МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ Физико-технический факультет

### Е.С. Марченко, А.А. Козулин, А.В. Ветрова, Г.А. Байгонакова

### Моделирование напряженно-деформированного состояния при оценке механического поведения конструкций из никелида титана

Учебно-методическое пособие

Томск Издательство Томского государственного университета 2021 Марченко Е.С., Козулин А.А., Ветрова А.В., Байгонакова Г.А. M30 Моделирование напряженно-деформированного состояния при оценке механического поведения конструкций из никелида титана : учеб.-метод. пособие. – Томск: Издательство Томского государственного университета, 2021. – 80 с. ISBN 978-5-907442-51-1

В учебном пособии изложена информация в виде краткой теории об основных особенностях фазовых переходов и механического поведения материалов на основе никелида титана, обладающих эффектом памяти формы и сверхэластичности. Теория подкреплена собственными экспериментальными данными авторов и результатами вычислительных экспериментов.

Для студентов физико-математических и физико-технических специальностей.

> УДК 538.911 ББК 34.2:5

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией физикотехнического факультета.

Протокол № 3 от «26» ноября 2021 г.

Председатель МК ФТФ: д-р ф.-м.н., проф. В.А. Скрипняк

© Марченко Е.С., Козулин А.А.,
 Ветрова А.В., Байгонакова Г.А., 2021
 © Томский государственный университет, 2021

ISBN 978-5-907442-51-1

### ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие разработано на основе лекций, которые авторы на протяжении ряда лет читают студентам физико-технического факультета Томского государственного университета, обучающихся в бакалавриате и магистратуре по основной образовательной программе «Прикладная механика» по направлениям «Медицинское материаловедение», «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг» и удовлетворяющих требованиям государственного образовательного стандарта. В пособии необходимый теоретический материал дополнен результатами собственных экспериментальных работ авторов и их оригинальной интерпретацией с примерами использования подходов вычислительного эксперимента для определения напряженно-деформированного состояния, функциональных свойств материалов и изделий на основе никелида титана.

Первая глава является вводной и содержит информацию о фазовых переходах в никелиде титана инициализированных силовыми и температурными воздействиями с подробным описанием изменения кристаллической структуры при превращениях. Отмеченные особенности структуры и фазовые переходы ведут к появлению в материале эффекта памяти формы и сверхэластичности.

Во второй главе приведена математическая постановка, используемая при моделировании эффекта сверхэластичности, где показана возможность определения параметров модели из экспериментальных данных по нагрузке и разгрузке образцов из материалов, обладающих эффектом сверхэластичности. На основе рассмотренной математической постановки приведен пример моделирования эффекта сверхэластичности при оценке функциональных свойств и механического поведения исполнительного механизма привода, изготовленного из никелида титана. Представленный результат моделирования иллюстрирует нелинейное механическое поведение механизма из-за особенностей материала при термомеханическом воздействии.

Третья глава посвящена описанию экспериментальных работ по оценке свойств металлотрикотажа специального медицинского назначения, изготовленного из проволоки никелида титана. Анализ экспериментальных данных показал, что исследуемый трикотаж обладает нелинейным механическим поведением при однократном и многократных циклах «нагрузка-разгрузка». Отмечено, что кривая разгрузки не совпадает с кривой нагрузки, образуя петлю гистерезиса, при этом конечные деформации являются полностью обратимыми. При многократном нагружении заметен эффект размягчения материала. Авторами исследования отмечено, что подобное механическое поведение метоллотрикотажа идентично механическому поведению гиперупругих резиноподобных материалов и биологических тканей. Поэтому для описания их механического поведения предложено использовать определяющие уравнения гиперупругости. Помимо получения и интерпретации экспериментальных результатов в третьей главе описана математическая постановка и методика определения констант гиперупругих определяющих уравнений, наиболее часто используемых в моделировании.

В пособии все аспекты касающиеся моделирования и анализа численных данных относятся к использованию программного комплекса Ansys/Mechanical. Примеры проведения анализа, задания свойств материалов, получения результатов реализованы через язык параметрического дизайна (APDL). Подразумевается, что читатель обладает фундаментальными знаниями о методе конечных элементов, знаком с архитектурой программного комплекса и этапами вычислительного эксперимента. Теоретическая часть поддержана примерами определения свойств материалов для нескольких видов определяющих уравнений для описания механического поведения материалов. Показан алгоритм методики определения параметров уравнений на основе экспериментальных данных.

### 1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МАРТЕНСИТНЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

### 1.1. Мартенситные превращения

Некоторые металлические сплавы проявляют необычное поведение при механической нагрузке или при изменении температуры. Эти сплавы широко известны как сплавы с памятью формы, наиболее распространенным среди которых является эквиатомный сплав никеля и титана. Они способны претерпевать большие обратимые деформации при нагрузке и термических циклах. Такие уникальные физические явления обусловлены их природной способностью претерпевать обратимые изменения кристаллографической структуры в зависимости от температуры и напряжения [1–3]. Эти изменения можно интерпретировать как термоупругие обратимые мартенситные превращения между кристаллографической более упорядоченной исходной фазой, аустенитом (A), до кристаллографической менее упорядоченной фазы продукта, мартенсита (M) [4–6].

Мартенситные превращения (МП) представляют собой сдвиговые бездиффузионные превращения, заключающиеся в перестройке кристаллической решетки, в основе которого лежит кооперативный переход атомов из одной фазы в другую на расстояния, не превышающие межатомные с сохранением когерентности границ [4]. Под кооперативностью понимается согласованный, упорядоченный характер движения большой совокупности атомов, в результате которого результирующая фаза наследует химический состав, дальний и ближний порядок исходной фазы. Мартенситные превращения в ряду фазовых превращений осуществляются кристаллографическим сдвигом в отличие от дислокационного скольжения и механического двойникования, поэтому приводят к макроскопическому формоизменению кристалла и объемной деформации [7–9].

Первые наблюдения за мартенситными структурами были сделаны Адольфом Мартенсом около 1890 года, феноменологическая

теория мартенситной кристаллографии была независимо сформулирована двумя группами исследователей (Боулз и МакКензи) и (Векслер, Либерман, Рид) [10, 11]. Основное предположение этой теории состояло в том, что граница аустенит – мартенсит должна быть с нулевым искажением в макроскопическом смысле, чтобы минимизировать полную энергию деформации.

Термоупругие МП отличаются от нетермоупругих механизмом обратного превращения [2, 4, 12]. В случае термоупругих МП, при охлаждении происходит непрерывный рост мартенситных пластин и зарождение новых пластин до тех пор, пока мартенситные пластины не начинают сталкиваться между собой или с границами зерен. Рост кристаллов мартенсита можно остановить и продолжить при любом этапе, понижая температуру или увеличивая напряжения. Обратное превращение при нагреве осуществляется посредством сокращения и коллапса мартенситных кристаллов, зародившихся и выросших при прямом превращении, т.е. путем обратного движения границы мартенсит – исходная фаза. Восстановление кристаллической структуры, и как следствие, формы является следствием такого механизма обратного превращения [2, 4]. В нетермоупругих МП неподвижная межфазная граница не может двигаться в обратном направлении при нагреве, но вместо этого внутри неподвижных мартенситных пластин зарождается исходная фаза [12, 13]. Таким образом, термоупругий характер МП определяется такими факторами, как сохранение когерентности и подвижности мартенситных границ, их способность к возвратному движению; стимулирование обратного превращения возвращающей силой; снижение симметрии при прямом превращении, повышение при обратном превращении; вторичная деформация посредством двойникования или разбиения кристалла на домены различных ориентационных вариантов.

Фазы, вовлеченные в МП, упоминаются как аустенит A и мартенсит M, каждая из которых имеет разную кристаллическую структуру и разные свойства [1, 14]. Аустенит A является исходной фазой и обладает высокой структурной энергией (а также энтропией) по сравнению с энергией мартенситной решетки. Аустенитная фаза стабильна только при высокой температуре, в то время как мартенсит M с пониженной симметрией, структурной энергией и энтропией стабилизируется при более низкой температуре.

На сегодняшний день сложились следующие обозначения продуктов МП в сплавах на основе TiNi: B2, R, B19, B19'. Высокотемпературная фаза, аустенит, является кубической и похожа на структуру B2 CsCl. Низкотемпературная фаза, мартенсит, имеет сложную моноклинную (B19' мартенсит), орторомбическую (B19 мартенсит) или ромбоэдрическую (R фаза) структуру в зависимости от системы сплавов и путей превращения [1, 2, 14]. Схематические ячейки B2, R, B19, и B19' показаны на рис. 1.1.



Рис. 1.1. Кристаллические структуры фаз В2, R, В19, и В19'

Структура исходной фазы B2 сплава TiNi является упорядоченной структурой на основе ОЦК решетки типа B2 [15]. Решетка Браве структуры B2-кубическая  $\Gamma_c$ , пространственная группа  $O_h^1 = Pm3m$ , параметр решетки a = 0,3015 нм [1].

Элементарная ячейка R-фазы описывается как ромбоэдрическая с параметрами a = 0,903 нм и  $\alpha = 89,3^{\circ}$  ( $a_{B2} = 0,3015$  нм), имеет пространственную группу P3 [15–19]. R-фаза является промежуточной фазой между B2 и B19' и образуется растяжением основной кубической решетки вдоль диагонального направления <111> [20, 21].

Решетка Браве структуры В19 – орторомбическая  $\Gamma_0$ , пространственная группа  $D_{2h}^5(Pmma)$ . Она является продуктом МП из высокотемпературной упорядоченной фазы со структурой В2 [21]. Симметрия фазы В19 снижается до ромбической. Параметры решетки заметно зависят от состава, но один из них близок к параметру *a*, а два других к  $a\sqrt{2}$  исходной В2 структуры [22].

Мартенситная фаза B19' имеет моноклинную симметрию, параметры решетки: a = 0,2889 нм, b = 0,4126 нм, c = 0,4622 нм,  $\beta = 96,8^{\circ}$  [23] и пространственную группу P2<sub>1</sub>/m [24]. B19' образуется на второй стадии при охлаждении из промежуточной фазы, известной как R-фаза, с тригональной симметрией. Структура фазы B19' отличается от B19 однородной деформацией, снижающей симметрию до моноклинной [1, 23]. B19' не наблюдается ни в одном сплаве, кроме сплавов на основе TiNi, хотя большинство сплавов с  $\beta$ -фазой с упорядоченной структурой B2 в исходной структуре обычно превращаются в структуры с длинным периодом упорядочения.

В сплавах на основе TiNi фазовый переход может проходить по одному из путей превращения: B2↔R↔B19'; B2↔B19'; B2↔B19, воторые следуют соотношению группа – под-группа, что значит группа симметрии низкотемпературной фазы является подгруппой группы высокотемпературной фазы [1, 25].

Межфазные границы кристаллов мартенсита и аустенита образуют габитусную плоскость [2, 10, 14]. Такая инвариантная кристаллографическая плоскость в процессе МП остается минимально искаженной. Межфазная граница может быть когерентной, полукогерентной и некогерентной (рис. 1.3, *a*–*в*). В случае когерентной границы плоскость габитуса является общей для решеток аустенита и мартенсита, ряды и плоскости обеих решеток не прерываются на поверхности раздела, а лишь изменяют направление при переходе от одного кристалла к другому (рис. 1.3, *a*).



Рис. 1.2. Схематическое изображение элемента исходной фазы и мартенсита с неизменной плоскостью в качестве габитуса [26]



Рис. 1.3. Схематическое изображение границы между кристаллическими фазами: *а* – полностью когерентная граница; *б* – полукогерентная граница; *в* – полностью некогерентная граница [2]

Когерентные границы наблюдаются при термоупругих МП. В реальном кристалле в основном наблюдаются полукогерентные и/или некогерентные границы. Если граница полукогерентная, то решетки соприкасающихся кристаллов упруго деформированы таким образом, что на одних участках границы наблюдается когерентность, а на других участках постепенно накапливается несоответствие, которое периодически устраняется за счет возникновения дислокаций (рис. 1.3,  $\delta$ ). Некогерентная граница – граница между двумя кристаллами, которая разупорядочена и имеет некоторую толщину, непрерывность рядов и плоскостей решеток на поверхности раздела нарушена (рис. 1.3,  $\epsilon$ ). Некогерентные границы наблюдаются при нетермоупругом МП.

Закономерность перестройки решетки при МП вытекает из строгих кристаллогеометрических соотношений между кристаллическими структурами аустенитной и мартенситной фаз. Кристаллографическое превращение аустенита в мартенсит в основном состоит из двух частей: искажения Бэйна и инвариантного сдвига в решетке [26]. Искажение Бэйна включает в себя деформацию решетки и связано с кооперативным движением группы атомов в исходной фазе для создания новой кристаллической структуры. С другой стороны, инвариантный сдвиг – это шаг аккомодации, связанный с двойникованием решетки внутри нового кристалла.

Во время прямого превращения аустенит превращается в термоупругий мартенсит, структура которого имеет много вариантов вдоль габитусной плоскости [5, 13]. Могут возникнуть 24 кристаллографически ориентированные мартенситные пластины. В результате эти эквивалентные кристаллы мартенсита различной ориентации образуют фазу продукта. Эти варианты приспособлены таким образом, что общая деформация материала сводится к минимуму, и, следовательно, упоминаются как самоакомадационные. По этой причине макроскопическая форма материала не изменится, хотя и будет изменена его кристаллическая структура. При нагреве и приложении внешних напряжений количество образованных вариантов мартенсита уменьшается, вплоть до возникновения одной (в идеале), при которой наблюдается максимальная деформация.



Рис. 1.4. Схема перестройки кристаллической решетки при мартенситных превращениях

При обратном фазовом превращении восстанавливается высокосимметричная аустенитная фаза, которая имеет только одну возможную ориентацию. Это связано с тем, что образующаяся при охлаждении и приложении внешних напряжений мартенситная фаза имеет более низкую симметрию, чем аустенитная.

Фазовый переход в материале происходит в диапазоне температур, который может меняться в зависимости от состава материала. Характеристические температуры  $M_s$ ,  $M_f$ ,  $A_s$ ,  $A_f$  определяют температурные интервалы изменения деформации и обратимого мартенситного превращения.

*M<sub>s</sub>* – температура начала прямого МП, которая представляет собой температуру, при которой аустенитная фаза начинает превращаться в мартенситную фазу.

*M<sub>f</sub>* – температура конца прямого МП, которая представляет собой температуру, при которой аустенитная фаза полностью превращается в мартенситную фазу.

