На правах рукописи

Губина Оксана Викторовна

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ПЕНСИОННЫХ РЕНТ АКТУАРНЫХ МОДЕЛЕЙ

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации
(в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2021

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Кошкин Геннадий Михайлович

Официальные оппоненты:

Китаева Анна Владимировна, доктор физико-математических наук, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», кафедра программной инженерии, профессор

Кориков Анатолий Михайлович, доктор технических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники», кафедра автоматизированных систем управления, профессор

Рожкова Светлана Владимировна, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», отделение математики и информатики, профессор

Защита состоится 15 декабря 2021 года в 10:30 часов на заседании диссертационного совета «НИ ТГУ.05.01», созданного на базе Института прикладной математики и компьютерных наук федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (учебный корпус № 2 ТГУ, аудитория 104).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: https://dissertations.tsu.ru/PublicApplications/Details/950c47ac-1d89-4c87-8f43-f4198738ee8f

Автореферат разослан «____» ноября 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических
наук, доцент

Нежельская
Людмила Алексеевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В основе теории расчета пенсионных рент лежит использование идей математической теории страхования. Идеи математической теории страхования получили широкое распространение, и круг практических задач, решаемых с привлечением методов этой теории, непрерывно расширяется, в соответствии с выдвигаемыми требованиями рынка. Общепринятое название данного научного направления – актуарная математика. Вместе с соответствующими экономическими и юридическими дисциплинами актуарная математика образует более широкую область знаний – актуарную науку, которая является теоретической основой страхового бизнеса.

Математическая теория расчета пенсионных рент широко использует понятие нетто–премии. Часто расчет характеристик пожизненной ренты основан на использовании характеристик соответствующего вида страхования.

Современное развитие теории рент требует использования все более сложных математических моделей происходящих явлений и процессов в данной сфере. Необходима идеология расчета рент, предоставляющая рынкам пенсионных услуг инструментарий для аналитики, позволяющий на порядок сократить время принятия эффективных решений в условиях:

– неопределенности реакции развитого страхового рынка на произошедшие или прогнозируемые события (эпидемии, природные и социальные катаклизмы и т.д.),

– отсутствия достаточной информационной базы данных развивающихся страховых рынков и рынков новых видов пенсионных услуг.

В настоящей работе рассматривается подход, позволяющий оценивать непрерывные ренты по совокупности продолжительностей жизней индивидуумов с привлечением методов параметрической и непараметрической статистики.

Применение классических методов и схем статистической обработки данных зачастую оказывается недостаточным для получения адекватных моделей при поиске эффективных решений страховой компанией. Возникает задача как дальнейшего развития этих методов, так и комплексного их использования.

Использование только параметрических методов и моделей требует, в отличие от непараметрических, достаточно полной априорной информации об изучаемом явлении и, к тому же, может приводить к ошибочным статистическим выводам в случае неадекватности параметрического описания. В то же время непараметрические алгоритмы и методы с ростом объема выборки проявляют адаптивные свойства, т.е. адекватность построенных на их базе моделей, как правило, улучшается.

Решение вопросов, выдвигаемых процессами освоения новых и расширения существующих страховых рынков в условиях жесткой конкуренции, а также связанных с созданием новых видов страховых услуг, требует рассмотрения задач статистического оценивания функционалов рент при различных видах страхования жизни.

Цели и задачи исследования. Целью данной работы является построение вероятностных моделей пенсионных рент для различных видов индивидуального и коллективного страхования жизни, оценивание функционалов рент в условиях параметрической и непараметрической неопределенностей по продолжительностям жизней индивидуумов, исследование свойств предложенных оценок.

Были поставлены и решены следующие задачи для достижения приведенной выше цели:

1. Нахождение точных значений пенсионных рент для различных моделей актуарной математики.

2. Оценивание функционалов актуарных индивидуальных и коллективных рент в условиях параметрической неопределенности.

3. Оценивание функционалов актуарных индивидуальных и коллективных рент в условиях непараметрической неопределенности.

4. Вывод главных частей асимптотических среднеквадратических ошибок (СКО) предложенных оценок и их предельных распределений.

5. Исследование свойств предложенных оценок при конечных объемах наблюдений с помощью статистического моделирования.

6. Оценивание рент по реальным данным продолжительностей жизней индивидуумов.

Методология и методы исследования. В данной работе для решения поставленных задач используются методы математического анализа, теории вероятностей, математической статистики, оптимизационные процедуры, процедуры статистического моделирования и численные методы.

Научная новизна. Новыми являются следующие результаты диссертационного исследования:

1. Впервые построены вероятностные модели функционалов коллективных пенсионных рент для статусов совместной жизни и выживания последнего, позволяющие на их основе синтезировать ренты более сложных, например, составных коллективных рент.

2. Синтезированы оценки индивидуальных и коллективных рент методом подстановки, методом с использованием кусочно-гладкой аппроксимации, обобщающей регуляризацию А.Н. Тихонова, в условиях непараметрической неопределенности по выборкам продолжительностей жизней индивидуумов. Кусочно-гладкие аппроксимации оценок рент позволяют находить главные части их смещений и СКО при более слабых ограничениях по сравнению с оценками подстановки.

3. Доказаны теоремы об асимптотической нормальности предложенных оценок рент; эти результаты позволяют строить интервальные оценки рент заданной надежности.

4. Доказаны теоремы о главных частях смещений и СКО оценок рент в асимптотике, что говорит о состоятельности оценок. Численные эксперименты, имитационное моделирование и результаты, полученные по реальным данным, подтверждают состоятельность оценок рент.

Теоретическая значимость. Разработанная методология оценивания функционалов рент для различных видов индивидуального и коллективного страхования жизни является достаточно общей, что позволяет её применять и для более сложных видов страхования, которые имеют место, например, при коллективном страховании многих лиц.

Практическая ценность.

