg\sin(\alpha) + 3mg\sin(\beta) - 3fmg\cos(\beta)\right\}s.$$

Приравнивая изменение кинетической энергии и работу всех сил, а также учитывая, что в начальный момент времени система находилась в покое, получим следующее выражение для искомой угловой скорости: $\omega_2 = \dfrac{2}{r}\sqrt{\dfrac{gs\left\{-\sin(\alpha) + 3\sin(\beta) - 3f\cos(\beta)\right\}}{21}}$.

Ответ: $\omega_2 = \dfrac{2}{r}\sqrt{\dfrac{gs\left\{3\sin(\beta) - 3f\cos(\beta) - \sin(\alpha)\right\}}{21}}$

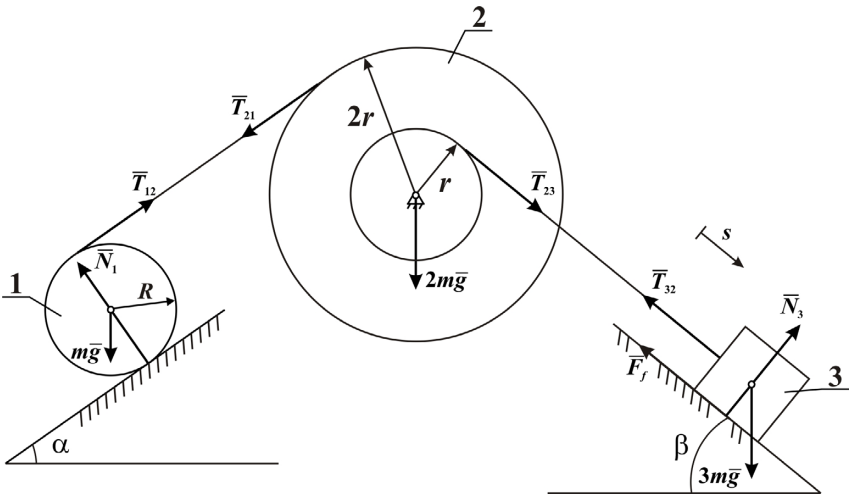

Рис. 20. – Иллюстрация к решению задачи 3

Конкурсные задачи вузовского тура олимпиады 2021 года

Задача 1 (6 баллов)

Плоская рама состоит из двух изогнутых под прямым углом однородных стержней. Рама имеет две опоры – неподвижные шарниры *O* и *B* (рисунок 21). Части рамы соединены шарниром в точке *A*. К раме приложена вертикальная сила $F = 20$ кН и момент $M = 30$ кН·м. Необходимо найти реакции опор. Характерные размеры приведены в таблице 1.

Таблица 1. Характерные размеры плоской рамы

Элемент	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
Размер, м	1	3	2	2	5

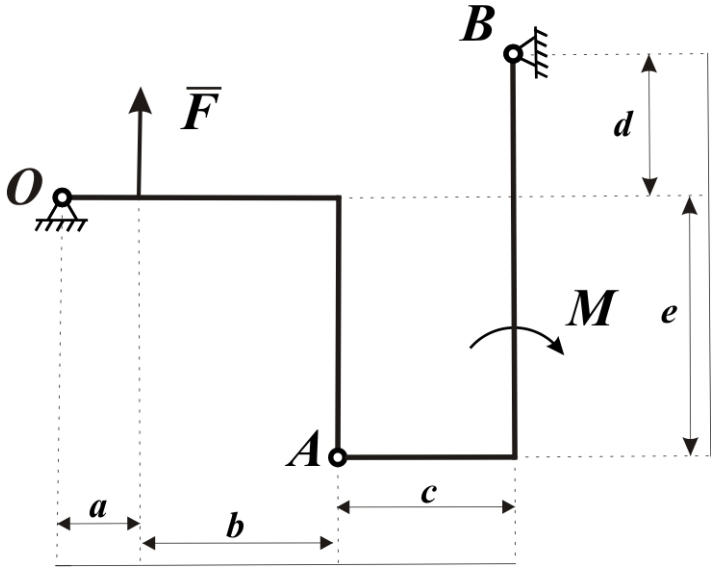

Рис. 21. – Иллюстрация к задаче 1

Задача 2 (5 баллов)

В положении кривошипно-шатунного механизма, схема которого приведена на рисунке 22, определить угловое ускорение шатуна *AB* и ускорение точки *A*. Кривошип *OA* имеет угловое ускорение ε_0. Ускорение ползуна *B* в данный момент равно нулю. Принять $AB = a$, $OA = b$.