*A<sub>s</sub>* – температура начала обратного МП, при которой мартенситная фаза начинает превращаться в аустенитную фазу.  $A_f$  – температура конца обратного МП, при которой мартенситная фаза полностью превращается в аустенитную фазу.

Существуют различия между МП, вызванными напряжением и изменением температуры, которые влияют на величину деформации превращения [29] (рис. 1.5).



Рис. 1.5. Диаграмма фазовых переходов для сплавов с памятью формы [28]

При приложении напряжения МП может быть вызвано в любом направлении из-за формирования мартенсита в нескольких вариантах. Единственным критерием является то, что приложенное напряжение должно быть достаточным для преодоления внутренних сопротивлений фазовому превращению и в то же время ниже предела текучести матрицы, иначе произойдет пластическая деформация. Механизм позволяет структуре накапливать изменения решетки, чтобы выровняться в крайнем единственном направлении. Во время термически индуцированного фазового превращения при постоянной приложенной нагрузке достигнутая деформация превращения сильно зависит от величины нагрузки. Если сплав с памятью формы охладить ниже начальной температуры мартенсита без приложенной нагрузки, полученный мартенсит будет самоаккомадирован и деформация макроскопического превращения не будет наблюдаться. Когда механическая нагрузка прикладывается во время охлаждения, при фазовом превращении образуется деформированный мартенсит и наблюдается макроскопическое деформационное превращение.



Рис. 1.6. Кристаллические структуры мартенсита и аустенита для NiTi SMA (*a*) и псевдоупругое поведение, наблюдаемое в NiTi SMA (*b*) [30, 31]

### 1.2. Эффект сверхэластичности в сплавах TiNi

Эффект памяти формы и сверхэластичность сплавов на основе TiNi целесообразно объединить в термин термомеханический возврат неупругой деформации при нагреве и снятии напряжений, свойственный материалам, претерпевающим термоупругие МП. Оба поведения являются следствием обратимой природы МП, достигаемого за счет движения границ двойников, т.е. переориентации мартенситных вариантов [32]. К основным видам механического возврата относится явление сверхэластичности [33, 34].

Эффект сверхэластичности (СЭ) заключается в возвращении деформированного материала к исходной форме при снятии напряжений, вызвавших деформацию. От упругого поведения его отличает величина восстанавливаемой деформации, достигающая 10 % и более, и нелинейный характер кривой деформации [33]. Материал, испытывающий большие неупругие деформации при нагрузке, может вернуться к своей первоначальной форме при определенном температурном разгрузке интервале В  $(M_S < A_f < T < M_d)$ . Происхождением эффекта сверхэластичности является МП, вызванное напряжением. Другими словами, приложение напряжения оказывает такое же влияние на превращение, что и снижение температуры. Это можно объяснить, используя уравнение Клаузиуса-Клапейрона, которое можно записать в виде [2, 34]:

$$d\sigma^{A-M} = \frac{\Delta H^{A-M}}{\varepsilon^{A-M}T_0} dT,$$

где  $\sigma^{A-M}(T)$  – приложенное напряжение, которое может вызвать МП при температуре *T*;  $\varepsilon^{A-M}$  – деформация, соответствующая полному превращению;  $\Delta H$  – энтальпия превращения, а  $T_0$  – температура, при которой аустенит и мартенсит имеют одинаковую свободную энергию. Соответственно,  $\sigma^{A-M}(T) = 0$  при  $M_S$  и монотонно возрастает с ростом температуры. Температура, при которой  $\sigma^{A-M}(T)$  равна критическому напряжению скольжения, обозначается как  $M_d$ , где основным механизмом является деформация скольжением. Материал не может вести себя сверх-эластично, если его температура  $M_d$  не выше, чем  $A_f$ . Таким об-

разом, температуры  $M_d$  и  $A_f$  становятся верхней и нижней границами для СЭ. С микроскопической точки зрения, приложенное напряжение вызывает зарождение и рост определенных вариантов мартенсита, которые могут обеспечить максимальную деформацию превращения вдоль направления напряжения для снятия упругой деформации в отличие от случая с эффектом памяти формы [35]. Что схематически представлено на рис. 1.7. Из-за наличия напряжения во время превращения предпочтительнее будут формироваться определенные варианты мартенсита, а в конце превращения мартенсит, вызванный напряжением, будет состоять из единственного варианта раздвоенного мартенсита. Во время разгрузки происходит обратное превращение в аустенит из-за нестабильности мартенсита при  $T > A_f$  в отсутствие напряжения. Это восстановление высоких значений деформации при разгрузке дает характерную петлю гистерезиса.



Рис. 1.7. СЭ RMZ [36]

Сверхэластичный сплав TiNi деформируется нелинейным образом с различными стадиями и значительной величиной механического гистерезиса. Рис. 1.8 представляет обобщенную схему зависимости напряжения – деформации с происходящими основными структурными изменениями для сплавов TiNi в условиях одноосного растяжения [37]. Первоначально напряжение вызывает только упругие искажения решетки аустенита на участке *о-а*. При некотором критическом уровне напряжения аустенит становится нестабильным и начинает формироваться мартенсит, индуцированный напряжением. МП распространяется в образце при постоянном напряжении (плато *a-b*), где сосуществуют две фазы. Разгрузка в пределах области плато первоначально является упругой и представляет смесь из мартенсита и аустенита. Разгрузка с конца плато (точка *b*) приводит, по крайней мере, в начале, к упругой разгрузке преимущественно мартенситной фазы. Подобно нестабильности аустенита в процессе нагружения, мартенсит становится нестабильным, когда напряжение падает ниже определенного критического уровня (точка *b'*, зарождение аустенита), и материал начинает снова превращаться в аустенит. При разгрузке обратное превращение приводит к другому плато напряжений (*b'-a'*), на котором сосуществуют аустенит и мартенсит, а образец испытывает макроскопическое сокращение.



Рис. 1.8. Диаграмма напряжение – деформация TiNi и схемы связанных микроструктурных изменений [38]

В точке а' материал вернулся в исходную фазу, и дальнейшая разгрузка следует по первоначальному пути загрузки. Эта важная характеристика материала известна как СЭ. К концу плато напряжений (a-b) большая часть материала превратилась в мартенсит, но в поликристалле все еще остаются некоторые остаточные фазы аустенита, которые трансформируются при более высоком уровне напряжения. За пределами точки b увеличение деформации требует увеличения напряжения (участок b-c-d). Первоначально основным механизмом деформации является упругое искажение решеток мартенсита, сопровождающееся постепенным преобразованием остаточного аустенита. При деформации, примерно в точке c, напряжение достигло достаточно высокого уровня, чтобы решетки мартенсита начали скользить. Дальнейшее нагружение соответствует необратимой деформации мартенсита.

Оба явления, как ЭПФ и СЭ, лучше всего объяснить с помощью схематической диаграммы, показанной на рис. 1.9 [39]. В обоих случаях первоначальная форма восстанавливается, и разница между ними определяется только температурой деформации. В случае СЭ деформация осуществляется при более высокой температуре в аустенитной фазе, а в случае ЭПФ деформация осуществляется при более низкой температуре в мартенситной фазе. Условие наблюдения СЭ и эффекта памяти формы, таким образом, зависит от температуры испытания, что продемонстрировано на рис. 1.9.



Рис. 1.9. Схематическое представление для термомеханических условий эффекта памяти формы и сверхэластичности [39]

Линия с положительным наклоном на рис. 1.9 представляет критическое напряжение, вызывающее МП, а линии с отрицательным наклоном представляют критическое напряжение для скольжения. Заштрихованная область – это область, в которой напряжение приложено выше  $A_f$ . Мартенситное превращение, вызванное напряжением, происходит при напряжении, превышающем критическое напряжение для индукции мартенсита. При разгрузке мартенсит превращается обратно в аустенит, поскольку мартенсит нестабилен над  $A_f$  в отсутствие напряжения. Если напряжение применяется при температурах ниже  $A_S$ , мартенсит остается деформированным после разгрузки, и деформация может быть восстановлена только путем нагревания образца выше  $A_f$ . Следовательно, в области между  $A_S$  и  $A_f$  сосуществуют как СЭ, так и ЭПФ.

### Контрольные вопросы

1. Какие воздействия порождают мартенситные превращения в сплавах с памятью формы?

2. Что понимается под кооперативностью перехода атомов из одной фазы в другую?

3. В каких фазовых состояниях может находиться сплав никелида титана?

4. Чем характеризуется габитусная плоскость между кристаллами мартенсита и аустенита?

5. Что такое характеристические температуры в отношении к мартенситному превращению?

6. При каких условиях нагружения возможны фазовые превращения в никелиде титана?

7. В чем заключается эффект сверхэластичности?

8. Какие эффекты можно интерпретировать с использованием уравнения Клаузиуса-Клапейрона?

9. Какие условия нагружения благоприятны для одновременного проявления сверхэластичности и эффекта памяти формы?

10. Какие особенности механического поведения характерны для сверхэластичных материалов с эффектом памяти формы, объяснить с использованием деформационной кривой?

### 2. МОДЕЛИ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ОПИСАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СВЕРХЭЛАСТИЧНОСТИ

Континуальные модели материалов (также называемые определяющими соотношениями) представляют собой математическое представление реакции материала на приложенную нагрузку. Типичные классы моделей включают отношения между напряжением – деформацией, градиентом теплового потокатемпературы, а также могут включать специальные свойства, такие как внутреннее трение и реакция из-за изменений в физической среде, таких как тепловое расширение и набухание, фазовый переход.

В этом разделе содержится информация о поведении и применении определяющих уравнений для описания механического поведения сплавов, обладающих эффектом сверхэластичности, включая подробные сведения о соотношении нагрузки – разгрузки и фазовом переходе, а также информацию, необходимую для использования моделей материалов этого класса в инженерном анализе.

Информация предоставлена для опытных пользователей программного продукта Ansys/Mechanical, разбирающихся в принципах работы и моделирования с использованием внутреннего языка программирования APDL. Для понимания алгоритма подключения определяющих уравнений и задания свойств материалов используются служебные слова, отмеченные в тексте серыми блоками.

### 2.1. Модель сверхэластичного поведения

Для понимания эффекта сверхэластичности достаточно взглянуть схематическую диаграмму, представленную на рис. 2.1. Из диаграммы видно, что материал при нагрузке способен деформироваться нелинейно на большие степени без возникновения остаточных деформаций при разгрузке.

## 2.1.1. Определяющее уравнение для описания сверхэластичного поведения

С макроскопической точки зрения механизмы фазового превращения, участвующие в сверхупругом поведении, следующие:

- 1. От аустенита к мартенситу (А→М);
- 2. Мартенсит в аустенит  $(M \rightarrow A)$ ;
- 3. Переориентация мартенсита (М→М).



Рис. 2.1. Типичная деформационная кривая для сверхэластичного поведения сплава

Здесь рассматриваются два фазовых превращения:  $A \rightarrow M$  и  $M \rightarrow A$ . Материал состоит из двух фаз: аустенита (A) и мартенсита (M). Вводятся две внутренние переменные: доля мартенсита ( $\xi_M$ ) и доля аустенита ( $\xi_A$ ). Одна из них является зависимой переменной, и предполагается, что они удовлетворяют соотношению, выраженному как:

$$\xi_M + \xi_A = 1.$$

В качестве независимой внутренней компоненты здесь выбрана  $\xi_M$ .

Предполагается, что поведение материала изотропно. Зависимость фазового превращения от давления моделируется использованием функции нагрузки Друкера-Прагера, которая выглядит следующим образом:

$$F = q + 3\alpha p,$$
  

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}S:S},$$
  

$$S = \sigma - p\mathbf{1},$$
  

$$p = \frac{1}{3}\sigma:\mathbf{1},$$

где α – параметр материала; σ – напряжения; **1** – единичный тензор; *S* – девиаторная часть тензора напряжений.

В этом случае выделение доли мартенсита  $\xi_M$  определяется следующим образом:

$$\dot{\xi}_{S} = \begin{cases} -H^{AM}(1-\xi_{M})\frac{\dot{F}}{F-R_{f}^{AM}} & A \to M \text{ переход} \\ \\ H^{MA}\xi_{M}\frac{\dot{F}}{F-R_{f}^{MA}} & M \to A \text{ переход} \end{cases}$$

где

$$\begin{split} R_{f}^{AM} &= \sigma_{f}^{AM} (1 + \alpha), \\ R_{f}^{MA} &= \sigma_{f}^{MA} (1 + \alpha), \\ H^{AM} &= \begin{cases} 1, & \text{если} \begin{cases} R_{M}^{AM} < F < R_{f}^{AM} \\ \dot{F} > 0 \end{cases}, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}, \\ H^{MA} &= \begin{cases} 1, & \text{если} \begin{cases} R_{f}^{MA} < F < R_{M}^{MA} \\ \dot{F} < 0 \end{cases}, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}, \\ R_{M}^{AM} &= \sigma_{S}^{AS} (1 + \alpha), \end{cases} \end{split}$$

$$R_M^{MA} = \sigma_M^{MA} (1 + \alpha),$$

где  $\sigma_f^{AM}$ ,  $\sigma_f^{MA}$ и  $\sigma_M^{AM}$ ,  $\sigma_M^{MA}$  параметры материала, которые определяются в соответствии с графиком, представленным на рис. 2.2.



Рис. 2.2. Идеализированная диаграмма напряжение – деформация для сверхэластичного поведения при растяжении и сжатии

Параметр материала  $\alpha$  характеризует отклик материала при растяжении и сжатии. Если поведение при растяжении и сжатии одинаково, то  $\alpha = 0$ . Для одноосного эксперимента по растяжению – сжатию,  $\alpha$  может быть связано с начальным значением фазового превращения аустенита в мартенсит при растяжении и сжатии ( $\sigma_c^{AM}$  и  $\sigma_t^{MA}$ соответственно) как:

$$\alpha = \frac{\sigma_c^{AM} - \sigma_t^{AM}}{\sigma_c^{AM} + \sigma_t^{AM}}.$$

Отношение напряжение – деформация выражается как:  $\sigma = \mathbf{D}: (\varepsilon - \varepsilon_{tr}),$ 

$$\dot{\varepsilon}_{tr} = \dot{\xi} \bar{\varepsilon}_L \frac{\partial F}{\partial \sigma},$$

где **D** – матрица упругих модулей;  $\varepsilon_{tr}$  – тензор деформации перехода;  $\overline{\varepsilon}_L$  – параметр материала, определяемый из рис. 2.2.