1. Созданы программы для оценивания рент различных актуарных моделей;

2. Предлагаемая идеология расчета рент предоставляет страховым компаниям необходимый инструментарий для аналитики, позволяющий повысить точности оценивания рент, сократить время принятия эффективных решений в условиях отсутствия достаточной информационной базы данных развивающихся страховых рынков и рынков новых видов страхования.

Личный вклад. Постановка задач сделана соискателем совместно с научным руководителем, доктором физико-математических наук, профессором Г.М. Кошкиным. Основные теоретические и практические результаты, представленные в диссертации, получены лично О.В. Губиной. Также автором самостоятельно разрабатывались программные реализации алгоритмов оценивания рент.

Реализация и внедрение результатов работы. Список НИР, в рамках которых проводились исследования, включает 4 проекта.

1. «Развитие теории робастного оценивания и управления стохастическими системами в условиях статистической неопределенности», поддержанном грантом РФФИ 13–08–00744 (2013–2015 гг.), ИПУ РАН, Москва (руководитель гранта Добровидов А.В.);

2. «Разработка информационной системы идентификации локальных включений на основе метода многоэнергетической цифровой рентгенографии», поддержанном грантом РФФИ 13–08–98027 (2013–2015 гг.), ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, Томск (руководители гранта Клименов В.А., Удод В.А.);

3. «Разработка статистических, вероятностных и логических методов для синтеза и анализа сложных систем», поддержанном НИР «Программа повышения конкурентоспособности ТГУ» (2014–2016 гг.), лаборатория компьютерных наук, ФГБОУ ВПО НИ ТГУ, Томск (руководитель проекта Евтушенко Н.В.);

4. «Актуарные модели и расчеты в системах социального страхования», поддержанном НИР «Программа повышения конкурентоспособности ТГУ», проект № 8.1.37.2018 (2018 г.), ФГБОУ ВПО НИ ТГУ, Томск (руководитель проекта Кошкин Г.М.).

Результаты работы используются в учебном процессе в Институте прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета при проведении практических занятий и лекций дисциплин «Актуарные расчеты в страховании» для бакалавров и «Непараметрические методы идентификации экономических систем» для магистрантов.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Вероятностные модели функционалов коллективных пенсионных рент для статусов совместной жизни и выживания последнего.

2. Процедура синтеза непараметрических оценок подстановки функционалов индивидуальных и коллективных рент.

3. Кусочно-гладкие аппроксимации предложенных оценок.

4. Теоремы об асимптотической нормальности оценок.

5. Теоремы о главных частях асимптотических СКО оценок.

Достоверность. Полученные результаты подтверждаются строгими аналитическими выкладками изложенных в работе доказательств лемм и теорем, корректностью применяемых методов исследования и проведения расчетов, а также статистическими экспериментами, проведенными для пенсионных рент ряда актуарных моделей.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались, обсуждались и представлялись на следующих научных конференциях:

1. VII Международная научная студенческая конференция (Новосибирск, 11–18 апреля 2014 г.).

2. X Российская конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» (Алтай, 09–13 июня 2014 г.).

3. International Conference and Demographics Workshop (SMTDA 2014) «Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis» (Lisbon, Portugal, 11–14 June 2014).

4. III Всероссийская молодежная научная конференция с международным участием «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, 22–23 мая 2015 г.).

5. The Second International Symposium «Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science, and Operations Management (SMRLO 2016)» (Beer Sheva, Israel, February 15–18, 2016).

6. XI Международная конференция «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» (Екатеринбург, 06–10 июня 2016 г.).

7. VII Международная молодежная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» Томск, 23–25 мая 2019 г.).

8. The Fifth International Workshop «Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation (AMSA2019)» (Novosibirsk, Russia, 18–20 September 2019).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 12 работ, из них 4 статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук (в том числе 3 статьи в российском научном журнале, входящем в Web of Science), 1 статья в сборнике материалов зарубежной конференции, представленном в издании, входящем в Web of Science, 2 статьи в прочем научном журнале, 5 публикаций в сборниках материалов международных и всероссийских с международным участием научных конференций (из них 1 зарубежная конференция). В опубликованных работах достаточно полно отражены материалы диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, двух приложений и списка литературы. Содержит 15 рисунков и 23 таблицы. Список литературы включает 122 наименования, в том числе 40 – на иностранном языке. Общий объем работы – 145 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, сформулированы цель, основные задачи работы, полученные в ней научные результаты, обоснованы их достоверность, новизна и практическая ценность. Приведены сведения об апробации работы, представлено краткое содержание глав диссертации.

В первой главе находятся индивидуальные пенсионные ренты стохастических пенсионных схем для моделей актуарной математики. В случае полного страхования жизни человек платит страховой компании премию размером *p*, а компания выплачивает наследникам застрахованного после его смерти страховую выплату *b*. Тогда рента записывается как

$$\bar{a}_x(\delta) = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta}, \tag{1}$$

где $\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} f_x(t)dt$ – нетто–премия (среднее значение современной стоимости единичной страховой суммы при пожизненном страховании в возрасте x лет), δ – интенсивность процентов, $f_x(t)$ – плотность распределения остаточной продолжительности жизни $T_x = X - x$, x – возраст человека в момент $t = 0$ начала платежей, X – продолжительность его жизни.

В разделах 1.1–1.4 приводятся основные принципы, на которых основано получение формулы (1), исходя из простейшей модели детерминированной пенсионной схемы.

В разделе 1.1 рассматривается общая модель детерминированной пенсионной схемы. С точки зрения приложений к страхованию и пенсионным схемам наиболее важной является задача определения современной стоимости a для n выплат $b_1, b_2,...,b_n$, которые будут выполнены в моменты $t_1, t_2,...,t_n$. Величина a может рассматриваться как сумма, которая вносится в пенсионный фонд в момент заключения договора, который обычно принимают за начальный момент. В моменты $t_1, t_2,...,t_n$, индивидуум будет получать выплаты (пенсии) величиной $b_1, b_2,...,b_n$. Таким образом,

$$a = b_1\upsilon^{t_1} + b_2\upsilon^{t_2} + ... + b_n\upsilon^{t_n},$$

где $\upsilon = (1+i)^{-1} = e^{-\delta}$ – коэффициент дисконтирования, $\delta = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{(1+i)^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = \ln(1+i)$ – интенсивность процентов, $i = e^{\delta} - 1$– эффективная процентная ставка. Так, если $i = 0{,}1$ то $\delta = \ln(1+0{,}1) = \ln(1{,}1) = 0{,}095$ и $\upsilon = \dfrac{1}{1+0{,}1} = 0{,}909$. Аналогично, если $i = 0{,}06$, то $\delta = 0{,}058$ и $\upsilon = 0{,}943$.