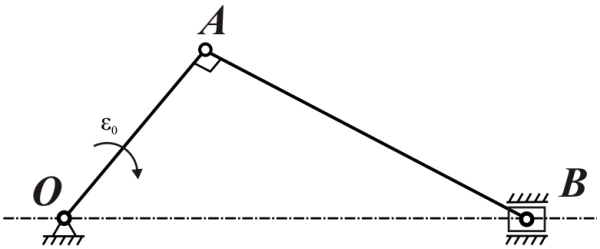

Рис. 22. – Иллюстрация к задаче 2

Задача 3 (6 баллов)

Однородный ступенчатый блок с радиусами *r* и *R* первоначально находится в покое под действием силы $\overline{F}$ и веса груза, подвешенного на нити (рисунок 23). Определите, во сколько раз должна возрасти сила $\overline{F}$, чтобы сила натяжения нити, к которой подвешен груз, при его подъёме увеличилась вдвое, если известно, что момент инерции блока $I = 2mR^2$, где *m* – масса груза. Трением пренебречь, нити считать невесомыми.

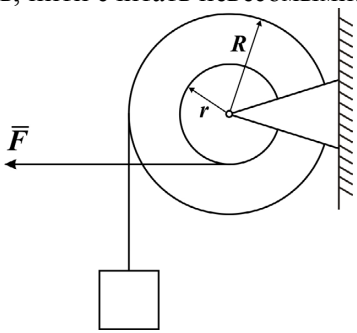

Рис. 23. – Иллюстрация к задаче 3

Решения конкурсных задач вузовского тура олимпиады 2021 года

Задача 1 (6 баллов)

Разобьем плоскую раму на две части по шарниру A (см. рисунок 24). Приложим неизвестные реакции $\overline{X}_O$, $\overline{Y}_O$, $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$ к неподвижным шарнирам O и B. Стоит отметить, что реакции $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ прикладываются к обеим частям системы, и данные реакции для второй части системы направлены в противоположные стороны.

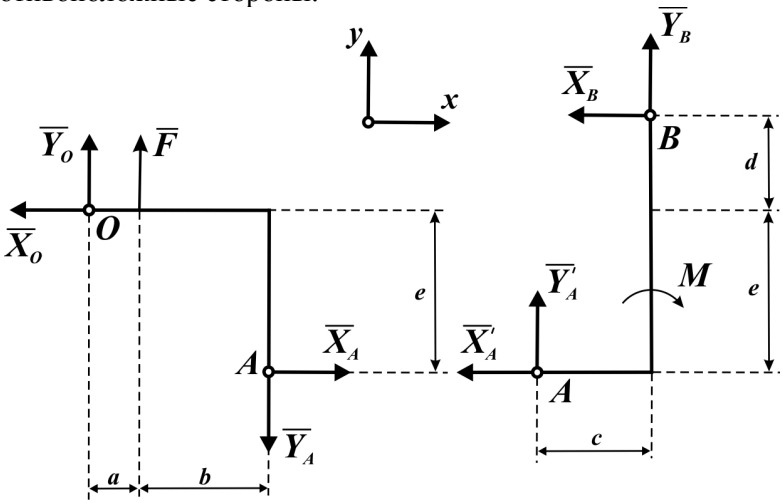

Рис. 24. – Иллюстрация к решению задачи 1

Запишем три уравнения равновесия для части OA:

$$\sum_i X_i = X_A - X_O = 0$$

$$\sum_i Y_i = -Y_A + Y_O + F = 0$$

$$\sum_i m_A\left(\overline{F}_i\right) = X_O \cdot e - F \cdot b - Y_O\left(a+b\right) = 5X_O - 3F - 4Y_O = 0$$