Чтобы смоделировать разницу между упругими свойствами аустенита и мартенсита, модуль упругости *E*, используемый в

основной модели материала, является функцией доли мартенсита  $\xi_M$ , модуля упругости чистого аустенита  $E_A$  (начальный входной модуль упругости) и модуля упругости мартенсита  $E_M$ 

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{A}}}{1 + \left(\frac{\mathbf{E}_{\mathbf{A}}}{\mathbf{E}_{\mathbf{M}}} - 1\right) \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{M}}}.$$

### 2.1.2. Параметры для модели, описывающей сверхэластичное поведение

Модель сверхэластичности в Ansys/Mechanical для сплавов с памятью формы, инициализируется через команду ТВ, SMA от SUPE-опций.

Для определения упругих свойств аустенитной фазы необходимо использовать параметр (MP) и показатели модуля упругости.

Сверхэластичные свойства SMA-материалов описываются шестью константами, которые определяются из диаграммы напряжение – деформация, полученной из экспериментальных результатов при в условиях нагрузки и разгрузки при одноосном напряженном состоянии.

Таблица 2.1

Константа	Значение	Свойства
<i>C</i> 1	$\sigma^{AM}_M$	Значение начального напряжения для прямого фа-
		зового преобразования
<i>C</i> 2	$\sigma_{f}^{AM}$	Конечное значение напряжения для прямого фазо-
		вого преобразования
СЗ	$\sigma_M^{MA}$	Значение начального напряжения для обратного
		фазового превращения
<i>C</i> 4	$\sigma_{f}^{MA}$	Конечное значение напряжения для обратного фа-
		зового превращения
C5	$\bar{\epsilon}_L$	Максимальная остаточная деформация
<i>C</i> 6	α	Параметр, измеряющий разницу между реакциями
		материала на растяжение и сжатие
С7	$E_{\mathrm{M}}$	Модуль упругости полной мартенситной фазы. Ес-
		ли 0 или не определено, то мартенситная и аусте-
		нитная фазы имеют одинаковый модуль упругости
		$E = E_A = E_M$

Параметры сверхэластичности для определяющего уравнения

Таблица 2.2 Определение упругих свойств аустенитной фазы на языке APDL

MP,EX,1,60000.0 MP,NUXY,1,0.36 Define SMA material properties TB,SMA,1,,,SUPE TBDATA,1, 520, 600, 300, 200, 0.07, 0.0

Для каждого набора параметров определяется температура (ТВТЕМР), затем задаются константы от *C*1 до *C*6 через (ТВDАТА). Существует возможность определения до 99 наборов температурно-зависимых констант. Физико-механическая интерпретация используемых параметров и их сопоставление с формульными обозначениями, представлены в таблице 2.1, а пример реализации задания свойств на внутреннем языке программы, представлен в табл. 2.2.

# 2.2. Моделирование эффекта сверхэластичности при оценке механического поведения пружинного привода из никелида титана

Из-за способности выдерживать большие нагрузки и высокого отношения силы к весу никелид титана широко используется в качестве материала компактных гибких приводов в различных отраслях промышленности. Например, никелид титана можно использовать в конструкциях комбинированных датчиков - исполнительных механизмов в тепловых мостах для криогенных охладителей, выхлопных соплах с регулируемой площадью сечения для турбомашин и регуляторах активного зазора для кожухов лопаток, для механизмов раскрывания и настройки натяжения зонтичных рефлекторов антенн спутников. На рис. 2.2 в качестве примера представлена фотография конструкций имплантатов из монолитного сплава никелида титана для фиксации костных отломков и создания межкишечных анастомозов в хирургии, производимые в лаборатории Медицинских сплавов и имплантатов с памятью формы СФТИ ТГУ. Известный производитель самолетов интегрировал никелид титана в свои шевроны с изменяемой геометрией для снижения шума двигателя.



Рис. 2.2. Пример комплекта имплантатов из монолитного сплава никелида титана для фиксации костных отломков и создания межкишечных анастомозов в хирургии твёрдых и мягких тканей организма

Инициализация напряженно-деформированного состояния в никелиде титана возможна при изменении температуры за счет наличия эффекта памяти формы. Поэтому в данной задаче в качестве граничных условий, приводящих к деформации элемента конструкции, являются приложения температуры. В результате, по виду механического отклика системы можно отследить эффект сверхэластичности материала, описанного математической постановкой, приведенной в данном разделе.

### 2.2.1. Постановка задачи для моделирования

Для наглядных возможностей МКЭ при решении задач вертикальная спиральная пружина, как исполнительный механизм элемента конструкции привода, моделировали с использованием программного комплекса Ansys/Mechanical с учетом эффекта памяти формы с использованием двух разных моделей: модели балочного элемента BEAM188 и модели твердотельного элемента SOLID185. Результаты, полученные с использованием двух конечно-элементных моделей, сравниваются между собой для объяснения подходов в идеализации расчетной модели при оптимизации решения.

Модель пружины нагружается грузом W=1830 Н в состоянии материала в мартенситной фазе при температуре 250 К, затем нагревается до 400 К. Если напряжение, приложенное грузом, меньше, чем  $A_f$ , напряжение восстановления сплава, нагрев материала вызывает обратное фазовое преобразование, и пружина поднимет груз. Затем пружина снова охлаждается до 250 К и снова растягивается, устремляясь к первоначальной форме. При охлаждении происходит превращение аустенита в мартенсит, и вес снова растягивает пружину. В результате возникает повторяющееся двустороннее движение, как показано на рис. 2.3. Таким образом, перемещаясь под изменением температуры, пружина выполняет функциональное предназначение привода, осуществлять линейные перемещения в заданном направлении с необходимым усилием.



Рис. 2.3. Эволюция изменения формы вертикальной винтовой пружины на разных этапах расчета под действием нагрузки и температуры

Геометрия пружинного привода создается в Ansys / Mechanical APDL с диаметром проволоки 4 мм, внешним диаметром пружины 24 мм, размером шага 12 мм, двумя витками и начальной длиной 28 мм, как показано на следующем рис. 2.4.



Рис. 2.4. Конечно-элементные модели пружинного привода, используемые в расчетах: *а* – балочная модель с использованием элементов BEAM 188; *б* – твердотельная модель с использованием элементов SOLID185

Идеализированная балочная конечно-элементная модель создана с использованием элементов BEAM188. Трехмерная создана путем выдавливания исходной модели конечных элементов вдоль заданного направления и построения сетки с элементами SOLID185.

Свойства материала. При численном анализе работы пружинного привода используются следующие свойства материала [40–42], типичные для свойств нитинола, представленные в табл. 2.3.

**Граничные условия.** Схема граничных условий приведена на рис. 2.5. Верхняя часть пружинного привода (рис. 2.4) зафиксирована неподвижно, а нижняя нагружена весом 1830 Н.

Смещения ограничены в направлениях Х и Ү. После того, как пружина растягивается грузом при температуре 250 К, тем-

пература повышается до 400 К, чтобы поднять груз, и снова снижается до 250 К, чтобы опустить груз.

Таблица 2.3

#### Свойства материала пружинного привода для расчетной модели

Модуль упругости для аустенитной фазы (МПа)	51700
Модуль упругости для мартенситной фазы (МПа)	51700
Коэффициент Пуассона	0,3
<i>H</i> (МПа)	1000
<i>R</i> (МПа)	140
$B (\mathrm{M}\Pi\mathrm{a}^*\mathrm{K}^{-1})$	5,6
<i>T</i> 0 (K)	250
М	0

/com Подключение упругой модели материала

MPTEMP,,,,,,,	! Активируется модель Гуковской упругости	
	! Определяется исходная температура матери-	
MPTEMP,1,250	ала	
	! Определяется модуль упругости Юнга для	
MPDATA,EX,1,,51700	аустенитной фазы	
	! Определяется коэффициент Пуассона	
MPDATA.PRXY.10.30		

/com Задание параметров модели в виде свойств материала для SMA

C1=1000	! Задается параметр упрочнения Н
C2=250	! Задается исходная температураТО
C3=140	! Задается предел упругости R
C4=5.6	! Задается температурный параметр масштабирования В
C5=0.07	! Задается значение макс. деформации трансформации
C6=70e3	! Задается модуль упругости Юнга мартенситной фазы
C7=0	! Задается параметр Лоде М=0, симметрия свойств

/com Подключение модели материала для эффекта SMA

TB,SMA,1,,,MEFF	! Активируется модель SMA
tbtemp,250	! Определяется температура ис-
	ходных свойств
TBDATA,1,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7	! Определяются константы модели



Рис. 2.5. Эволюция температурных и силовых граничных условий на разных этапах расчета

Анализ и особенности настройки решателя. Решаемая задача обладает признаками нелинейности за счет сложной геометрии пружины и предполагаемых больших деформаций. Нелинейный статический анализ выполняется с использованием больших деформаций (обязательное включение функции NLGEOM, ON) и несимметричных матриц для полного метода Ньютона-Рафсона (подключение опции NROPT, UNSYM). Все решение состоит из трех этапов загрузки, как показано на рис. 2.5.

### 2.2.2. Расчетные результаты деформации пружинного привода

На первом шаге пружинный привод растягивается нагрузкой *W* при температуре 250 К. Подразумевается, что модель прогрета равномерно, при этом нет необходимости решать уравнение теплопроводности. Рис. 2.6 иллюстрирует расчетные результаты деформации пружинного привода на этом шаге решения.





а – балочная модель с использованием элементов ВЕАМ 188;

б – твердотельная модель с использованием элементов SOLID185

Максимальное смещение составляет 43 мм, что больше исходной длины в 28 мм.

На этапе 2 после нагрева включается эффект памяти формы, при этом пружинный привод частично восстанавливается до максимального смещения 10 мм. Деформация находится в состоянии мартенсита, чтобы выдержать вес, как показано на рис. 2.7.



 Рис. 2.7. Деформированный пружинный привод на фоне недеформированной модели после этапа 2 расчета:
 а – балочная модель с использованием элементов BEAM 188;
 б – твердотельная модель с использованием элементов SOLID185

На этапе 3 после охлаждения до 250 К пружинный привод растягивается до своей длины после нагружения на этапе 1, как показано на рис. 2.8.

С использованием графика на рис. 2.9 можно проследить историю деформирования пружинного привода на всех этапах нагружения.

На этапах 2 и 3 отмечается нелинейный механический отклик материала на прилагаемое воздействие, при этом отклик на этапе 3, за счет эффекта сверхэластичности, приводит к обратимым деформациям конструкции, пружина возвращается в первоначальное состояние, заданное на этапе 1.

Картина эволюции деформации и величины смещений нижней части пружины показывают, что модели BEAM188 и SOLID185 дают схожие результаты в рамках допустимой погрешности. Модель BEAM188 намного эффективнее в реализации, причем для ее решения требуется в восемь раз меньше времени, чем для модели SOLID185.



о 225 250 275 300 325 350 375 400 425 Температура, К

Рис. 2.9. Эволюция перемещения нижней части пружинного привода в процессе решения

Расхождение результатов на графике перемещений нивелируется проведением анализа на сеточную сходимость путем вариации плотности сетки, при этом требуемая продолжительность решения может возрасти.

### 2.2.3. Рекомендации к проведению расчетов

Чтобы выполнить аналогичные типы анализа с участием SMA, примите во внимание следующее:

• Жесткость модели материала обычно несимметрична, но по умолчанию в решении используется симметричная матрица. Если во время решения возникает проблема сходимости, укажите вариант несимметричного решателя (NROPT, UNSYM).

• Фазовое преобразование SMA включает стадии преобразования и насыщенное преобразование. Поскольку на этапе преобразования добиться сходимости сложнее, разбейте этап загрузки преобразования на более мелкие и используйте меньшие временные этапы.

• Параметр сверхэластичности (TBOPT = SUPE) модели материала (TB, SMA) поддерживает только трехмерное состояние, плоскую деформацию и осесимметричное напряженное состояние. Опция памяти (TBOPT = MEFF) модели материала поддерживает большинство напряженных состояний, включая балки, оболочки, плоские деформации, осесимметричные и трехмерные напряженные состояния. Элемент LINK180 не поддерживается ни для одного варианта материала.

### Контрольные вопросы

1. В чем сложность численного моделирования напряженнодеформированного состояния изделий, изготовленных из сверхэластичных материалов?

2. Опишите алгоритм моделирования механического поведения материала с фазовыми превращениями.

3. С использованием какой функции можно учитывать зависимость фазового превращения от давления?

4. Существует ли возможность учета в физико-математической постановке разницы механического поведения материала при растяжении и сжатии?

5. Достаточно ли для описания механического поведения сверхэластичных материалов уравнений, описывающих закона Гука? 6. Какие константы материала, необходимо использовать при моделировании эффекта сверхэластичности в программном комплексе Ansys?

7. На основе каких данных определяются параметры сверхэластичности для использования в моделировании?

8. Как определяется параметр, корректирующий разницу между реакциями сверхэластичного материала на растяжение и сжатие?

9. В чем отражается нелинейность решаемых задач при учете эффекта сверхэластичности, как это необходимо учитывать при настройках решателя в Ansys?

10. Какие граничные условия необходимо учитывать для реализации эффекта сверхэластичности при моделировании?

### 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО РАСТЯЖЕНИЮ ПРОВОЛОЧНЫХ ОБРАЗЦОВ ИЗ НИКЕЛИДА ТИТАНА

При создании новых классов материалов для особых конструкций необходимым требованием является их аттестация в условиях приближенных к эксплуатационным. На этом этапе необходимо знать механическое поведение материала при статических и динамических нагрузках. От точности их определения и описания зависит качество прогноза поведения конструкции при эксплуатации.

Проблема биосовместимости имплантатов весьма актуальна, так как количество операций с использованием имплантатов в различных областях медицины стремительно растет. При этом количество новых материалов для пластики тканей быстро увеличивается, в то время как разработка теоретических основ их применения отстает от практики. В настоящее время проводится много исследований биомеханического поведения кровеносных сосудов, мышечных тканей, соединительных тканей, кожи, костей и других видов биологических тканей [43, 44]. Активно исследуют такие имплантационные биоматериалы, как полимеры, керамика, металлы и композиционные материалы [45, 46]. Особое место среди материалов для имплантации занимают сверхэластичные сплавы никелида титана, которые нашли широкое применение в кардиохирургии, абдоминальной хирургии, стоматологии, травматологии и гинекологии [47-49]. Сверхэластичные имплантаты активно применяют в виде стентов в эндоваскулярной хирургии, ортодонтических дуг в ортодонтии, металлотрикотажных материалов в пластике грыж.