На практике используются схемы с регулярностью по величине взносов, выплат и по моментам платежей. Например, важным является случай фиксированных платежей, которые производятся через равные промежутки времени. Такие серии платежей обычно называют постоянными рентами

В разделе 1.2 представлена общая модель детерминированной постоянной ренты. Рассматриваются n последовательных единичных промежутков времени $(0,1),(1,2),...,(n-1,n)$. Разобьем каждый из n единичных промежутков на p равных частей длиной $1/p$ каждая. Серия из np выплат, каждая величиной $1/p$, сделанных в конце этих подпромежутков, т.е. в моменты

$$1/p,..., p/p = 1;...; n-1+1/p,..., n-1+p/p = n,$$

называется запаздывающей рентой, выплачиваемой с частотой p. Её ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ обозначается $a_{\overline{n}|}^{(p)}$.

Серия из np выплат, сделанных в начале подпромежутков называется упреждающей рентой, выплачиваемой с частотой *p*. Её ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ обозначается $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$.

В разделе 1.3 описываются непрерывные ренты. Рассматриваются упреждающая и запаздывающая ренты, которые при $p \to \infty$ совпадают. В этом случае непрерывный поток платежей называется непрерывно выплачиваемой рентой.

Далее, в разделе 1.4 рассматриваются модели стохастических пенсионных схем. Здесь продолжительность жизни индивидуума X считается случайной величиной. Приведем основные модели.

Полная пожизненная рента. Начиная с момента $t_0 = 0$ индивидуум раз в год начинает получать определенную сумму, принимаемую для удобства расчетов в качестве условной единичной денежной единицы.

Временная пожизненная рента. Пусть возраст человека, которому выплачивается рента – x лет. В этом случае n-летняя временная пожизненная рента определяется как совокупность выплат условной единичной суммы, которые производятся раз в год, начиная с момента $t_0 = 0$, в течение, n лет.

Отсроченная пожизненная рента. Отсроченная на m лет пожизненная рента определяется как серия выплат условной единичной суммы, производимых раз в год в течение жизни индивидуума, начиная с момента $t_0 + m = m$.

В разделе 1.5 приводятся оценки рент, полученные методом суммарной выплаты. В этом случае пожизненная рента рассматривается как обычная рента, но со случайным числом выплат. Это позволяет получить явные формулы для современной стоимости стохастических рент с помощью формул для детерминированных рент и связать их с современной стоимостью соответствующего вида страхования.

Актуарная современная стоимость ренты является математическим ожиданием случайной современной стоимости и. обозначается символом a с соответствующими индексами. Таким образом, получаем: $\ddot{a}_x = \dfrac{1 - A_x}{d}$ – пожизненная рента, $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}$ – n-летняя временная пожизненная рента,

– отсроченная на m лет пожизненная рента, где $d = i/(1+i) = 1 - \upsilon = 1 - e^{-\delta}$ – эффективная учетная ставка, $A_x = \int\limits_0^{\infty} e^{-dt} f_x(t)dt$ – среднее значение современной стоимости единичной страховой суммы при пожизненном страховании с выплатой страховой суммы в конце года жизни, $A_{x:\overline{n}|} = \int\limits_0^{n} e^{-dt} f_x(t)dt$ определяет нетто-премию при смешанном страховании жизни.

Непрерывные пожизненные ренты изучаются в разделе 1.6. Заметим, что структура выражений рент по сути совпадает с приведенными в 1.5 с заменой эффективной учетной ставки d на интенсивность процентов δ.

В разделе 1.7 вводится класс функционалов, который позволяет описывать непрерывные ренты для основных моделей актуарной математики. Структура функционала удобна для использования параметризованных распределений моделей актуарной математики. В подразделах 1.7.1–1.7.4 находятся функционалы для пяти наиболее часто используемых актуарных распределений: де Муавра, Эрланга, Гомпертца, Мейкхама и Вейбулла. Если параметры этих моделей неизвестны, то они находятся из решений систем уравнений, составленных согласно методу моментов. В работе также вычисляются ренты при конкретных значениях параметров, приводятся таблицы и графики, которые подтверждают существенную зависимость значения ренты от выбора распределения продолжительности жизни.

Из таблиц и рисунков следует, что значения ренты существенно зависят от распределения продолжительности жизни X.

Часто на практике параметрические модели актуарной математики не описывают адекватно наблюдаемую совокупность продолжительностей жизней.

Также могут возникнуть проблемы с выбором подходящего распределения и для новых видов страхования. Трудности синтеза оценок рент в таких ситуациях преодолеваются, если задачу решать в условиях непараметрической априорной неопределенности.

Во второй главе рассматривается случай коллективного страхования. В разделе 2.1 дается понятие статуса для совокупности индивидуумов. Вводятся понятия статусов совместной жизни, выживания последнего, выживания k последних и смешанные статусы. Подраздел 2.2.1 посвящен нахождению функционалов рент в случае коллективного страхования для двух лиц для статуса совместной жизни и статуса выживания последнего. В случае статуса совместной жизни $T(U)=\min\big(T(x_1),T(x_2)\big)$ по аналогии со случаем индивидуального страхования рента выражается формулой

$$\bar{a}_{x_1:x_2}(\delta)=\frac{1}{\delta}\left(1-\int\limits_0^\infty e^{-\delta t}\left[f_{x_1}(t)S_{x_2}(t)+f_{x_2}(t)S_{x_1}(t)\right]dt\right), \qquad (2)$$

где $S_x(t)=\dfrac{S(x+t)}{S(x)}=1-F_x(t)$ – функция выживания случайной величины T_x. В случае статуса выживания последнего $U:=\overline{x_1:x_2}$, для которого $T(U)=\max\{T(x_1),T(x_2)\}$, рента определяется выражением

$$\bar{a}_{\overline{x_1:x_2}}(\delta)=\frac{1}{\delta}\left(1-\int\limits_0^\infty e^{-\delta t}\left[f_{x_1}(t)F_{x_2}(t)+f_{x_2}(t)F_{x_1}(t)\right]dt\right). \qquad (3)$$

В подразделе 2.2.2 рассматривается статус совместной жизни и статус выживания последнего для m лиц.