Запишем три уравнения равновесия для части AB:

$$\sum_i X_i = -X'_A - X_B = 0$$

$$\sum_i Y_i = Y'_A + Y_B = 0$$

$$\sum_i m_A\left(\overline{F}_i\right) = X_B\left(e+d\right) + Y_B \cdot c - M = 7X_B + 2Y_B - M = 0$$

Решаем систему шести уравнений с шестью неизвестными. В результате имеем:

$$X_O \approx -4.2 \text{ кН},\ Y_O \approx -20.25 \text{ кН},\ X_B \approx 4.2 \text{ кН},\ Y_B \approx 0.25 \text{ кН}$$

Ответ: $X_O \approx -4.2$ кН, $Y_O \approx -20.25$ кН, $X_B \approx 4.2$ кН, $Y_B \approx 0.25$ кН .

Задача 2 (5 баллов)

При рассмотрении движения кривошипно-шатунного механизма *OAB* можно отметить, что кривошип *OA* участвует во вращательном движении относительно оси, проходящей через точку *O* ортогонально плоскости рисунка, а шатун *AB* участвует в плоско-параллельном движении.

Укажем направления скоростей точек *A* и *B* (см. рисунок 25) и найдем положение мгновенного центра скоростей шатуна *AB*.

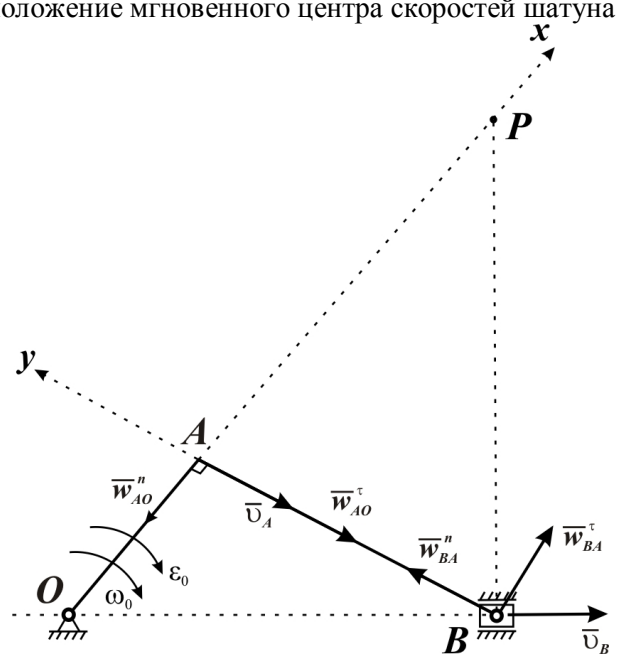

Рис. 25. – Иллюстрация к решению задачи 2

Определим ускорение точки *B*, выбрав в качестве полюса точку *A*, на основе следующего соотношения $\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}_{BA}^{\tau} + \overline{w}_{BA}^{n}$. При этом ускорение точки *A* определим, рассматривая эту точку как элемент кривошипа *OA*, $\overline{w}_A = \overline{w}_{AO}^{\tau} + \overline{w}_{AO}^{n}$. Тогда

$$\overline{w}_B = \overline{w}_{AO}^{\tau} + \overline{w}_{AO}^{n} + \overline{w}_{BA}^{\tau} + \overline{w}_{BA}^{n}$$

Проецируя это соотношение на оси *x* и *y*, представленные на рисунке 25, получим с учетом $\overline{w}_B = 0$

$$x: \quad 0 = -w_{AO}^{n} + w_{BA}^{\tau}$$

$$y: \quad 0 = -w_{AO}^{\tau} + w_{BA}^{n}$$

Тогда

$$w_{AO}^{\tau} = w_{BA}^{n} \text{ или } \varepsilon_0 \cdot b = \omega_{AB}^2 \cdot a$$

В результате

$$\omega_{AB}^2 = \frac{\varepsilon_0 \cdot b}{a} \text{ или } \omega_{AB} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \cdot b}{a}}$$

Далее можно определить скорость точки A как точки кривошипа OA $\upsilon_A = \omega_0 \cdot b$ или как точки шатуна AB с учетом того, что точка P – это мгновенный центр скоростей, $\upsilon_A = \omega_{AB} \cdot AP$.