Целью данной работы было изучение деформационного поведения проволочных образцов из сплава при одноосном растяжении и подбора типа определяющего уравнения, способного максимально точно описывать кинетику развития напряженнодеформированного состояния в металлотрикотаже из никелида титана под нагрузкой и разгрузкой для использования в моделировании при создании прогностических физико-математических моделей.

Для достижения поставленной цели в лаборатории сверхэластичных биоитерфейсов Томского государственного университета проведен ряд экспериментальных работ по одноосному растяжению проволочного образца и металлотрикотажа многократному отнулевому циклированию двух видов проволочных образцов из медицинского сплава TiNi в составеTi-50 ат.% Ni.

Для получения деформационных диаграмм приготовили образцы металлотрикотажа, связанного из сверхэластичной проволоки никелида титана толщиной 60 мкм (рис. 3.1, *a*). Образцы металлотрикотажа длиной 100 мм запрессовывали в наконечники с отверстиями для захватов.



Рис. 3.1. Фотографии образцов для проведения экспериментов по одноосному растяжению: металлотрикотаж (*a*) и сверхэластичная проволока (*б*) из никелида титана

Проволоку из того же сплава толщиной 60 мкм (рис. 3.1, б) получали из слитков 240×20 мм термомеханической обработкой с промежуточными отжигами в 4 этапа:

1. Ручьевой прокат слитка диаметром 20 мм до прутка толщиной 7 мм (20 циклов).

2. Ротационная ковка прутка от толщины 7 мм до 3,5 мм (7 циклов).

3. Холодное волочение проволоки от 3,5 мм до 500 мкм (25 циклов).

4. Горячее волочение проволоки от 500 мкм до 90-40 мкм (50-70 циклов).

Деформационные диаграммы растяжения исследуемых материалов получали на программно-управляемом электромеханическом испытательном комплексе мягкого отнулевого цикличе-
ского растяжения с усилием до 9,8 Н (рис. 3.2). Управление растяжением, осуществляли с помощью персонального компьютера, который позволяет назначать и менять количество циклов, скорость и пределы растяжения. Машина растяжения снабжена универсальными захватами образцов с винтовыми фиксаторами. Растяжение образцов проводили с точностью до 3 мкм, фиксируя развиваемое усилие в образцах при нагрузке и разгрузке, с точностью 0,004 Н.



Рис. 3.2. Комплекс одноосного растяжения

# 3.1. Результаты экспериментальных работ по растяжению образцов из никелида титана

Первоначально для проведения сравнительного анализа механического поведения проволоки и металлотрикотажа провели испытания проволоки TiNi толщиной 60 мкм, из которой изготавливали металлотрикотаж. Полученные диаграммы одноосного растяжения полностью соответствуют типовым диаграммам растяжения TiNi проволоки (рис. 3.3).

Диаграмма одноосного растяжения до разрыва имеет три линейных участка: до 2 % участок упругой деформации аустенита В2; участок вязкого течения в интервале деформации 2–7,5 % связанный с прямым МП аустенита в мартенсит B2'B2+R'B19/;



7,5–13 % участок линейного упрочнения, связанный с деформацией мартенсита В19/.

Рис. 3.3. Деформационная диаграмма циклического (5 циклов) растяжения проволоки TiNi 60 мкм. На вкладке одноосное растяжение до разрыва

На участке упругой деформации аустенита при критическом уровне напряжения аустенит становится нестабильным, и начинают формироваться зародыши мартенситной фазы, индуцированные напряжением. При достижении критического напряжения мартенситного сдвига мартенсит распространяется в образце под постоянным напряжением и формирует участок вязкого течения в виде плато, связанный с ростом полос мартенсита [50]. Результатом фазового превращения является изменение деформации на 5,5 %. Предел текучести совпадает с пределом упругости и равен 700 МПа. Предел прочности проволоки равный примерно 1500 МПа достигнут при 13 % относительной деформации.



Рис. 3.4. Схема двойникования на характерных участках экспериментально полученной тензометрической кривой растяжения проволоки TiNi при однократной нагрузке и разгрузке

Деформация проволоки, претерпевающей напряжение, вызванное МП в цикле «нагрузка – разгрузка», характеризуется сверхэластичным поведением (рис. 3.4). На деформационной диаграмме первого цикла растяжения значение критического напряжения мартенситного сдвига прямого МП  $\sigma_t$  составляет 780 МПа. В процессе растяжения 4 % неупругой мартенситной деформации  $\varepsilon_M$  с запаздыванием полностью возвращается при разгрузке, образуя механический гистерезис  $\Delta \sigma$  величиной 360 МПа. Площадь кривой сверхэластичного гистерезиса соответствует рассеянной механической энергии за счет внутреннего трения при движении межфазных границ раздела аустенит – мартенсит. Отсутствие остаточной деформации связано с однородной нанокристаллической структурой проволоки со средним размером зерен 20 нм.

Установленные особенности механического подведения проволоки из никелида титана, заключающиеся в проявлении эффекта сверхэластичности при одноосном растяжении, представляют интерес при изучении механического поведения металлотрикотажа на ее основе.

На рис. 3.5 показаны результаты испытаний исследуемой трикотажной ленты до разрыва и циклического растяжения до 10 и 20 % деформации. На вставке (рис. 3.5) представлена диаграмма механического поведения металлотрикотажа при одноосном растяжении до разрыва. Важно отметить, что на диаграммах не обнаружено участков текучести, вызванных МП, которые были обнаружены при растяжении образцов из одиночной проволоки (рис. 3.3). Это свидетельствует о том, что напряжения в большей части металлотрикотажа при растяжении на 10 % не достигают напряжения мартенситного сдвига и остаются ниже предела упругости. На начальном участке диаграммы одноосного растяжения до разрыва до 20 % металлотрикотаж деформируется упруго и имеет постоянный модуль упругости. На участке 20-40 % модуль упругости растет нелинейно, а на участке 40-50 % снова становится постоянным, намного большим по величине, чем на начальном участке. На завершающем участке деформации в интервале 50-55 % деформации модуль снова нелинейно снижается. Подобным образом меняются модули упругости у металлотрикотажа толщиной 40 мкм и 90 мкм.

Вид деформационной диаграммы металлотрикотажа при циклическом растяжении имеет форму гистерезиса. График первого цикла нагружения до 10 % продольного удлинения близок линейному. При каждом последующем цикле растяжения начальный модуль упругости и максимальные напряжения снижаются. График нагружения с каждым циклом приобретает ярко выраженный нелинейный характер, однако деформации при разгрузке также остаются обратимыми. Описанные эффекты при растяжении, связанные с нелинейностью механического поведения и обратимостью деформации, отмечаются у гиперупругих материалов. Эффект понижения начального модуля упругости и максимальных деформаций связывают с размягчением и называют эффектом Маллинза по имени его первого исследователя. Однако в отличие от полимеров, где было впервые обнаружено подобное поведение, эти эффекты в трикотажной ленте имеют другую природу происхождения. Эффект размягчения при цикметаллотрикотажа лическом растяжении обусловлен, повидимому, соотношением упругих сил, развиваемых в петлях при разгрузке, к вязкому сопротивлению трения между петлями.



Рис. 3.5. Деформационная диаграмма при циклическом растяжении (5 циклов) трикотажной ленты из проволоки 60 мкм, на вставке растяжение до разрыва: *a* – растяжение 10 %; *б* – растяжение 20 %

Уже на первом цикле разгрузки металлотрикотажа происходит обособление более и менее упругих участков диаграммы, связанных с более и менее нагруженными участками в петлях металлотрикотажа. При этом упругие силы возврата деформации с высоким модулем более эффективно преодолевают силы внутреннего трения, чем низкомодульные и таким образом проявляется эффект размягчения и запаздывания разгрузки. Силы трения препятствуют низкомодульным упругим силам, которые стремятся вернуть петли в первоначальное состояние, и металлотрикотаж приобретает оптимальную стабильную конфигурацию.

Как отмечено, на диаграмме циклического растяжения металлотрикотажа форма петли гистерезиса, относящейся к 1 циклу, отличается от следующих, но форма петель со 2 по 5 циклы весьма схожа, что показывает тенденцию к стабилизации после первого цикла нагрузки – разгрузки. Площадь петли гистерезиса при первом цикле значительно превосходит площадь петель при следующих циклах.

В металлотрикотаже, как в напряженно-связанных конструкциях, напряжения распределены крайне неравномерно. Поэтому при одноосном растяжении металлотрикотажа до разрыва на контактных участках петель напряжения достигают не только предельной мартенситной деформации, но и предела прочности. При циклическом растяжении в интервале упругой деформации признаков пластической деформации на контактных участках не обнаружено. На свободных участках петель напряжения не вызывают мартенситного сдвига, так как зависимость растяжения сохраняет линейность без остаточной деформации при 10 % растяжении и приобретает небольшую нелинейность и 3 % остаточной деформации при 20 % растяжении. Следовательно, часть тепла от внутреннего трения при МП выделяется локально в местах контактов петель, в то время как основное тепло выделяется в результате поверхностного трения между петлями металлотрикотажа. Таким образом, в результате неравномерного распределения нагрузки в петлях металлотрикотажа эффект сверхэластичности может проявляться только локально на контактных участках петель. Остальная часть петель испытывает только упругую деформацию, а металлотрикотаж в целом ведет себя как гипервязкоупругий материал [51–53].

Таким образом, диаграммы циклического растяжения металлотрикотажа носят гипервязкоупругий или резиноподобный характер. Все образцы при циклическом растяжении проявили эффект размягчения и запаздывания и в каждой из диаграмм можно выделить низкомодульную и высокомодульную части. Напряжения, модуль упругости и динамический гистерезис всех образцов стабилизировались к 3 циклу растяжения. При этом низкомодульный участок упругой деформации при разгрузке занимает стабильное положение уже с первых циклов.

Трикотажная лента является не цельным объектом, а напряженно-связанной конструкцией, петли которой находятся в зацеплении, но сохраняют индивидуальную подвижность. Напряженно-связанная конструкция деформируется крайне неоднородно. Контактные участки петель испытывают экстремальный изгиб, при котором напряжения приближаются к пределу прочности, а остальные участки испытывают растяжение и изгиб при напряжениях значительно ниже предела упругости. Поэтому упругая деформация на различных участках петель возвращается с различной скоростью. Известно, что эффект Маллинза характерен для напряженно-связанных структур, резиноподобных материалов, клеточных мембран и конструкций из прессованной проволоки из сплавов с памятью формы.

При сравнении диаграмм растяжения проволоки 60 мкм и металлотрикотажа, сделанного из нее, можно уверенно утверждать, что напряженно-связанная конструкция металлотрикотажа ограничивает проявление эффекта сверхэластичности, свойственного проволоке. На диаграммах растяжения участок нагрузки остается линейным на всех циклах при растяжении 10 %, но становится нелинейным после первого цикла при растяжении 20 %. Такое поведение говорит о том, что для данного конструктивного решения растяжение металлотрикотажа менее 20 % является недостаточной нагрузкой для преодоления Гуковского участка упругой деформации.

### 3.2. Математическая постановка задачи об определении напряженно-деформированного состояния конструкций с учетом гиперупругого поведения

Отмеченная экспериментально специфика нелинейного – не Гуковского поведения металлотрикотажа из никелида титана под нагрузкой, заключающаяся в подобии гиперупругости механического поведения с эффектом размягчения, приводит к тому, что предсказать поведение подобного материала в инженерных приложениях аналитическими методами не представляется возможным. В этом случае для создания прогноза поведения материала под нагрузкой необходимо прибегнуть к численному моделированию, основанному на постулатах механики деформируемого твердого тела.

Задачи механики деформируемого твердого тела о деформации материалов и элементов конструкций с нелинейными опре-

деляющими уравнениями в различных пространственных постановках решаются численно [54]. Эффективным и наиболее распространенным методом численного решения нелинейных статических задач является *метод конечных элементов* (МКЭ) [55–58]. Математическая задача при использовании МКЭ формулируется в вариационной форме [58]. На основании вариационного принципа Лагранжа записывается уравнение равновесия в виде

 $\delta W_1^i + \delta W_2^i = \delta W_1^e + \delta W_2^e + \delta W_3^e$ , где величины:  $\delta$  – символ виртуального перемещения,

$$\delta W_1^i = \int_V \delta \varepsilon_{kl} \sigma_{kl} dV, \ \delta W_2^i = \int_S \delta u_k \sigma_{kl} n_l dS -$$

являются приращением работы внутренних напряжений на виртуальных деформациях и приращением внутренних напряжений на виртуальных перемещениях соответственно, а их сумма  $\delta W^i = \delta W_1^i + \delta W_2^i$  – виртуальная энергия деформации; *V* – объем исследуемого тела;  $\sigma_{kl}$  – компоненты второго тензора напряжений Пиола-Кирхгофа;

 $\delta W_1^e = \int_V \delta u_k \frac{F_k^a}{V} dV$ ,  $\delta W_2^e = \int_V \delta u_k P dS$ ,  $\delta W_3^e = \int_V \delta u_k F_e^{nd} dV$  – являются приращением работы внешних усилий на виртуальных перемещениях, работа давления на поверхности тела, работа узловых сил в объеме тела соответственно, а их сумма  $\delta W^e = \delta W_1^e + \delta W_2^i + \delta W_3^e$  – внешняя виртуальная работа сил.

Компоненты тензора деформаций можно определить с помощью следующих соотношений [54, 55]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u_k \nabla_i u_k) + \alpha \delta_{ij} \Delta T,$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций;  $u_i$  – компоненты вектора перемещения;  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения;  $\delta_{ij}$  – символ Кронеккера, ( $\delta_{ij} = 1$ , i = j;  $\delta_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ );  $\Delta T$  – разница температур относительно эталонной температуры.

Для материалов с нелинейным поведением, обладающих гиперупругими механическими свойствами, существует функция упругого потенциала W [60] (или функция плотности энергии деформации), которая является скалярной функцией тензора деформации, производная которой по отношению к компоненте деформации определяет соответствующую компоненту напряжения. Связь между напряжениями и деформациями может быть выражена через функцию плотности энергии деформации в обобщенном виде

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \equiv 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}},$$

где  $S_{ij}$  – компоненты второго тензора напряжений Пиола-Кирхгофа; W – функция плотности энергии деформации;  $E_{ij}$  – компоненты тензора Лагранжа;  $C_{ij}$  – компоненты правого тензора деформации Коши-Грина.