В подразделах 2.2.3–2.2.6 выводятся формулы непрерывных рент для статусов совместной жизни и выживания последнего в условиях различных актуарных моделей. Так, для модели Мейкхама с параметрами A, B, α

$$\bar{a}_{x_1:x_2}(A,B,\alpha,\delta)=$$

$$=\frac{\left(1-\int\limits_0^\infty \exp\left[-(2A+\delta)t-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x_1}+e^{\alpha x_2})(e^{\alpha t}-1)\right](2A+Be^{\alpha t}(e^{\alpha x_1}+e^{\alpha x_2}))dt\right)}{\delta},$$

$$\bar{a}_{\overline{x_1:x_2}}(A,B,\alpha,\delta)=\frac{1}{\delta}\left(1-A\int_0^{\infty}e^{-(A+\delta)t}\left((A+Be^{\alpha(x_1+t)})\exp\left[-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x_1+t)}-e^{\alpha x_1})\right]+\right.\right.$$

$$+(A+Be^{\alpha(x_2+t)})\exp\left[-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha(x_2+t)}-e^{\alpha x_2})\right]-$$

$$\left.\left.-(2A+B(e^{\alpha(x_1+t)}+e^{\alpha(x_2+t)})\exp\left[-At-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x_1}+e^{\alpha x_2})(e^{\alpha t}-1)\right]\right)dt\right).$$

Вычисление интегралов проводится приближенно методом трапеций при $A=0{,}0007$, $B=0{,}00005$, $\alpha=0{,}09$, $\delta=0{,}1$. Полученные значения ренты, в частности, для статуса выживания последнего приводятся ниже в таблице 1.

Таблица 1 – Зависимость ренты статуса выживания последнего для двух лиц $\bar{a}_{\overline{x_1:x_2}}(0{,}0007;0{,}00005;0{,}09;0{,}1)$ в зависимости от их возраста для модели Мейкхама

Возраст, x_1 лет	Возраст, x_2 лет								
	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10	9,99	9,98	9,97	9,95	9,94	9,92	9,9	9,88	9,87
20	9,98	9,96	9,95	9,91	9,86	9,86	9,83	9,81	8
30	9,97	9,95	9,92	9,87	9,81	9,976	9,7	9,67	9,65
40	9,95	9,91	9,87	9,77	9,67	9,56	9,45	9,38	9,34
50	9,94	9,89	9,81	9,67	9,48	9,25	9,03	8,87	8,79
60	9,92	9,86	9,76	9,56	9,25	8,84	8,4	8,06	7,87
70	9,9	9,83	9,7	9,45	9,03	8,4	7,64	6,97	6,56
80	9,88	9,81	9,67	9,38	8,87	8,06	6,97	5,87	5,08
90	9,87	9,8	9,65	3,4	8,79	7,78	6,56	5,08	3,86

Для модели Вейбулла с параметрами α,σ

$$\bar{a}_{x_1:x_2}(\alpha,\sigma,\delta)=\frac{1}{\delta}\left(1-\frac{\alpha}{\sigma^{\alpha}}\int_0^{\infty}((x_1+t)^{\alpha-1}+(x_2+t)^{\alpha-1}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[-\delta t+\frac{x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}-(x_1+t)^{\alpha}-(x_2+t)^{\alpha}}{\sigma^{\alpha}}\right]dt\right),$$

$$\bar{a}_{\overline{x_1:x_2}}(\alpha,\sigma,\delta)=\frac{1}{\delta}\left(1-\frac{\alpha}{\sigma^{\alpha}}\int_0^{\infty}((x_1+t)^{\alpha-1}+(x_2+t)^{\alpha-1}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[-\delta t+\frac{x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}-(x_1+t)^{\alpha}-(x_2+t)^{\alpha}}{\sigma^{\alpha}}\right]dt\right).$$

Несобственный интеграл в выражении ренты вычисляется приближенно по методу трапеций при $\alpha=4{,}24$ и $\sigma=80{,}188$.

Таблица 2 – Зависимость ренты статуса совместной жизни для двух лиц $\bar{a}_{x_1:x_2}(4,24;80,188;0,1)$ в зависимости от их возраста для модели Вейбулла

Возраст, x_1 лет	Возраст, x_2 лет								
	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10	9,79	9,63	9,35	8,92	8,33	7,62	6,83	6,01	5,2
20	9,63	9,49	9,23	8,81	8,25	7,55	6,78	5,97	5,18
30	9,35	9,23	8,98	8,6	8,07	7,41	6,67	5,89	5,12
40	8,92	8,81	8,6	8,26	7,77	7,17	6,48	5,75	5,02
50	8,33	8,25	8,07	7,77	7,36	6,82	6,2	5,53	4,85
60	7,62	7,55	7,41	7,17	6,82	6,37	5,83	5,23	4,63
70	6,83	6,78	6,67	6,48	6,2	5,83	5,38	4,87	4,34
80	6,01	5,97	5,89	5,75	5,53	5,23	4,87	4,46	4,01
90	5,2	5,18	5,12	5,02	4,85	4,63	4,34	4,01	3,65

Аналогичные результаты и соответствующие таблицы также получены для моделей де Муавра, Эрланга и Гомпертца.

В третьей главе рассматривается непараметрическое оценивание индивидуальных пенсионных рент.