Тогда

$$\omega_0 = \frac{\omega_{AB} \cdot AP}{b}$$

Из геометрии задачи (см. рисунок 25) определяем, что $AP = a^2/b$.

Тогда

$$\omega_0 = \frac{\omega_{AB} \cdot a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \cdot b}{a}}$$

Тогда величина нормального ускорения точки A: $w_{AO}^{n} = \omega_0^2 \cdot b = \dfrac{\varepsilon_0 \cdot a^3}{b^2}$.

В результате величина полного ускорения точки A:

$$w_A = \sqrt{\left(w_{AO}^{n}\right)^2 + \left(w_{AO}^{\tau}\right)^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2 \cdot a^6}{b^4} + \varepsilon_0^2 \cdot b^2} = \frac{\varepsilon_0}{b^2}\sqrt{a^6 + b^6}$$

Для определения углового ускорения шатуна AB воспользуемся соотношением вида:

$$x: \quad 0 = -w_{AO}^{n} + w_{BA}^{\tau}$$

Тогда $w_{AO}^{n} = w_{BA}^{\tau}$ или $\omega_0^2 \cdot b = \varepsilon_{AB} \cdot a$. Таким образом $\varepsilon_{AB} = \dfrac{\varepsilon_0 \cdot a^2}{b^2}$.

Ответ: $\varepsilon_{AB} = \dfrac{\varepsilon_0 \cdot a^2}{b^2}$, $w_A = \dfrac{\varepsilon_0}{b^2}\sqrt{a^6 + b^6}$.

Задача 3 (6 баллов)

Для определения силы $\overline{F}$ в начальный момент времени, когда система неподвижна, запишем сумму моментов всех сил относительно центра ступенчатого блока (рисунок 26):

$$\sum_i m_O\left(\overline{F}_i\right) = mgR - Fr = 0 \Rightarrow F = \frac{mgR}{r}.$$

Чтобы сила натяжения нити увеличилась вдвое, груз должен иметь ускорение подъёма, равное по величине ускорению свободного падения. Выразим силу $\overline{F}$ через это ускорение. Учитывая кинематическую связь углового ускорения блока и ускорения груза, запишем теорему об изменении кинетического момента относительно оси z, проходящей через центр блока перпендикулярно плоскости рисунка и направленной к нам:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e$$

Кинетический момент системы относительно этой оси Oz

$$K_z = -m\dot{x}R - I_z\omega = -m\dot{x}R - 2mR^2\frac{\dot{x}}{R} = -3mR\dot{x}$$

где учтено, что угловая скорость блока $\omega = \dot{x}/R$ и момент интерции его относительно оси Oz $I_z = 2mR^2$. Момент внешних сил относительно этой оси

$$M_z^e = mgR - F \cdot r$$

Подставляя значения K_z и M_z^e в теорему об изменении кинетического момента относительно оси Oz, получим

$$-3mR\ddot{x} = mgR - F \cdot r$$

Отсюда находим

$$F = \frac{mgR + 3mR\ddot{x}}{r}$$

Принимая во внимание, что при подъеме груз имеет ускорение, равное по величине ускорению свободного падения $\left(\ddot{x} = g\right)$, получаем

$$F = 4mgR/r$$

Сравнивая это значение с тем, что было получено при равновесии системы, видим, что сила $\overline{F}$ должна увеличиться в 4 раза.

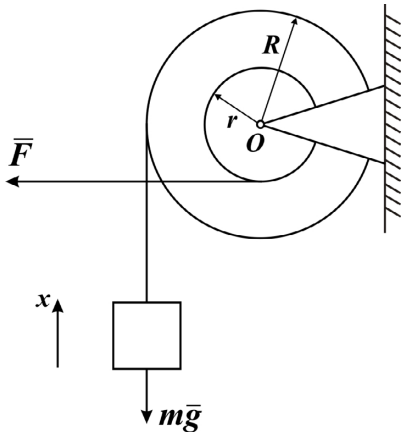

Рис. 26. – Иллюстрация к решению задачи 3

Ответ: сила $\overline{F}$ должна увеличиться в 4 раза.