Деформации Лагранжа определяются следующим выражением

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \big( C_{ij} - \delta_{ij} \big).$$

Номинальная деформация в текущей конфигурации определяется

$$E_{\left(\frac{1}{2}\right)ij} = U_{ij} - \delta_{ij}\mathbf{1}.$$

Тензор деформации  $C_{ij}$  складывается из произведений градиентов деформации  $F_{ij}$ 

$$C_{ij} = F_{ki}F_{kj},$$

где  $F_{ij}$  – компоненты тензора градиентов деформации;  $X_i$  – недеформированное положение точки в направлении *i*;  $x_i = X_i + u_i$  – деформированное положение точки в направлении *i*;  $u_i$  – перемещение точки в направлении *i*;  $U_{ij} = \sqrt{C_{ij}}$  – компоненты правого тензора растяжения.

Напряжения Кирхгофа определяются как

$$\mathbf{t}_{ij} = F_{ik} S_{kl} F_{jl},$$

отсюда напряжения Коши получают через

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J}\tau_{ij} = \frac{1}{J}F_{ik}S_{kl}F_{jl},$$

где компоненты тензора градиентов деформации находятся через

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}.$$

 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$  – собственные значения матрицы  $C_{ij}$  существуют, если  $det |C_{ij} - \lambda_n^2 \delta_{ij}| = 0,$ 

который может быть переформулирован как

$$\lambda_p^6 - I_1 \lambda_p^4 + I_2 \lambda_p^2 - I_3 = 0,$$

где  $I_1$ ,  $I_2$ , и  $I_3$  – первый, второй и третий инварианты матрицы  $C_{ii}$  соответственно.

$$I_{1} = \lambda_{1}^{2} + \lambda_{2}^{2} + \lambda_{3}^{2},$$
  

$$I_{2} = \lambda_{1}^{2}\lambda_{2}^{2} + \lambda_{2}^{2}\lambda_{3}^{2} + \lambda_{3}^{2}\lambda_{1}^{2},$$
  

$$I_{3} = \lambda_{1}^{2}\lambda_{2}^{2}\lambda_{3}^{2} = J^{2}$$

И

$$J = det[F_{ij}].$$

*J* – является отношением деформированного упругого объема к эталонному (недеформированному) объему материалов, описываемых теорией Огдена [61].

Когда имеется тепловая объемная деформация, объемный коэффициент J заменяется коэффициентом упругого объема  $J_{el}$ , который определяется как отношение общего объема J к коэффициенту теплового объема  $J_{th}$ , как

$$J_{el} = \frac{J}{J_{th}},$$

и коэффициент теплового объема  $J_{\rm th}$ 

$$J_{th} = (1 + \alpha \Delta T)^3,$$

где α – коэффициент температурного расширения; Δ*T* – разница температур относительно эталонной температуры.

Ниже приведены несколько форм функций плотности энергии деформации (W) для описания механического поведения гиперупругих изотропных материалов в конструкциях при численном моделировании.

#### 3.2.1. Определяющее уравнение Муни-Ривлина

Модель Муни-Ривлина включает в себя двух-, трех-, пяти- и девятипараметрические полиномы (N = 1...9), описывающие функции плотности энергии деформации, в обобщенном виде которые выглядят следующим образом:

$$W = \sum_{k+l=l}^{N} C_{kl} (\overline{I}_1 - 3)^k (\overline{I}_2 - 3)^1 + (J-1)^2/d,$$

 $C_{kl}$  и *k* представляют собой константы модели материала, параметры  $\overline{I}_1$ ,  $\overline{I}_2$ , выражаются непосредственно через инварианты  $I_i$ правого тензора деформаций Коши-Грина

$$\overline{I}_1 = I_1 I_3^{-1/3}, \, \overline{I}_2 = I_2 I_3^{-2/3},$$

отсюда пятипараметрическое определяющее уравнение будет выглядеть следующим образом

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + C_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + C_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2 + (J - 1)^2/d,$$

где  $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, d = \frac{(1-2\nu)}{(C_{10}+C_{01})}$  – параметры уравнения.

Начальный модуль сдвига определяется как

$$\mu = 2(C_{10} + C_{01}).$$

Таблица 3.1

#### Константы материала для пятипараметрической модели Муни-Ривлина

Константа	Свойство	Единицы измерения	
$C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}$	Параметры уравнения	Па	
d	Параметр несжимаемости	1/Па	

Таблица 3.2

Пример задания свойств материала для модели Муни-Ривлина в Ansys

TB,HYPER,1,,5,MOONEY	! Активируется модель Mooney-Rivlin
TBDATA,1,0.163498	! Определяется параметр C <sub>10</sub>
TBDATA,2,0.	! Определяется параметр С01
TBDATA,3,0.	! Определяется параметр С <sub>11</sub>
TBDATA,4,0.	! Определяется параметр C <sub>20</sub>
TBDATA,5,0.	! Определяется параметр С <sub>02</sub>
TBDATA,6,0.	! Определяется параметр несжимаемости d

# 3.2.2. Определяющее уравнение Нео-Гука

Согласно модели Нео-Гука функции плотности энергии деформации имеет вид

$$W = \frac{\mu}{2}(\bar{l}_1 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2,$$

где  $\mu$  – начальный модуль сдвига материала; d – параметр несжимаемости материала, полученный из соотношения для начального объемного модуля упругости  $K = \frac{2}{d}$ .

В свою очередь

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)},$$

где *Е* – модуль упругости Юнга; υ – коэффициент Пуассона.

Таблица 3.3

Константа	Свойство	Единицы измерения
μ	Начальный модуль сдвига материала	Па
d	Параметр несжимаемости	1/Па

#### Константы материала для модели Нео-Гука

Таблица 3.4

#### Пример задания свойств материала для модели Нео-Гука в Ansys

TB,HYPER,1,,,NEO	! Активируется модель Neo-Hookean
TBDATA,1,0.163498	! Определяется начальный модуль сдвига µ
TBDATA,1,0.0001	! Определяется параметр несжимаемости d

### 3.2.3. Определяющее уравнение Гента

Согласно модели Гента функция плотности энергии деформации имеет вид

$$W = -\frac{\mu J_m}{2} ln \left( 1 - \frac{\bar{l}_1 - 3}{J_m} \right) + \frac{1}{d} \left( \frac{J^2 - 1}{2} - ln J \right),$$

где  $\mu$ , d – константы материала, аналогичные модели Нео-Гука;  $J_m$  – предельная величина для  $\bar{I}_1$  – 3, при том, что если  $J_m$  стремится к бесконечности, то модель преобразуется к виду Нео-Гука.

Таблица 3.5

Константа	Свойство	Единицы измерения
μ	Начальный модуль сдвига материала	Па
d	Параметр несжимаемости	1/Па
$J_m$	Предельная величина	

#### Константы материала для модели Гента

Таблица 3.6

#### Пример задания свойств материала для модели Гента в Ansys

TB,HYPER,1,,,GENT	! Активируется модель Gent
TBDATA,1,0.163498	! Определяется начальный модуль сдвига µ
TBDATA,2,0.163498	! Определяется предельная величина $J_m$
TBDATA,3,0.	! Определяется параметр несжимаемости d

## 3.2.4. Определяющее уравнение Бергстрома-Бойса

Вариант модели Бергстрома-Бойса – это феноменологическая, сильно нелинейная, зависящая от скорости деформации модель материала для моделирования механического поведения эластичных резиноподобных и биологических материалов. Модель предполагает неупругий отклик только для деформационного поведения сдвига, определяемого изохорическим потенциалом энергии деформации, в то время как реакция на объемные деформации остается чисто упругой и характеризуется потенциалом энергии объемной деформации.

Модель Бергстрома-Бойса основана на реологической модели пружины (*A*), параллельно соединенной с включенными последовательно пружиной и демпфером (*B*), как показано на рис. 3.6. Модель материала связана с зависимыми от времени соотношениями между напряжением и деформацией без полной релаксации напряжений. Все компоненты (пружины и демпфер) сильно нелинейны.

Напряженное состояние в цепи *A* может быть найдено в тензорном представлении в виде тензора градиента деформации  $(F = \frac{\partial x_i}{\partial x_i})$  через параметры материала следующим образом:

$$\sigma_{A} = \frac{1}{J_{A}} \frac{\mu_{A}}{3} \frac{L^{-1}\left(\frac{\tilde{\lambda}^{*}_{A}}{\lambda_{A}^{lock}}\right)}{\frac{\tilde{\lambda}^{*}_{A}}{\lambda_{A}^{lock}}} dev[\tilde{B}^{*}_{A}] + K[J_{A}-1]\tilde{I},$$

где  $\sigma_A$  – напряженное состояние в цепи A;  $\mu_A$  – начальный модуль сдвига цепи A;  $\lambda_A^{lock}$  – предел растяжения цепи A; K – объемный модуль;  $J_A = det[F]$ ,  $\tilde{B}^*_A = J^{\frac{-2}{3}}\tilde{F}\tilde{F}^T$ ,  $\tilde{\lambda}^*_A = \sqrt{\frac{tr[\tilde{B}^*]}{3}}$ ,  $L^{-1}(x)$  – обратная функция Ланжевена.



Рис. 3.6. Механическое представление реологической модели Бергстрома-Бойса

Для численной эффективности для обратной функции Ланжевена используется аппроксимация Паде [62], показанная ниже. Это приближение будет отличаться от полиномиального приближения, используемого для модели Арруда-Бойса.

$$L^{-1}(x) \approx x \frac{3-x^2}{1-x^2}.$$

Напряжение вязкоупругого материала цепи (B) является функцией деформации и скорости деформации. Из общей деформации в цепи (B) часть происходит в упругой компоненте, а остальная деформация происходит в вязкой компоненте. Поскольку напряжение в упругой части равно напряжению в пластической части, общее напряжение можно записать просто как функцию упругой деформации уравнением

$$\sigma_B = \frac{1}{J_B^e} \frac{\mu_B}{3} \frac{L^{-1}\left(\frac{\lambda_B^{e^*}}{\lambda_B^{lock}}\right)}{\frac{\tilde{\lambda}_B^{e^*}}{\lambda_B^{lock}}} dev \left[\tilde{B}_B^{e^*}\right] + K[J_B^e - 1]\tilde{I}.$$

Все переменные в этом уравнении аналогичны переменным в уравнении для цепи *А*. Вязкую составляющую деформации можно найти из общей деформации и упругой деформации:

$$\mathbf{F}_B^p = [\mathbf{F}_B^e]^{-1} \mathbf{F}_A$$

Правильные решения для  $\mathbf{F}_B^p$  и  $\mathbf{F}_B^e$  удовлетворяют:  $\dot{\mathbf{F}}_B^p \left(\dot{\mathbf{F}}_B^p\right)^{-1} = \dot{\gamma}_B \widetilde{\mathbf{N}}_B$ 

где  $\tilde{\mathbf{N}}_{B} = \frac{\tilde{T}_{B}}{\tau}$  – направление тензора напряжений;  $\dot{\gamma}_{B} = \dot{\gamma}_{0} (\bar{\lambda}_{B}^{p} - 1 + \xi)^{C} \left[ \frac{\frac{\tau}{\sqrt{2}}}{\tau_{base}} \right]^{M}$  – эффективная скорость ползучести;  $\tau = tr[\tilde{T}_{B}\tilde{T}_{B}]^{0.5}$  – норма Фробениуса для тензора напряжений;  $\bar{\lambda}_{B}^{p} = \sqrt{\frac{tr[(\mathbf{F}_{B}^{p})^{T}\mathbf{F}_{B}^{p}]}{3}}$  – неупругое растяжение системы;  $\frac{\dot{\gamma}_{0}}{(\tau_{base}})^{M}$ ,  $\xi, C, M$  – материальные параметры модели.

Поскольку  $\dot{\gamma}_B$  является функцией деформации ( $\bar{\lambda}_B^p$ ), а  $\tau$  зависит от тензора напряжений, уравнение расширяется до

$$\dot{\mathbf{F}}_{B}^{p} \left( \tilde{\mathbf{F}}_{B}^{p} \right)^{-1} = \dot{\gamma}_{0} \left( \bar{\lambda}_{B}^{p} - 1 + \xi \right)^{C} \left[ \frac{\tau}{\sqrt{2}} \right]^{M} \widetilde{\mathbf{N}}_{B}$$

После вывода последнего уравнения, соответствующий тензор напряжений для цепи (B) (рис. 3.6) добавляется к тензору напряжений из цепи (A) чтобы найти полное напряжение, как показано в уравнении

$$\sigma_{tot} = \sigma_A + \sigma_B.$$

Эта модель требует ввода семи констант материала для варианта изохоры и одной постоянной материала для варианта объемного потенциала.

Таблица 3.7

Ronerunita surrepliutu din siedetin Beprerposiu Boneu						
Константа	Свойство	Единицы				
Ronorumu	Choncerbo	измерения				
$\mu_0$	Начальный модуль сдвига для цепи (А)	Па				
$N_0$	$(\lambda_A^{lock})^2$ , где $\lambda^{lock}$ – предельное растяжение цепи	Безразмерная				
$\mu_1$	$\mu_1$ Начальный модуль сдвига для цепи (B) $N_1$ $(\lambda_B^{lock})^2$					
$N_1$						
$\frac{\dot{\gamma}_0}{(\tau_{\textit{base}})^{M}}$	Константа материала	$c^{-1}(\Pi a)^{-M}$				
С	Показатель деформации	Безразмерная				
M	М Показатель течения сдвига					
ŝ	Безразмерная					

Константы материала для модели Бергстрома-Бойса

#### Таблица 3.8

TB,BB,1,,,ISO	! Активируется модель Bergstrom-Boycec данными ISO
TBDATA,1,1.31	! Определяется начальный модуль сдвига µ0
TBDATA,2,9.0	! Определяется величина $N_0$
TBDATA,3,4.45	! Определяется начальный модуль сдвига µ <sub>1</sub>
TBDATA,4,9.0	! Определяется величина $N_1$
TBDATA,5,0.33	! Определяется степень смещения деформации
TBDATA,6,-1	! Определяется показатель деформации С
TBDATA,7,5.21	! Определяется показатель течения сдвига М
TB,BB,1,,,PVOl	! Активируется модель Bergstrom-Boyce с данными
	PVOL
TBDATA,8,0.001	! Определяется параметр 1/К, где К – объемный модуль

Пример задания свойств материала для модели Бергстрома-Бойса в Ansys

# 3.2.5. Эффект Маллинза

Эффект Маллинза – это явление, впервые обнаруженное и часто наблюдаемое в податливых наполненных полимерах. Он характеризуется снижением жесткости материала во время нагружения и наблюдается во время циклического нагружения, поскольку реакция материала по пути разгрузки заметно отличается от реакции по пути нагружения. Хотя подробности о механизмах, ответственных за эффект Маллинза, до конца не установлены и могут встречаться в поведении других материалов, в полимерах они могут заключаться в эффекте отслоения от частиц наполнителя, разделении кластеров частиц и перегруппировки полимерных цепей и частиц.