В разделе 3.1 проводится синтез непараметрических оценок рент. Например, оценка подстановки для непрерывной пожизненной ренты выражается следующей формулой:

$$\bar{a}_x^n(\delta) = \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{\Phi_n(x,\delta)}{S_n(x)}\right), \tag{4}$$

где $\Phi_n(x,\delta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-\delta(X_i - x)} I(X_i - x > 0)$, $S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\left(X_i > x\right)$ есть оценка функции выживания. Оценка (4) обладает недостатками, вытекающими из недостатков оценки функции выживания $S_n(x)$:

1. $S_n(x)$ имеет разрывы в точках $X_1,...,X_n$;
2. $S_n(x) = 0$ в области $\Omega_\infty = \left[\max(X_1,...,X_n),\infty\right]$.

Эти недостатки преодолеваются с помощью кусочно-гладких аппроксимаций для оценок отношений типа (4). Кусочно-гладкие аппроксимации оценок рент для двух лиц изучены в разделах 4.6 и 4.7 диссертации.

В разделе 3.2 приводятся вспомогательные результаты, которые применяются при доказательстве асимптотической нормальности и нахождении главных частей моментов отклонений непараметрических оценок рент.

В разделе 3.3 доказывается асимптотическая нормальность непараметрической оценки подстановки $\bar{a}_x^n(\delta)$ (4) пожизненной ренты $\bar{a}_x(\delta)$ (1). Введем следующие обозначения:

$$\Phi(x,\delta) = \frac{1 - \int_x^\infty e^{-\delta(u-x)} dF(u)}{\delta} = \frac{1 - \int_0^\infty e^{-\delta(u-x)} \mathrm{I}(x \le u) dF(u)}{\delta},$$

где $I(A)$ − индикатор множества A; $z_n \Rightarrow \mathrm{N}_1\left\{a,\sigma^2\right\}$ обозначает сходимость z_n по распределению при $n \to \infty$ к одномерной случайной величине, имеющей нормальное распределение со средним a и дисперсией σ^2. Основной результат раздела содержит

Теорема 1 *Если функция выживания $S(x) \neq 0$, то непараметрическая оценка подстановки ренты (4) является асимптотически нормальной, причем*

$$\sqrt{n}\left[\bar{a}_x^n(\delta) - \bar{a}_x(\delta)\right] \Rightarrow \mathrm{N}_1\left\{0, \frac{\Phi(x,2\delta)S(x) - \Phi^2(x,\delta)}{\delta^2 S^3(x)}\right\}. \tag{5}$$

В разделе 3.4 находится смещение непараметрической оценки подстановки пожизненной ренты, для которой справедлива следующая

Теорема 2 *Пусть* $S(x)$ *– непрерывная функция выживания и* $S(x) \neq 0$. *Тогда* $E\left\{\bar{a}_x^n(\delta)\right\} = \bar{a}_x(\delta) + O\left(\frac{1}{n}\right)$, *т. е. оценка ренты* $\bar{a}_x^n(\delta)$ *является асимптотически несмещенной.*

В разделе 3.5 находится среднеквадратическая ошибка (СКО) непараметрической оценки подстановки пожизненной ренты. Для непараметрической оценки подстановки (4) ренты (1) справедлива следующая

Теорема 3 *Если* $S(x)$ *– непрерывная функция выживания и* $S(x) \neq 0$, *то* СКО *оценки ренты*

$$u^2(\bar{a}_x^n(\delta)) = E\left(\bar{a}_x^n(\delta) - \bar{a}_x(\delta)\right)^2 = \frac{\Phi(x,2\delta)S(x) - \Phi^2(x,\delta)}{n\delta^2 S^3(x)} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

В разделе 3.6 синтезируется непараметрическая оценка современной непрерывной q-летней временной пожизненной ренты. Находятся главная часть асимптотической среднеквадратической ошибки оценки и её предельное распределение.

В разделе 3.7 рассматривается задача оценивания пожизненной ренты для отсроченного на r лет страхования жизни.

В разделе 3.8 решается задача оценивания современной стоимости, смешанной n-летней пожизненной ренты, которое часто предлагается страховыми компаниями. Суть такого вида страхования на дожитие заключается в следующем. Человек заключает договор страхования на n лет. Выплата по договору производится либо в момент смерти застрахованного бенефициарию, если застрахованный умер в течении n лет, либо в момент окончания срока действия договора, если застрахованный дожил до конца этого срока. Этот вид договора выполняет как функции страхования, так и накопления средств, тем самым являясь наиболее привлекательным для клиента.

Четвертая глава посвящена непараметрическому оцениванию коллективных пенсионных рент.

В разделах 4.1–4.2 находятся функционалы непрерывных рент для статусов совместной жизни и выживания последнего в условиях актуарных моделей. Пусть имеется случайная выборка продолжительностей жизней пар индивидуумов $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),..,(X_n,Y_n)$ из генеральной случайной величины (X,Y), характеризуемой функцией выживания $S(x_1,x_2)$. В качестве оценки функции распределения $P\{\min(X-x_1,Y-x_2)\le t\}$ и функции выживания $P\{\min(X-x_1,Y-x_2)>0\}$ возьмем соответственно несмещенные оценки $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\min(X_i-x_1,Y_i-x_2)\le t)$ и $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\min(X_i-x_1,Y_i-x_2)>0).$ Эти оценки используются при получении оценок ренты $\bar{a}^{n}_{x_1:x_2}(\delta)$ для статуса совместной жизни для двух лиц (2)

$$\bar{a}^{n}_{x_1:x_2}(\delta)=\frac{1}{\delta}\left(1-\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-\delta\min(X_i-x_1,Y_i-x_2)} I(\min(X_i-x_1,Y_i-x_2)>0)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\min(X_i-x_1,Y_i-x_2)>0)}\right) \tag{6}$$

и оценки ренты $\bar{a}^{n}_{\overline{x_1:x_2}}(\delta)$ – для статуса выживания последнего для двух лиц (3)

$$\bar{a}^{n}_{\overline{x_1:x_2}}(\delta)=\left(1-\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-\delta\max(X_i-x_1,Y_i-x_2)} I\left(\max(X_i-x_1,Y_i-x_2)>0\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\min(X_i-x_1,Y_i-x_2)>0)}\right). \tag{7}$$

В разделе 4.3 находятся предельные распределения для непараметрических оценок рент $\bar{a}_{x_1:x_2}(\delta)$ и $\bar{a}_{\overline{x_1:x_2}}(\delta)$.