Конкурсные задачи межвузовского тура олимпиады 2021 года (задачи от ТГУ)

Задача 1 (4 балла)

Однородный шар удерживается на стене с помощью нити, как показано на рисунке 27. Определите коэффициент трения шара о стену.

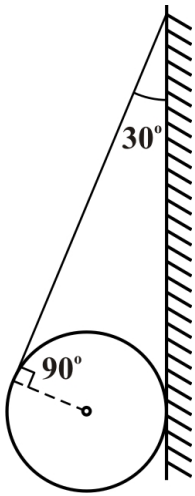

Рис. 27. – Иллюстрация к задаче 1

Задача 2 (4 балла)

Груз весом 130 Н удерживается с помощью двух тросов, перекинутых через блоки и закрепленных на разных расстояниях от центра тяжести (рисунок 28). К первому тросу приложена сила F_1, равная 70 Н. Косинус угла α между этим тросом и вертикалью составляет 5/7. Определите силу, приложенную ко второму тросу. Трением тросов о блоки пренебречь.

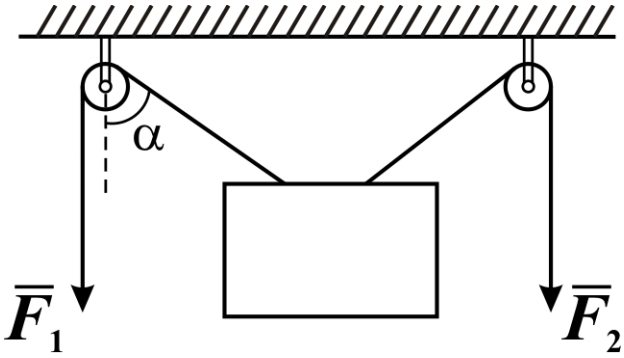

Рис. 28. – Иллюстрация к задаче 2

Решения конкурсных задач межвузовского тура олимпиады 2021 года (задачи от ТГУ)

Задача 1 (4 балла)

Поскольку в задаче имеется 4 неизвестных: масса шара, сила реакции стены, коэффициент трения и сила натяжения нити, трех стандартных условий равновесия недостаточно (рисунок 29). В данном случае необходимо записать сумму моментов таким образом, чтобы исключить остальные неизвестные и составить уравнение для определения коэффициента трения. Необходимо иметь в виду, что $F_f = f \cdot N$. Запишем сумму моментов относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка:

$$\sum_k m_O\left(\overline{F}_k\right) = f \cdot N \cdot R - T \cdot R = 0$$

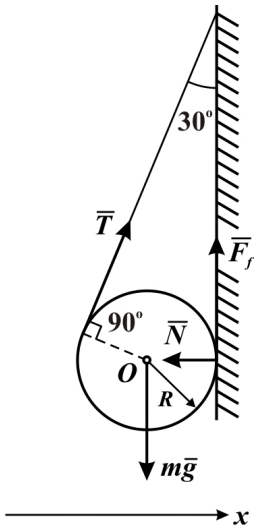

Рис. 29. – Иллюстрация к решению задачи 1

Чтобы выразить коэффициент трения нужно записать соотношение, связывающее реакции N и T. Данное равенство

можно получить, спроецировав сумму всех сил, приложенных к телу, на ось x: $T \cdot \sin(30°) - N = 0 \Rightarrow N = T \cdot \sin(30°)$.

Тогда $f \cdot T \cdot \sin(30°) \cdot R - T \cdot R = 0 \Rightarrow f \cdot \sin(30°) = 1 \Rightarrow f = 2$

Ответ: $f = 2$.