Модель Огдена-Роксбурга для описания эффекта Маллинза представляет собой модификацию с максимальной нагрузкой для уже имеющихся гиперупругих определяющих уравнений. В этой модели первичный материал моделируется с использованием одного из доступных потенциалов энергии, а их модификации с учетом эффекта Маллинза пропорциональны максимальной нагрузке в истории нагружения материала.

Псевдоупругая модель эффекта Огдена-Роксбурга [63] для описания эффекта Маллинза представляет собой модификацию стандартной термодинамической формулировки для гиперупругих материалов и задается следующим образом

 $W(F_{ij},\eta) = \eta W_0(F_{ij}) + \phi(\eta),$ 

где  $W_0(F_{ij})$  – исходная функция плотности энергии деформации;  $\eta$  – эволюционная скалярная переменная повреждений;  $\phi(\eta) - \phi$ ункция повреждения.

Произвольные пределы  $0 < \eta \le 1$  накладываются с  $\eta = 1$ , определяемым как состояние материала без каких-либо изменений из-за эффекта Маллинза. Тогда, наряду с равновесным состоянием, функция поврежденности определяется следующим образом:

$$\phi(1) = 0,$$
  
$$\phi'(\eta) = -W_0(F_{ij}),$$

который неявно определяет параметр Огдена-Роксбурга η. Тогда, используя это уравнение, девиаторная часть второго тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа равна

$$S_{ij} = 2 \frac{\partial W}{\partial c_{ij}} = \eta 2 \frac{\partial W}{\partial c_{ij}} = \eta S_{ij}^0.$$

Модифицированная функция повреждений Огдена-Роксбурга [64] имеет следующую функциональную форму переменной повреждения

$$\eta = 1 - \frac{1}{r} erf\left[\frac{W_m - W_0}{m + \beta W_m}\right],$$

где r, m и  $\beta$  – величина эффекта Маллинза, энергетическая отсылка, материальный параметр переменной повреждения и  $W_m$  – максимальный исходный потенциал в интервале времени

$$t \in [0, t_0] \ W_m = \max_{t \in [0, t_0]} [W_0(t)].$$

Касательный тензор жесткости **D**<sub>*ijkl*</sub> для определяющего уравнения выражается следующим образом

$$\mathbf{D}_{ijkl} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial c_{ij} \partial c_{kl}} = 4\eta \frac{\partial^2 W_0}{\partial c_{ij} \partial c_{kl}} + 4 \frac{\partial W_0}{\partial c_{ij}} \frac{\partial \eta}{\partial c_{kl}},$$

а дифференциал для η в этом выражении – через

 $\frac{\partial \eta}{\partial C_{ij}} = \frac{2}{\sqrt{\pi r}(m + \beta W_m)} e\left(\frac{W_m - W_0}{m + \beta W_m}\right) \frac{\partial W_0}{\partial C_{ij}}.$ 

#### Таблица 3.9

#### Константы материала модифицирующей модели Огдена-Роксбурга для учета эффекта Маллинза

Константа	Свойство	Единицы измерения
r	Величина эффекта Маллинза	Безразмерная
т	Энергетическая отсылка	Па
β	Поправочный коэффициент Маллинза	Безразмерная

#### Таблица 3.10

# Пример задания свойств материала для модифицирующей модели Огдена-Роксбурга в Ansys

TB,CDM,1,,3,PSE2	! Активируется модель Ogden-Roxburgh
TBDATA,1,1.5,1.0E6,0.2	! Определяются параметры r, m и β

# 3.3. Выбор определяющих уравнений и определение их параметров с использованием программного обеспечения MCalibration

Рассматривая представленные уравнения нелинейного гиперупругого поведения материалов видно, что работа с любой моделью требует определения соответствующих параметров материала на основе экспериментальных данных. И это является нетривиальной задачей, если расширенная модель материала выходит за рамки закона Гука и является нелинейной. Чтобы облегчить определение параметров, определяющих уравнения для численного моделирования, компания Polymer FEM разработала программу MCalibration. Это программное приложение позволяет в полуавтоматическом режиме извлекать соответствующие параметры материала из экспериментальных данных.

Программный продукт MCalibration предназначен для нахождения параметров распространенных определяющих соотношений, предназначенных для описания механического поведения материалов под нагрузкой по экспериментальным результатам. Большинство определяющих уравнений, учитывающих нелинейное поведение материалов, используются в известных программных комплексах для проведения инженерного анализа и научных изысканий, таких как Ansys, Abaqus, LS- Dyna. Рассчитанные с использованием MCalibration параметры материалов позволяют описывать механическое поведение материалов с использованием моделирования со значительно большей точностью, чем это возможно при помощи встроенных модулей упомянутых программных комплексов.

## 3.3.1. Работа с программным обеспечением MCalibration

В инженерной научной практике при моделировании и проведении расчетов на прочность и определение напряженнодеформированного состояния материалов и конструкций расчетчик сталкивается с проблемой выбора определяющих уравнений, которые максимально точно должны описывать отклик системы на прилагаемые нагрузки. При этом выбранные математические модели описывают поведение материала, учитывая особенности развития напряжений и деформаций. Вопросов с выбором определяющего уравнения не возникает при линейноупругом поведении материала при малых степенях деформации и ограничивается на использовании закона Гука. Но при больших степенях деформаций отклик материала на прилагаемые нагрузки чаще всего имеет нелинейный характер, поэтому определяющие уравнения описываются сложными многопараметриполиномами. Ha этапе подготовки физикоческими механической модели возникает необходимость дополнительных действий, заключающихся в определении параметров уравнений, так называемых материальных констант, которые рассчитываются исходя из экспериментальных данных.

Для расчета материальных констант по экспериментальным данным существуют алгоритмы, зашитые в специализированное программное обеспечение. Одним из доступных программных обеспечений является MCalibration, принципы работы с которым рассмотрим в этом разделе.

**Интерфейс программного обеспечения MCalibration.** Программа обладает интерактивным интуитивно-понятным интерфейсом. В случае затруднений в работе или необходимости освоения теоретического материала, существует возможность обращения к разделу помощи. Далее будет рассказано об основных этапах проведения работы по определению параметров определяющих уравнений.



Welcome: этот раздел можно использовать для открытия недавно использованных файлов калибровки (называемых mcal-файлами).

Data: этот раздел используется для просмотра и редактирования экспериментальных данных.

Calibrate: этот раздел используется для калибровки моделей материала и для проверки отклика модели материала.

Library: содержит пользовательскую коллекцию уже откалиброванных моделей для различных материалов.

**Ввод исходных данных.** В качестве исходных данных используются деформационные диаграммы, полученные экспериментально при сдвиге, одноосном, многоосном растяжении и сжатии образцов. Для этого случая требуются файлы, содержащие три столбца: время, напряжение и деформация. MCalibration может импортировать текстовые файлы (.txt, .csv) и не может импортировать файлы Excel (.xlsx, .xls). Все файлы должны начинаться с нулевого времени (с), напряжения (МПа) и деформации (%).

Для загрузки экспериментальных данных перейдите в раздел «Данные», выбрав «Data» на панели инструментов слева. Нажмите «Load data file» чтобы прочитать файлы экспериментальных данных.

Затем требуется указать, что содержат разные столбцы данных.

1. Для этого выберите столбец, вызовите контекстное меню, кликнув столбец правой кнопкой мыши.

2. Затем выберите «Set column name».

3. Выберите название и щелкните «Ok».

Для создания нагружения модели материала нажмите «Create Load Case».

🧾 ни	ть 60 мкм — Б	локнот			-		$\times$
Файл	Правка Фо	рмат Вид	Справка				
ø	0	0					^
0.18	3.9	1.95					
0.27	17.8	8.9					
0.37	35.6	17.8					
0.46	53.3	26.65					
0.55	71.5	35.75					
0.65	89.9	44.95					
0.74	108.1	54.05					
1	143.3	71.65					
1.02	159.3	79.65					
1.11	172.8	86.4					
1.2	183.6	91.8					
1.3	189.9	94.95					
1.48	192.8	96.4					
1.58	192.9	96.45					
1.67	191.8	97					
1.76	191	97.4					
1.86	191.3	97.55					
1.95	191.2	97.6					
2.14	191.2	97.6					
2.23	191	97.7					
2.32	190.9	97.75					
2.41	192	98.3					
2 54	193 3	98 95					~
<							>
				Windows (CRI	Стр 1, стлб 1	100%	

Рис. 3.7. Структура файла, содержащего экспериментальные данные

File Ed	it Da	ata	Load Cases Material Model	Simulation	Graph View Help				
Quit	(Create	Data	Load Data File Save Data	Save Data File As	Reload Data File	Clear Table	Create Load Case	Preference	25
Welcom	i i i	Data File na	ame: 10% сетка.txt					Graph	
τ,	1	Vr Ro	ws: 378, Nr Columns: 3	View Data Fi	le Info Help	ຳ Undo	🥐 Redo	X	esperimental cata
Data			Set Column Name		Sm	ooth Data		34	
1			Goto Line		Change Nur	ib Set	Column Name		
Calibrat			Make Column Start from	0	Multiply	/ Rer	move Selected Rows		
			Column 1	Col	umn 2	- Rei	nove Selected Colum	nns	
		1	-0.00118	0	0		io cine		
Library		2	0.00118	0	0	Sm	ooth Column ange Nr Data Points		
Tech	t	3	0.01179	0	0	Sor	t Column		
		4	0.0224	0.14286	0.07	4 Ma	ke Column Start from	n 0	
Online		5	0.03183	0.14286	0.07	4 Mu	Itiply or Add Cells		
		6	0.0389	0.14286	0.07	bA bA	d Row(s) d Column		
PolytiMo	d	7	0.04834	0.28571	0.14	a Rev	verse Column		
		8	0.05541	0.28571	0.143	2 Co	nvert Eng. ε-σ to True		
		9	0.06366	0.28571	0.143	Co	nvert True ε-σ to Eng.		
PolymerFE						Co	nvert Stress Units		Courtin 1
6.1.0		Righ	t dick after selecting a group of ce	ils for more data	options.	Ad	d Transverse Strain Co puert Strain to Plattic	olumn	X-Axis: Column 1 V T-Axis: Column 2 V
				Opt Met	hod: Library		invert straint to Plastic	Juan	6.68459 Run Time: 1.599 s Function Evaluations: 1

Рис. 3.8. Интерфейс программы MCalibration

Калибровка. MCalibration переключается в раздел «Calibrate» при нажатии кнопки «Save» в диалоговом окне варианта нагружения.

Необходимо выбрать требуемую модель материала. Выберите «Set Material Model». В появившемся окне выберите модель и нажмите «Ok». Затем MCalibration выбирает первоначальное предположение о параметрах материала на основе имеющихся экспериментальных данных. Выберите «Run Once» чтобы рассчитать прогнозируемую диаграмму напряжения – деформации для текущей модели материала. Полученные на этом шаге результаты – это еще не откалиброванная модель материала, а лишь первоначальные предположения.



Рис. 3.9. Интерфейс программы при верификации параметров модели

Каждый параметр может быть либо фиксированным, либо частью оптимизации. Столбец «Optimize» указывает на состояние параметров. В оптимизацию включаются все параметры с ненулевым положительным значением.

Если сходимость расчетной и экспериментальной моделей достаточно высока, то нажмите «Save Mcal File», чтобы сохранить текущий файл калибровки. При необходимости оптимизации параметров материала нажмите «Run Calibration».

Следующим шагом является экспорт откалиброванной модели.

Для экспорта модели щелкните «Export Model». Модель материала можно экспортировать в форматы основных программных систем конечно-элементного анализа. В появившемся диалоговом окне можно изменить систему измерения. Чтобы сохранить изображения полученных экспериментальных и расчетных диаграмм, выберите «Save the graph to file». В появившемся диалоговом окне задайте параметры изображения и нажмите «Save image to file».

MCalibration сохраняет информацию моделирования в файле с расширением mcal.

Файл mcal – это файл XML, который можно редактировать с помощью текстового редактора.

Begistrem boxce – Enorwer	_	0	×	
Файл Правка Формат Вид Справка				
<pre>Number / Provide / Pr</pre>				Î
In the second se				
×				

Рис. 3.10. Структура выходного файла с результатами

Файл содержит все экспериментальные данные и информацию о различных загружениях и моделях материалов.

Поскольку mcal-файл содержит экспериментальные данные, файл можно переместить в новый каталог и продолжить работу.

Экспериментальные данные, которые хранятся в mcal-файле, включают как исходные данные, так и текущую версию данных.

При необходимости исходные и модифицированные наборы экспериментальных данных можно экспортировать в отдельные файлы данных.

# 3.3.2. Определение параметров распространенных расчетных моделей и верификация диаграммы напряжение-деформация, полученных на их основе

В практической части работы рассмотрен пример подбора определяющих уравнений и определение с использованием MCalibration их материальных параметров на основе полученных экспериментальных данных.

Для описания механического отклика материала образцов на прилагаемые нагрузки выбирали определяющие уравнения, использующиеся в программном комплексе Ansys для последующего применения при проведении анализа.

Для определения параметров определяющих уравнений и получения расчетных кривых использовали несколько различных моделей гиперупругих материалов из библиотеки ANSYS, доступной в программном приложении MCalibration. Полученные расчетные кривые сравнивали с экспериментальными кривыми одного цикла растяжения трикотажной ленты.

Модели Гента и Нео-Гука, результаты определения констант для которых, представлены на рис. 3.11, 3.12 соответственно, имеют грубое описание деформационного поведения на участке нагружения. Расчетная диаграмма нагружения выглядит в виде линейной зависимости, что со значительной долей погрешности может описывать механическое поведение на этом участке нагружения при значительных степенях деформации. При использовании выбранных моделей разгрузка происходит упруго без остаточных деформаций строго по пути нагружения. В табл. 3.11 и 3.12 представлены параметры материала для выбранных уравнений.

Добавление модели Огдена-Роксбурга для учета эффекта Маллинза привносит в описание механического поведения наглядное представление о поведении материала при нагрузке и разгрузке, что коррелирует с экспериментальными данными. Примеры подобного поведения представлен результатами калибровки для моделей Муни-Ривлина, Бергстрома-Бойса для значений 5 % продольной деформации на рис. 3.13, 3.14. Константы определяющих уравнений для этого случая представлены в табл. 3.13, 3.14.