Теорема 4 *Если функция выживания совместного статуса* $S(x_1,x_2)\neq 0,$ *то*

$$\sqrt{n}\left[\bar{a}^{n}_{x_1:x_2}(\delta)-\bar{a}_{x_1:x_2}(\delta)\right]\Rightarrow \mathrm{N}_1\left\{0,\frac{\Phi(x_1,x_2,2\delta)S(x_1,x_2)-\Phi^2(x_1,x_2,\delta)}{\delta^2 S^3(x_1,x_2)}\right\}.$$

Для оценки ренты статуса выживания последнего справедлива

Теорема 5 *Если функция выживания* $S(x_1,x_2)\neq 0,$ *то*

$$\sqrt{n}\left[\bar{a}^{n}_{\overline{x_1:x_2}}(\delta)-\bar{a}_{\overline{x_1:x_2}}(\delta)\right]\Rightarrow \mathrm{N}_1\left\{0,\frac{\Gamma(x_1,x_2,2\delta)S_1(x_1)S_2(x_2)-\Gamma^2(x_1,x_2,\delta)}{\delta^2 S_1^3(x_1)S_2^3(x_2)}\right\},$$

где $\Gamma(x_1,x_2,\delta)=\int\limits_0^{\infty} e^{-\delta t}dP\{\max(X-x_1,Y-x_2)\le t\}.$

В разделе 4.4 доказывается асимптотическая несмещенность оценок подстановки рент для двух лиц.

В разделе 4.5 находится СКО непараметрической оценки подстановки рент для двух лиц. Так, для непараметрической оценки ренты (6) справедлива следующая

Теорема 6 *Если* $S(x_1,x_2)\ne 0,$ *то СКО оценки ренты* (6)

$$u^2(\bar{a}^n_{x_1:x_2}(\delta))=\frac{\Phi(x_1,x_2,2\delta)S(x_1,x_2)-\Phi^2(x_1,x_2,\delta)}{n\delta^2 S^3(x_1,x_2)}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

В разделе 4.6 рассматриваются асимптотические свойства кусочно-гладких аппроксимаций рент для двух лиц. Как и в одномерном случае, для эмпирических функций выживания статусов $x_1:x_2$ и $\overline{x_1:x_2}$ существуют области, где $S_n(x_1,x_2)=0.$ Отметим, что кусочно-гладкие аппроксимации оценок рент имеют важные преимущества перед обычными оценками: они устойчиво себя ведут в областях, где $S_n(x_1,x_2)$ близко к нулю, и при этом для них можно найти главные части их асимптотических СКО.

Для кусочно-гладких аппроксимаций $\tilde{\bar{a}}^n_{x_1:x_2}(\delta)$ и $\tilde{\bar{a}}^n_{\overline{x_1:x_2}}(\delta)$ справедливы

Теорема 7 *Если функция выживания* $S(x_1,x_2)\ne 0$ *и* $\eta=\eta_n=\tilde{C}n^{-1}, 0<\tilde{C}<\infty,$ *то*

$$\sqrt{n}\left[\tilde{\bar{a}}^n_{x_1:x_2}(\delta)-\bar{a}_{x_1:x_2}(\delta)\right]\Rightarrow \mathrm{N}_1\left\{0,\frac{\Phi(x_1,x_2,2\delta)S(x_1,x_2)-\Phi^2(x_1,x_2,\delta)}{\delta^2 S^3(x_1,x_2)}\right\},$$

$$\sqrt{n}\left[\tilde{\bar{a}}^n_{\overline{x_1:x_2}}(\delta)-\bar{a}_{\overline{x_1:x_2}}(\delta)\right]\Rightarrow \mathrm{N}_1\left\{0,\frac{\Gamma(x_1,x_2,2\delta)S(x_1,x_2)-\Gamma^2(x_1,x_2,\delta)}{S^3(x_1,x_2)}\right\}.$$

Теорема 8 *Если функция выживания* $S(x_1,x_2)\ne 0$ *и* $\eta=\eta_n=\tilde{C}\cdot n^{-1},\ 0<\tilde{C}<\infty,$ *то кусочно-гладкие аппроксимации* $\tilde{\bar{a}}^n_{x_1:x_2}$ *и* $\tilde{\bar{a}}^n_{\overline{x_1:x_2}}$ *являются асимптотически несмещенными оценками рент* $\bar{a}_{x_1:x_2}$ *и* $\bar{a}_{\overline{x_1:x_2}}$*, а СКО оценок*

$$u^2\left(\tilde{\bar{a}}^n_{x_1:x_2}(\delta)\right) = \frac{\Phi(x_1,x_2,2\delta)S(x_1,x_2)-\Phi^2(x_1,x_2,\delta)}{n\delta^2 S^3(x_1,x_2)} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

$$u^2\left(\tilde{\bar{a}}^n_{\overline{x_1:x_2}}(\delta)\right) = \frac{\Gamma(x_1,x_2,2\delta)S(x_1,x_2)-\Gamma^2(x_1,x_2,\delta)}{n\delta^2 S^3(x_1,x_2)} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