Задача 2 (4 балла)

Запишем сумму проекций сил, приложенных к телу, на оси координат (рисунок 30). Принимая во внимание пренебрежимо малое влияние трения в блоках, силу натяжения троса можно приравнять к приложенной силе, тогда проецируя все силы на оси x и y, получим

$$x:\ \ T_2 \cdot \sin(\beta) - T_1 \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$y:\ \ T_1 \cdot \cos(\alpha) + T_2 \cdot \cos(\beta) - mg = 0$$

Выразим из каждого уравнения тригонометрические функции неизвестного угла β и запишем универсальное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = \left(\frac{T_1}{T_2}\sin(\alpha)\right)^2 + \left(\frac{mg - T_1\cos(\alpha)}{T_2}\right)^2 = 1$$

откуда $T_2 = \sqrt{\left(T_1\sin(\alpha)\right)^2 + \left(mg - T_1\cos(\alpha)\right)^2} = 20\sqrt{22}$ Н

Ответ: $F_2 = 20\sqrt{22}$ Н

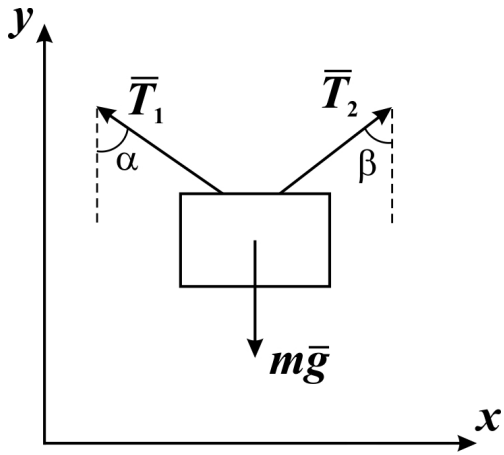

Рис. 30. – Иллюстрация к решению задачи 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеремет М.А., Штанько В.А. Основы курса теоретической механики. Том 1. Кинематика. Статика. – Томск: Томский государственный университет, 2012. – 214 с.
2. Шеремет М.А., Штанько В.А. Основы курса теоретической механики. Том 2. Динамика. – Томск: Томский государственный университет, 2012. – 336 с.
3. Томилов Е.Д. Теоретическая механика. – Томск: ТГУ, 1966. – Ч. 1. – 300 с.
4. Томилов Е.Д. Теоретическая механика. – Томск: ТГУ, 1970. – Ч. 2. – 317 с.
5. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1975. – Т. 1. – 512 с.
6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1975. – Т. 2. – 608 с.
7. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть 1. Кинематика, статика, динамика материальной точки. – СПб.: Изд-во «Лань», 2009. – 480 с.
8. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть 2. Динамика системы материальных точек. – СПб.: Изд-во «Лань», 2009. – 336 с.
9. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1977. – Т. 1. – 479 с.
10. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 544 с.
11. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1982. – Т. 1. – 352 с.
12. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М.: Изд-во «Дрофа», 2006. – Т. 2. – 720 с.
13. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1998. – 416 с.
14. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1981. – 480 с.
15. Нарута Т.А., Лободенко Е.И. Олимпиадные задачи по теоретической механике. – Санкт-Петербург: Лань, 2017. – 112 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Конкурсные задачи вузовского тура олимпиады 2019 года …...….. 3
Решения конкурсных задач вузовского тура олимпиады 2019 года …….... 5
Конкурсные задачи межвузовского тура олимпиады 2019 года (задачи от ТГУ) ……....……. 12
Решения конкурсных задач межвузовского тура олимпиады 2019 года (задачи от ТГУ) ……....…… 14
Конкурсные задачи вузовского тура олимпиады 2020 года ….....…. 22
Решения конкурсных задач вузовского тура олимпиады 2020 года ……. 24
Конкурсные задачи вузовского тура олимпиады 2021 года …....….. 31
Решения конкурсных задач вузовского тура олимпиады 2021 года ……. 33
Конкурсные задачи межвузовского тура олимпиады 2021 года (задачи от ТГУ) ……....…….. 39
Решения конкурсных задач межвузовского тура олимпиады 2021 года (задачи от ТГУ) ……...……. 41
Литература ……....…….. 44

Учебное издание

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
2019–2021 гг.

СОСТАВИТЕЛИ: В.А. Штанько, Н.С. Бондарева, Д.О. Диль,
И.В. Мирошниченко, М.А. Шеремет

Издание вышло в свет в авторской редакции

Подписано к печати 29.12.2021 г. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Печ. л. 2,8. Усл. печ. л. 2,6.
Тираж 30 экз. Заказ № 4904.

Отпечатано на оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)–52-98-49
Сайт: http://publish.tsu.ru
E-mail: rio.tsu@mail.ru