Рис. 3.11. Деформационная диаграмма 1 цикла растяжения на 5 % трикотажной ленты из проволоки 60 мкм. Модель Гента

Таблица	3.	1	1
---------	----	---	---

#### Константы материала для модели Гента

Константа	Значение	Единицы измерения
μ	11,4113	МПа
d	1,1	1/МПа
$J_m$	5,93504e-08	



Рис. 3.12. Деформационная диаграмма 1 цикла растяжения на 5 % трикотажной ленты из проволоки 60 мкм. Модель Нео-Гука

Таблица	3.	1	2
---------	----	---	---

Константа	Свойство	Единицы измерения
μ	11,4517	МПа
d	2.75292e-06	1/МПа

Константы материала для модели Нео-Гука



Рис. 3.13. Деформационная диаграмма 1 цикла растяжения на 5% трикотажной ленты из проволоки 60 мкм. Пятипараметрическая модель Муни-Ривлина с эффектом Маллинза

Таблица 3.13

#### Константы материала для пятипараметрической модели Муни-Ривлина с эффектом Маллинза при 5 % продольном удлинении образца

Константа	Значение	Единицы измерения
$C_{10}$	6,0282	МПа
C <sub>01</sub>	0,0994134	МПа
C <sub>11</sub>	-0,00249934	МПа
$C_{20}$	0,0082869	МПа
$C_{02}$	-0,00155574	МПа
d	0,000462216	1/МПа
r	0,0465485	Безразмерная
М	1,00761	МПа
β	0,549903	Безразмерная



Рис. 3.14. Деформационная диаграмма 1 цикла растяжения на 5 % трикотажной ленты из проволоки 60 мкм. Модель Бергстрома-Бойса с эффектом Маллинза

Таблица 3.14

Константа	Значение	Единицы измерения
$\mu_0$	10,02	МПа
$N_0$	26,576	Безразмерная
$\mu_1$	11,706	МПа
$N_1$	7,083	Безразмерная
$rac{\dot{\gamma}_0}{\left( au_{base} ight)^M}$	6,166e-12	$c^{-1}(M\Pi a)^{-M}$
С	-3,051	Безразмерная
M	1,032	Безразмерная
ξ	0,012	Безразмерная
r	1,012	Безразмерная
М	0,051	МПа
β	0,035	Безразмерная

Константы материала для модели Бергстрома-Бойса с эффектом Маллинза при 5 % продольном удлинении образца

Линейное поведение расчетной зависимости напряжение – деформация на рис. 3.11, 3.12 обуславливается небольшим количеством констант в выбранных математических моделях. Пятипараметрическая модель Муни-Ривлина (рис. 3.13) используется для описания поведения гиперупругих материалов до 100 % деформации и имеет большее количество констант, описываюцих материал. Это дает модели преимущество для описания деформационной диаграммы растяжения трикотажной ленты, но участок нагрузки остается линейным. В результате подгонки наибольшее реологическое подобие экспериментальной и расчетной кривых обнаружено при калибровке модели Бергстрома-Бойса (рис. 3.14).

Для описания 1 цикла растяжения трикотажной ленты использовали модель Бергстрома-Бойса. При подгонке с использованием этой модели использовали 11 констант. Их значения приведены в табл. 3.15.



Рис. 3.15. Деформационная диаграмма 1-го цикла растяжения на 10% трикотажной ленты из проволоки 60 мкм. Модель Бергстрома-Бойса с эффектом Маллинза

#### Таблица 3.15

#### Значения констант расчетной модели Бергстрома-Бойса для деформационной диаграммы 1 цикла растяжения на 5 % и 10 % трикотажной ленты из проволоки 60 мкм

	Константа	5 %	10 %
$\mu_0$	Начальный модуль сдвига для цепи (А)	10,02	15,068
$N_{0}$	$(\lambda_A^{lock})^2$ , где $\lambda^{lock}$ – предельное растяжение цепи	26,576	21,058
$\mu_1$	Начальный модуль сдвига для цепи (В)	11,706	23,141
$N_{I}$	$(\lambda_B^{\ \ lock})^2$	7,083	23,837
$rac{\dot{\gamma}_0}{( au_{base})^M}$	Константа материала	6,166e-12	8,073
С	Показатель деформации	-3,051	-4,987
М	Показатель течения сдвига	1,032	11,454
ξ	Степень смещения деформации	0,012	0,003
r	Величина эффекта Маллинза	1,012	1,148
М	Энергетическая отсылка	0,051	0,089
β	Поправочный коэффициент Маллинза	0,035	0,004



Рис. 3.16. Деформационная диаграмма при циклическом растяжении (5 циклов) трикотажной ленты из проволоки 60 мкм, растяжение 10 %. Модель Бергстрома-Бойса



Рис. 3.17. Деформационная диаграмма при циклическом растяжении (5 циклов) трикотажной ленты из проволоки 60 мкм, растяжение 20 %. Модель Бергстрома-Бойса

При подгонке циклического растяжения трикотажной ленты наибольшее подобие показала модель Бергстрома-Бойса, с учетом эффекта Маллинза из библиотеки программной системы конечно-элементного анализа Ansys. Эта вариация модели содержит 11 калибрующихся параметров. Значения параметров представлены в табл. 3.16.

Таблица 3.16

Значения констант расчетной модели Бергстрома-Бойса для деформационной диаграммы циклического растяжения (5 циклов) на 10 % и 20 % трикотажной ленты из проволоки 60 мкм

	Константа	10 %	20 %
$\mu_0$	Начальный модуль сдвига для цепи (А)	116,265	154,353
$N_{0}$	$(\lambda_A^{lock})^2$ , где $\lambda^{lock}$ – предельное растяжение цепи	8,651	27,283
$\mu_1$	Начальный модуль сдвига для цепи (В)	4348,99	3080,18
$N_{I}$	$(\lambda_B^{\ \ lock})^2$	21,2303	31,791

Константа		10 %	20 %
$\frac{\dot{\gamma}_0}{(\tau_{\textit{base}})^{\textit{M}}}$	Константа материала	1,538e-09	2,517e-16
С	Показатель деформации	-0,74	-1,439
М	Показатель течения сдвига	8,063	8,022
ξ	Степень смещения деформации	2,554e-05	0,009
r	Величина эффекта Маллинза	1,202	1,084
М	Энергетическая отсылка	2,372	4,702
β	Поправочный коэффициент Маллинза	0,056	0,0006

Е.С. Марченко, А.А. Козулин, А.В. Ветрова, Г.А. Байгонакова

Константы, полученные по результатам калибровки, являются численными параметрами гиперупругой среды и могут использоваться при описании деформационного поведения при однократных и многократных нагружениях образцов в программном комплексе Ansys.

#### Контрольные вопросы

1. Где используются изделия, изготовленные из проволоки никелида титана?

2. В чем особенности выбора определяющего уравнения для описания механического поведения материалов, обладающих сверхэластичностью?

3. Отчего зависит точность инженерного прогноза функциональных свойств при проектировании изделий медицинского назначения из никелида титана?

4. Чем осложнятся аналитическое решение задачи о механическом поведении материала со сверхэластичными свойствами?

5. В чем заключается требование биомеханической совместимости живых тканей и создаваемых имплантатов?

6. В чем заключаются особенности гиперупругого механического поведения металлотрикотажа из проволоки никелида титана и что общего у него с эффектом сверхэластичности?

7. Что такое эффект Маллиза для гиперупругих материалов?

8. Как формулируется метод численного решения задач о деформации материалов с нелинейными свойствами?

9. О каких определяющих уравнениях, существующих для описания гиперупругого поведения материалов, вы узнали?

10. Для чего используется программа MCalibration?

#### Литература

1. Otsuka K. Physical metallurgy of Ti-Ni-based shape memory alloys / K. Otsuka, X. Ren // Progress in Mater. Sci. 2005. № 50. P. 511–678.

2. Медицинские материалы и имплантаты с памятью формы: в 14 т. / под ред. В.Э. Гюнтера. Томск: Изд-во МИЦ, 2011. Т. 1. 534 с.

3. Материалы с эффектом памяти формы: Справ. изд.: в 4 т. / под. ред. В.А. Лихачева. СПб.: НИИХСПбГУ, 1998. Т. 3. 474 с.

4. Курдюмов Г.В. Бездиффузионные (мартенситные) превращения // Журнал технической физики. 1948. Т. 18, вып. 8. С. 999–1025.

5. Wang F.E. Crystal structure and a unique «Martensitic» transformation of TiNi / F.E. Wang, W.J. Buehler, S.J. Pichart // Journal of Applied Physics. 1965. Vol. 36, № 10. P. 3232–3239.

6. Хачин В.Н. Структурные превращения, физические свойства и эффекты памяти в никелиде титана / Ю.И. Паскаль, В.Э. Гюнтер, Л.А. Монасевич, В.П. Сивоха // Физика металлов и металловедение. 1978. Т. 46, вып. 3. С. 511–520.

7. Wayman C.M. Introduction to the crystallography of martensitic transformations. NewYork: Macmillan, 1964. 193 p.

8. Christian J.W. The theory of transformations in metals and alloys. Oxford: Pergamon, 2002. 1200 p.

9. Гюнтер В.Э. Гистерезисное формоизменение в никелиде титана в условиях мартенситной деформации и демпфирования / В.Э. Гюнтер, В.Н. Ходоренко, Т.Л. Чекалкин // Материалы с памятью формы и новые технологии в медицине. 2010. С. 328–332.

10. Wayman C.M. The phenomenological theory of martensite crystallography / C.M. Wayman // MMTA. 1994. Vol. 25, № 9. P. 1787–1795.

11. Wasilewski R.J. On the nature of the martensitic transformation / R.J. Wasilewski // Metallurgical Transactions A. 1975. Vol. 6. P. 1405–1418.

12. Пушин В.Г. Предпереходные явления и мартенситные превращения / В.Г. Пушин, В.В. Кондратьев, В.Н. Хачин. Екатеринбург: УрО РАН, 1998. 368 с.

13. Wang F.E. Mechanism of TiNi martensitic transformation and crystal structure of TiNi II and III phases / F.E. Wang, S.J. Piscart, H.A. Alperin // Journal of Applied Physics. 1972. Vol. 43, № 1. P. 97–112.

14. Сплавы никелида титана с памятью формы. Ч. 1: Структура, фазовые превращения и свойства / под ред. В.Г. Пушина. Екатеринбург: УроРАН, 2006. 438 с.

15. Otsuka K. Recent developments in the research of shape memory alloys / K. Otsuka, X. Ren // Intermetallics. 1999. Vol. 7, № 5. P. 511–528.

16. Dautovich D.P. Phase Transformations in TiNi / D.P. Dautovich, G.R. Purdy // Can.Metall.Q. 1965. Vol. 4, № 2. P. 129–143.

17. Vatanayon S. Martensitic Transformations in  $\beta$  Phase Alloys / S. Vatanayon, R.F. Hehemann // Shape Memory Effects in Alloys. New York: Plenum, 1975. P. 115–145.

18. Mechanical twinning in  $Ti_{50}Ni_{47}Fe_3$  and  $Ti_{49}Ni_{51}$  alloys / E. Goo [et al.] // ActaMet. 1985. Vol. 33, No 9. P. 1725–1733.

19. Structural study of R-phase in Ti-50.23 at. %Ni and Ti-47.75 at. %Ni-1.50 at. %Fe alloys / T. Hara [et al.] // Mater. Trans. JIM. 1997. Vol. 38. P. 11–17.

20. Марченко Е.С. Структурно-фазовые состояния и физикомеханические свойства сплавов на основе никелида титана, легированных ванадием и ниобием: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Е.С. Марченко. Томск, 2012. 164 с.

21. Клопотов А.А. Особенности изменения кристаллической решетки при мартенситных превращениях в интерметаллидах в сплавах на основе никелида титана / А.А. Клопотов, Е.С. Марченко // Имплантаты с памятью формы. 2007. № 1-2. С. 78–92.

22. Структуры моноклинных фаз в никелиде титана I. Каскад превращений В2→В19→ В19′ / В.И. Воронин [и др.] // ФММ. 2000. Т. 89, № 1. С. 16–22.

23. Гюнтер В.Э., Домбаев Г.Ц., Сысолятин П.Г. и др. Медицинские материалы и имплантаты с памятью формы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. 486 с.

24. Michal G.M. The structure of TiNi martensite / G.M. Michal, R. Sinclair // ActaCrystallogr. 1981. Vol. 37. P. 1803–1807.

25. Effect of thermal cycling on the transformation temperatures of Ti-Ni alloy / S. Miyazaki [et al.] //Acta Metall. 1986. Vol. 34. P. 2045–2051

26. Otsuka K., Ren X. / Progressin Materials Science. 2005. Vol. 50. P. 511–678.

27. Quandt E. Superelastic NiTi thin films for medical applications / E. Quandt, C. Zamponi // Adv. Sci. Technol. 2008. Vol. 59. P. 190–197.

28. Wu S.K. and Wayman C.M. Martensitic transformations and the shape memory effect in  $Ti_{50}Ni_{10}Au_{40}$  and  $Ti_{50}Au_{50}$  alloys // Metallography. 1987. Vol. 20 (3). P. 359–376.

29. Ortin J. Thermally induced martensitic transformations: theoretical analysis of a complete calorimetric run / J. Ortin // Thermochimica Acta. 1987. Vol. 121. P. 397–412.

30. Otsuka K., Shimizu K. Pseudoelasticity and shape memory effects in alloys // Int. Met. Rev. 1986. Vol. 31 (1). P. 93–114.

31. Manosa L., Planes A., Vives E., Bonnot E. and Romero R. The use of shape-memory alloys for mechanical refrigeration // Funct. Mater. Lett. 2009. Vol. 02 (02). P. 73–78.

32. Nnamchi P. A review on shape memory metallic alloys and their critical stress for twinning / P. Nnamchi, A. Younes, S. González // Intermetallics. 2019. Vol. 105. P. 61–78.

33. Чернов Д.Б. Принципы конструкционного применения материалов с термомеханической памятью. М., 1984. 150 с.

34. Thermoelasticity, pseudoelasticity and the memory effects associated with martensitic transformations / H. Warlimont [et al.] // J Mater. Sci. 1974. Vol. 9. P. 1521–1535.

35. Miyazaki S. The Shape Memory Mechanism Associated with the Martensitic Transformation in Ti-Ni alloys—I. Self-accommodation / S. Miyazaki, K. Otsuka, C.M. Wayman // Acta Metall. 1989. Vol. 37, № 7. P. 1873–1884.