В разделе 4.7 проводится оптимизация параметров кусочно-гладких аппроксимаций оценок рент для двух лиц раздела 4.6. Каждому значению оцениваемых функций $\bar{a}_{\overline{x_1:x_2}}(\delta)$ и $\bar{a}_{x_1:x_2}(\delta)$ соответствуют свои оптимальные значения последовательностей

$$\eta_{opt2} = \frac{u^2\left(\bar{a}^n_{x_1:x_2}\right) + b\left(\bar{a}^n_{x_1:x_2}\right)\bar{a}_{x_1:x_2}}{\left(\bar{a}_{x_1:x_2}\right)^\tau\left[\bar{a}^2_{x_1:x_2} + b(\bar{a}^n_{x_1:x_2})\bar{a}_{x_1:x_2}\right]},$$

$$\eta_{\overline{opt2}} = \frac{u^2\left(\bar{a}^n_{\overline{x_1:x_2}}\right) + b\left(\bar{a}^n_{\overline{x_1:x_2}}\right)\bar{a}_{\overline{x_1:x_2}}}{\left(\bar{a}_{\overline{x_1:x_2}}\right)^\tau\left[\bar{a}^2_{\overline{x_1:x_2}} + b(\bar{a}^n_{\overline{x_1:x_2}})\bar{a}_{\overline{x_1:x_2}}\right]}$$

и оптимальные кусочно-гладкие аппроксимации рент для двух лиц:

$$\bar{a}^n_{x_1:x_2}(\eta_{opt2}) = \frac{\bar{a}^n_{x_1:x_2}}{1+\eta_{opt2}\left(\bar{a}_{x_1:x_2}\right)^\tau},$$

$$\bar{a}^n_{\overline{x_1:x_2}}(\eta_{\overline{opt2}}) = \frac{\bar{a}^n_{\overline{x_1:x_2}}}{1+\eta_{\overline{opt2}}\left(\bar{a}_{\overline{x_1:x_2}}\right)^\tau}.$$

Теорема 9 *Если непрерывная функция выживания* $S(x_1,x_2)\neq 0,$ *то кусочно-гладкая аппроксимация оценки ренты* $\tilde{\bar{a}}^n_{x_1:x_2}(\eta_{opt2})$ *является асимптотически нормальной*

$$\sqrt{n}\left[\tilde{\bar{a}}^n_{x_1:x_2}(\eta_{opt2}) - \bar{a}_{x_1:x_2}\right] \Rightarrow \mathrm{N}_1\left\{0, \frac{\Phi(x_1,x_2,2\delta)S(x_1,x_2)-\Phi^2(x_1,x_2,\delta)}{\delta^2 S^3(x_1,x_2)}\right\},$$

асимптотически несмещенной для ренты $\bar{a}_{x_1:x_2}$*, а ее СКО*

$$u^2(\tilde{\bar{a}}^n_{x_1:x_2}(\eta_{opt2})) = \frac{\Phi(x_1,x_2,2\delta)S(x_1,x_2)-\Phi^2(x_1,x_2,\delta)}{n\delta^2 S^3(x_1,x_2)} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Теорема 10 *Если непрерывная функция выживания* $S(x_1, x_2) \neq 0$*, то кусочно-гладкая аппроксимация оценки ренты* $\tilde{\bar{a}}^{n}_{\overline{x_1,x_2}}(\eta_{\overline{opt2}})$ *является асимптотически нормальной*

$$\sqrt{n}\left[\tilde{\bar{a}}^{n}_{\overline{x_1:x_2}}(\eta_{\overline{opt2}}) - \bar{a}_{\overline{x_1:x_2}}\right] \Rightarrow \mathrm{N}_1\left\{0, \frac{\Gamma(x_1,x_2,2\delta)S(x_1,x_2) - \Gamma^2(x_1,x_2,\delta)}{\delta^2 S^3(x_1,x_2)}\right\},$$

асимптотически несмещенной для ренты $\bar{a}_{\overline{x_1:x_2}}$*, а ее СКО*

$$u^2(\tilde{\bar{a}}^{n}_{\overline{x_1:x_2}}(\eta_{\overline{opt2}})) = \frac{\Gamma(x_1,x_2,2\delta)S(x_1,x_2) - \Gamma^2(x_1,x_2,2\delta)}{n\delta^2 S^3(x_1,x_2)} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Также в этом разделе получены оценки оптимальных последовательностей и оптимальных оценок кусочно-гладких аппроксимаций рент, в которых оценки главных частей смещения и СКО непараметрической оценки подстановки ренты можно найти с помощью замены функционалов $\Phi(x_1,x_2,\delta)$, $\Gamma(x_1,x_2,\delta)$, $S(x_1,x_2)$ их оценками подстановки $\Phi_n(x_1,x_2,\delta)$, $\Gamma_n(x_1,x_2,\delta)$, $S_n(x_1,x_2))$.

В пятой главе представлены результаты статистического моделирования функционалов рент, а также их оценивания по реальным данным продолжительности жизни. Рассматриваются как непараметрические, так и параметрические оценки функционалов рент, проводится сравнительный анализ их качества оценивания. В разделах 5.1–5.2 находятся непараметрические оценки непрерывной пожизненной ренты по случайной выборке из распределений де Муавра и Мейкхама. В разделах 5.3–5.4 оценивается непрерывная q-летняя. рента по случайной выборке из распределений де Муавра и Мейкхама. Разделы 5.5–5.8 содержат результаты параметрического оценивания рент для моделей де Муавра, Эрланга, Гомпертца, Мейкхама и Вейбулла. В разделе 5.9 рассматривается непараметрическое оценивание непрерывной пожизненной ренты по реальным данным. Проводится исследование качества оценок рент по реальным данным продолжительности жизни. В 2001 году Кожевниковским отделом ЗАГС Томской области было зарегистрировано 410 смертей. На основе исходных данных (ФИО, дата рождения, дата смерти) была сформирована выборка продолжительностей жизни. По всему объему выборки (n = 410) оценили методом подстановки значение ренты $\overline{a}_x(\delta)$, которую назвали эталонной. Из этой выборки формировались подвыборки размером 50, 100, 250. Для каждой из этих подвыборок оценивались ренты непараметрическим методом подстановки, а также на базе моделей де Муавра, Эрланга, Мейкхама, Вейбулла.