36. Materials and Geoenvironment. 2008. Vol. 55, No. 2. P. 173–189. Review scientific paper Shape memory alloys in medicine

37. Thermomechanical aspects of NiTi / J.A. Shaw, S. Kyriakides // J. Mech. Phys. Solids. 1995. Vol. 43, № 8. P. 1243–1281.

38. Microstructures and martensitic transformation behavior of superelastic Ti-Ni-Ag scaffolds / S. Li [et al.] // J. Mater. Res. Bull. 2016. Vol. 82. P. 39–44.

39. Honma T. TiNi-based shape memory alloys / T. Honma // Shape memory alloys / ed. H. Funakubo. N.Y.: Gordon and Breach Science Publishers, 1987. P. 61–172.

40. Paremer A., Fumer S., Rice D.P. Musculoskeletal Conditions in the United States. 1st ed. Park Ridge: American Academy of Orthopaedic Surgeons, 1992.

41. Petrini L., Migliavacca F. et al. «Computational Studies of Shape Memory Alloy Behavior in Biomedical Applications» // Journal of Biomedical Engineering. 2005. № 127. P. 716–725.

42. Arghavani J., Auricchio F., Naghdabadi R. A finite strain kinematic hardening constitutive model based on Hencky strain: General framework, solution algorithm, and application to shape memory alloys // International Journal of Plasticity. 2011. № 27. P. 940–961.

43. Maccabi A., Shin N., Namiri N., Bajawa et. al. Quantitative characterization of viscoelastic behavior in tissue-mimicking phantoms and ex vivo animal tissues // PLoS ONE. 2018. Vol. 13, is. 1. doi.org/10.1371/journal.pone.0191919.

44. Lattore M. The relevance of transverse deformation effects in modeling soft biological tissues / M. Lattore, X. Romero, F. Montans // International Journal of Solids and Structures. 2016. Vol. 99, P. 57-70. doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.08.006.

45. S. Victor J., Muthu. Polymer Ceramic Composite Materials for Orthopedic Applications-Relevance and Need for Mechanical Match and Bone Regeneration // Journal of Mechatronics. 2014. Vol. 2, is. 1. DOI: 10.1166/jom.2014.1030.

46. Yadav S., Ganswar S. An Overview on Recent progresses and future perspective of biomaterials // Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 404. DOI:10.1088/1757-899X/404/1/012013.

47. Andre' a M., Wriggers P. Thermo-mechanical behaviour of rubber materials during vulcanization // International Journal of Solids and Structures. 2005. № 42. P. 4758–4778.

48. Zahra Matin Ghahfarokhi, Mahdi Moghimi Zand, Mehdi Salmani Tehrani, Brianna Regina Wendland, Roozbeh Dargazany. A visco-hyperelastic constitutive model of short- and long-term viscous effects on isotropic soft tissues // J Mechanical Engineering Science.  $N_{0}$  0(0). P. 1–15.

49. Khajehsaeid H., Arghavani J., Naghdabadi R., Sohrabpour S. A visco-hyperelastic constitutive model for rubber-like materials: A rate-dependent relaxation time scheme // International Journal of Engineering Science. 2014. № 79. P. 44–58.

50. Mohd Afandi P. Mohammed. Visco-Hyperelastic Model for Soft Rubber-like Materials (Model Likat-Hiperkenyal untuk Bahan Lembut seperti Getah) // Sains Malaysiana. 2014. № 43 (3). P. 451–457.

51. Saburi T., Nenno S., Tamura I. (Ed.). Proceedings of the International Conference on Martensitic Transformations, The Japan Inst Metals. Japan, 1986. P. 671.

52. Waitz T., Kazykhanov V., Karnthaler H.P. Martensitic phase transformations in nanocrystalline NiTi studied by TEM // Acta Materialia. January 2004, Vol. 52, is. 1, 5 P. 137–147 https://doi.org/10.1016/j.actamat.2003.08.036

53. Корнеев В.С., Корнеев С.А. Феноменологическая модель гипервязкоупругости эластомеров при неизменной ориентации главных осей напряжений в сопутствующей системе отсчета // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 3. С. 149–165.

54. Козулин А.А. Моделирование деформации и оценка прочности элементов конструкций из полимерных композиционных материалов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2008.
55. Ковальчук Б.И., Лебедев А.А., Уманский С.Э. Механика неупругого деформирования материалов и элементов конструкций. Киев: Наукова Думка, 1987. 280 с.

56. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.

57. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.

58. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов / под ред. Г.И. Марчука. М.: Мир, 1986. 318 с.

59. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.

60. Воропаева И.Г., Козулин А.А., Миньков Л.Л., Шрагер Э.Р. Нестационарное поведение заряда ТТ бессоплового РДТТ под действием газодинамической нагрузки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 72. С. 48–59.

61. Crisfield M.A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol. 2: Advanced Topics. John Wiley & Sons, 1997.

62. Daland H., Kaliske M. Bergstrom-Boyce Model for Nonlinear Finite Rubber Viscoelasticity: Theoretical Aspects and Algorithmic Treatment for the FE Method // Computational Mechanics. 2009. Vol. 44. P. 809–823.

63. Ogdenand R.W., Roxburgh D.G. A Pseudo-Elastic Model for the Mullins Effect in Filled Rubber // Proceeding softhe Royal Society of London, Series A (Mathematical and Physical Sciences). 1999. Vol. 455, № 1988. P. 2861–2877.

64. Boseand K.J., Hurtado A. et.al. Modeling of Stress Softening in Filled Elastomers // Constitutive Models for Rubber III Proceedings of the 3rd European Conference on Constitutive Models for Rubber (ECCMR). 223-230 / ed. by J.C. Busfield, A.H. Muhr. London: Taylor and Francis, 2003.

## Список сокращений

А – аустенит

М-мартенсит

*В2-фаза* – высокотемпературная аустенитная фаза

*R-фаза*, *B19-фаза*, *B19'-фаза* – низкотемпературные мартенситные фазы

*МП* – мартенситное превращение

 $M_{\rm s}$  – температура начала прямого мартенситного превращения

 $M_f$  – температура конца прямого мартенситного превращения, которая представляет собой температуру, при которой аустенитная фаза полностью превращается в мартенситную фазу

 $A_s$  – температура начала обратного мартенситного превращения, при которой мартенситная фаза начинает превращаться в исходную (аустенитную) фазу

 $A_f$  – температура конца обратного мартенситного превращения, которая представляет собой температуру, при которой мартенситная фаза полностью превращается в аустенитную фазу

 $\Delta G_{xum}^{A \to M}$  – химическая составляющая изменения свободной энергии  $\Delta G_{ynp}^{A \to M}$  – упругий вклад в изменение нехимической составляющей свободной энергии

 $\Delta G_{nos}^{A \to M}$  – поверхностный вклад в изменение нехимической составляющей свободной энергии

 $S_A(T)$  – энтропия аустенита

 $S_M(T)$  – энтропия мартенсита

 $Э\Pi \Phi$  – эффект памяти формы

СЭ – эффект сверхэластичности

 $\sigma^{A-M}(T)$  – напряжение мартенситного сдвига;

 $\varepsilon^{A-M}$  – деформация, соответствующая полому мартенситному превращению

 $\Delta H$  – энтальпия превращения

*T*<sub>0</sub> – температура фазового равновесия, при которой аустенит и мартенсит имеют одинаковую свободную энергию

 $M_{d_{-}}$  – температура, при которой  $\sigma^{A-M}(T)$  равна критическому напряжению скольжения

МКЭ – метод конечных элементов

δ – символ виртуального перемещения

 $\delta W_1^i$ ,  $\delta W_2^i$  – приращение работы внутренних напряжений на виртуальных деформациях и приращение внутренних напряжений на виртуальных перемещениях соответственно

 $\delta W^i$  – виртуальная энергия деформации

V-объем исследуемого тела

 $\sigma_{kl}$  – компоненты второго тензора напряжений Пиола-Кирхгофа

 $\delta W_1^e$ ,  $\delta W_2^e$ ,  $\delta W_3^e$  – приращение работы внешних усилий на виртуальных перемещениях, работа давления на поверхности тела, работа узловых сил в объеме тела соответственно

δW<sup>e</sup> – внешняя виртуальная работа сил

- *u<sub>i</sub>* компоненты вектора перемещения
- α коэффициент линейного теплового расширения

δ<sub>*ij*</sub> – символ Кронеккера

*∆Т* – разница температур относительно эталонной температуры

S<sub>ii</sub> – компоненты второго тензора напряжений Пиола-Кирхгофа

W- функция плотности энергии деформации

*E*<sub>*ij*</sub> – компоненты тензора Лагранжа

Сіі – компоненты правого тензора деформации Коши-Грина

*Е*<sub>*ij*</sub> – деформации Лагранжа

 $E_{\left(\frac{1}{2}\right)ij}$  – номинальная деформация в текущей конфигурации

Сіі – тензор деформации

F<sub>ij</sub> – компоненты тензора градиентов деформации

X<sub>i</sub> – недеформированное положение точки в направлении *i* 

 $x_i = X_i + u_i$  – деформированное положение точки в направлении *i* 

*u<sub>i</sub>* – перемещение точки в направлении *i* 

U<sub>ij</sub> – компоненты правого тензора растяжения

*т*<sub>*i i*</sub> – напряжения Кирхгофа

*σ*<sub>*ij*</sub> – напряжения Коши

F<sub>ij</sub> – компоненты тензора градиентов деформации

 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$  – собственные значения матрицы  $C_{ij}$ 

 $I_1, I_2,$  и  $I_3$  – первый, второй и третий инварианты матрицы  $C_{ij}$  соответственно

J-общий объем

J<sub>el</sub> – коэффициент упругого объема

*J*<sub>th-</sub>коэффициент теплового объема

α – коэффициент температурного расширения

*∆Т* – разница температур относительно эталонной температуры

W- функция плотности энергии деформации

µ – начальный модуль сдвига материала;

 $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}$  – параметры уравнения пятипараметрической модели Муни-Ривлина

*D* – параметр несжимаемости

К – объемный модуль упругости

Е – модуль упругости Юнга

υ – коэффициент Пуассона

*J<sub>m</sub>* – предельная величина

σ<sub>A</sub> – напряженное состояние в цепи А модели Бергстрома-Бойса

µ<sub>A</sub> – начальный модуль сдвига цепи А модели Бергстрома-Бойса

 $\lambda_A^{lock}$  – предел растяжения цепи А модели Бергстрома-Бойса

К – объемный модуль

 $L^{-1}(x)$  – обратная функция Ланжевена

 $\widetilde{N}_{B}$  – направление тензора напряжений

 $\dot{\gamma}_B$  – эффективная скорость ползучести

т – норма Фробениуса для тензора напряжений

 $\bar{\lambda}^p_B$  – неупругое растяжение системы

 $\frac{\dot{\gamma}_0}{(\tau_{base})^M}, \xi, C, M$  – материальные параметры модели Бергстрома-Бойса

 $\mu_0$  – начальный модуль сдвига для цепи (А) модели Бергстрома-Бойса

N<sub>0</sub> – квадрат предельного растяжения цепи А модели Бергстрома-Бойса

 $\mu_1$  – квадрат предельного растяжения цепи В модели Бергстрома-Бойса

 $\frac{\dot{\gamma}_0}{(\tau_{base})}^M$  – константа материала

С – показатель деформации

М – показатель течения сдвига

ξ – степень смещения деформации

 $\phi(\eta) - \phi$ ункция повреждения

r – величина эффекта Маллинза

*m* – энергетическая отсылка эффекта Маллинза

 β – материальный параметр переменной повреждения эффекта Маллинза

**D**<sub>*ijkl*</sub> – касательный тензор жесткости

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
1. Введение в теорию мартенситных превращений	5
1.1. Мартенситные превращения	5
1.2. Эффект сверхэластичности в сплавах TiNi	14
Контрольные вопросы	18
<ol> <li>Молели материалов пля описания механического</li> </ol>	
повеления сверууластичности	19
2 1 Молепь сверхэластичного повеления	19
2.1.1. Подель сверхозмети пого поведения	1)
срепузнастициого поредения	20
2 1 2 Параметры иля молели, описырающей	20
chenyanactulliae nadenellue	23
2.2. Молелирование оффекта среруодастинности при оненке	25
меланического поведения пружинного привода	24
2.2.1 Постановка завани выя моленивования	25
2.2.1. Постановка задачи для моделирования прокинного	25
2.2.2. Гасчетные результаты деформации пружинного	30
1 2 2 3 Дакоментации к прорадению раснатор	22
2.2.3. 1 скомендации к проведению расчетов Контрольные ропросы	22
Контрольные вопросы	55
3. Экспериментальные работы по растяжению	
проволочных образцов из никелида титана	35
3.1. Результаты экспериментальных работ по растяжению	
образцов из никелида титана	37
3.2. Математическая постановка задачи об определении	
напряженно-деформированного состояния конструкций	
с учетом гиперупругого поведения	43
3.2.1. Определяющее уравнение Муни-Ривлина	46
3.2.2. Определяющее уравнение Нео-Гука	47
3.2.3. Определяющее уравнение Гента	48
3.2.4. Определяющее уравнение Бергстрома-Бойса	49
3.2.5. Эффект Маллинза	52
3.3. Выбор определяющих уравнений и определение	
их параметров с использованием программного обеспечения	
MCalibration	54

<ul> <li>3.3.1. Работа с программным обеспечением MCalibration</li> <li>3.3.2. Определение параметров распространенных расчетных моделей и верификация диаграммы</li> </ul>	55
напряжение-деформация, полученных на их основеКонтрольные вопросы	60 68
Литература	69
Список сокращений	74

## Учебное издание

Екатерина Сергеевна МАРЧЕНКО Александр Анатольевич КОЗУЛИН Анна Викторовна ВЕТРОВА Гульшарат Аманболдыновна БАЙГОНАКОВА

## Моделирование напряженно-деформированного состояния при оценке механического поведения конструкций из никелида титана

Учебно-методическое пособие

Издание подготовлено в авторской редакции Оригинал-макет А.И. Лелоюр Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано в печать 06.12.2021 г. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печ. л. 5. Усл. печ. л. 4,6. Гарнитура Times. Тираж 100 экз. Заказ № 4875.

Отпечатано на полиграфическом оборудовании Издательства Томского государственного университета 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36. Телефоны: 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75 Сайт: http://publish.tsu.ru E-mail: rio.tsu@mail.ru