Качество непараметрических оценок будем характеризовать эмпирическими СКО:

$$G(n;0{,}1)=\frac{\sum_{x=0}^{99}(\overline{a}_x(0{,}1)-\overline{a}_x^n(0{,}1))^2}{100}.$$

Результаты вычислений приводятся в таблице 3.

Таблица 3 – Эмпирические СКО для различных объемов выборки *n*

n	50	100	250	500
$G(n;0{,}1)$	0,456	0,247	0,104	0,057

Согласно таблице 3 качество оценивания улучшается с ростом объёма выборки.

В **заключении** приводятся основные результаты диссертационной работы и обсуждаются перспективы дальнейшего развития темы диссертационного исследования. Например, дальнейшие исследования могут быть посвящены решению проблем, связанных с управлением пенсионными накоплениями, которые позволят прогнозировать доходы и расходы людей старшего возраста.
Также, в рамках пенсионной реформы возникает необходимость создать в России свою собственную систему актуарных расчетов как для государственного, так и коммерческого пенсионного страхования, что позволит своевременно принимать меры по упреждению ухудшения ситуации.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:

1. **Губина О. В.** Оценивание актуарной современной стоимости полной непрерывной пожизненной ренты / О. В. Губина, Г. М. Кошкин // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 1 (30). – С. 38–43. – 0,28 / 0,14 а.л.

2. **Губина О. В.** Оценивание коллективной ренты статуса совместной жизни / О. В. Губина, Г. М. Кошкин // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2016. – № 2 (35). – С. 30–36. – DOI: 10.17223/19988605/35/3. – 0,38 / 0,19 а.л.

Web of Science: **Gubina O. V.** Collective annuity estimation of joint-life status / O. V. Gubina, G. M. Koshkin // Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta-Upravlenie, Vychislitel'naya Tekhnika i Informatika – Tomsk state university journal of control and computer science. – 2016. – № 2 (35). – P. 30–36.

3. **Губина О. В.** Непараметрическое оценивание актуарной современной стоимости отсроченной ренты / О. В. Губина, Г. М. Кошкин // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2019. – № 46. – С. 49–55. – DOI: 10.17223/19988605/46/6. – 0,42 / 0,21 а.л.

Web of Science: **Gubina O. V.** Nonparametric estimation of actuarial present value of deferred life annuity / O. V. Gubina, G. M. Koshkin // Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta-Upravlenie, Vychislitel'naya Tekhnika i Informatika – Tomsk state university journal of control and computer science. – 2019. – № 46. – P. 49–55.

4. **Губина О. В.** Оценивание современной стоимости *n*-летней ренты для смешанного страхования жизни / О. В. Губина, Г. М. Кошкин // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и

информатика. – 2020. – № 50. – С. 39–46. – DOI: 10.17223/19988605/50/5. – 0,47 / 0,24 а.л.

Web of Science: **Gubina O. V.** Estimation of present value of *n*-year life annuity for endowment insurance / O. V. Gubina, G. M. Koshkin // Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Upravlenie, Vychislitel'naya Tekhnika i Informatika – Tomsk state university journal of control and computer science. – 2020. – № 50. – P. 39–46.

Статья в сборнике материалов конференции, представленном в издании, входящем в Web of Science:

5. Koshkin G. M. Estimation of the Present Values of Life Annuities for the Different Actuarial Models / G. M. Koshkin, **O. V. Gubina** // The Second International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science, and Operations Management (SMRLO 2016). Beer Sheva, Israel, February 15–18, 2016. – Beer Sheva, 2016. – P. 506–510. – DOI: 10.1109/SMRLO.2016.89. – 0,4 / 0,2 а.л.

Публикации в прочих научных изданиях:

6. **Губина О. В.** Непараметрическое оценивание актуарной современной стоимости пожизненной ренты / О. В. Губина // МНСК – 2014. Математика: материалы 52-й Международной научной студенческой конференции. Новосибирск, 11–18 апреля 2014 г. – Новосибирск, 2014. – С. 108. – 0,03 а.л.

7. **Губина О. В.** Непараметрическое оценивание актуарных пенсионных рент / О. В. Губина, Г. М. Кошкин // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Десятой российской конференции с международным участием. Пос. Катунь Алтайского края, 09–11 июня 2014 г. – Томск, 2014. – С. 123. – 0,02 / 0,01 а.л.

8. **Губина О. В.** Оценивание современной стоимости непрерывной n–летней временной пожизненной ренты / О. В. Губина, Г. М. Кошкин // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 58, № 11/2. – С. 235–241. – 0,25 / 0,13 а.л.

9. Кошкин Г. М. Оценивание коллективной ренты статуса выживания последнего / Г. М. Кошкин, **О. В. Губина** // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2016. – Т. 59, № 8/2. – С. 57–60. – 0,23 / 0,12 а.л.

10. Кошкин Г. М. Оценивание коллективной ренты статуса выживания последнего / Г. М. Кошкин, **О. В. Губина** // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Одиннадцатой международной конференции. Екатеринбург, 06–10 июня 2016 г. – Томск, 2016. – С. 103–104. – 0,09 / 0,05 а.л.

11. **Gubina O. V.** Estimation of the Present Values of Life Annuities for the Complex Actuarial Models / O. V. Gubina, G. M. Koshkin // Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis International Conference and Demographics Workshop (SMTDA 2014) : Abstracts. Lisbon, Portugal, June 11–14, 2014. – 2014. – P. 78. – 0,02 / 0,01 а.л.

12. Dmitriev Y. G. Estimation of the Present Values of Net Premiums and Life Annuities for the Different Actuarial Models / Y. G. Dmitriev, **O. V. Gubina**, G. M. Koshkin // Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation : Proceedings of the International Workshop (AMSA, 2019). Novosibirsk, September 18–20, 2019. – Novosibirsk, 2019. – P. 30–46. – 0,69 / 0,23 а.л.

Издание подготовлено в авторской редакции.
Отпечатано на участке цифровой печати
Издательства Томского государственного университета
Заказ № 7350 от «29» октября 2021 г. Тираж 100 экз.
г. Томск Московский тр.8, тел. 53-15-28