МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ
VIII Международной молодежной научной
конференции
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ,
ТЕХНИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 26–30 мая 2021 г.

Под общей редакцией И.С. Шмырина

Томск
Издательство Томского государственного университета
2021

Заключение

В данной работе рассмотрен обобщенный полусинхронный поток событий с пролезающим мертвым временем фиксированной длительности. В результате построена имитационная модель исследуемого потока в виде программного кода на языке программирования C# в среде Visual Studio 2019.

Анализ полученных результатов статистических экспериментов позволяет утверждать, что получена работоспособная модель, не противоречащая соответствующим входным данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. – Томск: Издательство Томского университета, 1978. – 208 с.
2. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. – М.: Техносфера, 2018. – 564 с.
3. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1979. – № 6. – С. 92–99.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1980. – № 1. – С. 55–61.
5. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. – 1979. – V. 16. – P. 764–779.
6. Нежелская Л.А. Оценка состояний дважды стохастических потоков событий. – Томск: Издательство Томского государственного университета, 2020. – 210 с.
7. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 2.
8. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. – 2015. – V. 564. – P. 141–151.
9. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. – Минск: Университетское, 1988. – 256 с.
10. Лифшиц А.Л., Мальц Э.А. Статистическое моделирование систем массового обслуживания. – М.: Сов. радио, 1978. – 248 с.

DOI: 10.17223/978-5-907442-42-9-2021-16

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ОЦЕНИВАНИЮ ПАРАМЕТРА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНОГО МЁРТВОГО ВРЕМЕНИ В АЛЬТЕРНИРУЮЩЕМ АСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ

Горцев А.М., Шманкеева А.В.
Томский государственный университет
shmankeeva@yandex.ru

Введение

Распространёнными математическими моделями физических явлений и процессов являются потоки событий. В частности, такие модели применяются при исследовании информационных потоков сообщений в телекоммуникационных системах, в спутниковых сетях связи и т.п. [1] В связи с интенсивным развитием компьютерных сетей модель простейшего потока событий перестала быть адекватной реальным информационным потокам. Требования практики послужили стимулом к рассмотрению дважды стохастических потоков [2,3] в качестве математической модели реальных потоков событий в компьютерных сетях. В большинстве публикаций авторы рассматривают математические модели потоков событий, когда события потока доступны наблюдению. Однако на практике возникают ситуации, когда наступившее событие влечёт за собой ненаблюдаемость последующих событий. Причиной ненаблюдаемости, как правило, выступает мёртвое время регистрирующих приборов [4], в течение которого другие события, поступившие в этот период, теряются. Регистрирующие приборы при этом делятся

на два вида: с непродлевающимся мёртвым временем и продлевающимся. При этом длительность мёртвого времени может быть как детерминированной величиной, так и случайной. Задачи по оценке параметров и состояний потока событий в условиях мёртвого времени фиксированной длительности рассматривались в [5–11].

Однако достаточно открытым остаётся вопрос изучения потоков событий, когда мёртвое время является случайной величиной с тем или иным законом распределения. Здесь отметим работу [12], в которой решается задача оценки параметра распределения непродлевающегося случайного мёртвого времени в пуассоновском потоке и работе [13], в которой находятся формулы для начальных моментов общего периода ненаблюдательности в пуассоновском потоке событий при продлеваемом случайном мёртвом времени.

1. Математическая модель наблюдаемого потока

Рассматривается альтернирующий асинхронный дважды стохастический поток событий, сопровождающий процесс (интенсивность) которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями S_1 и S_2 . Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока) S_1 , если $\lambda(t) = \lambda$, и, наоборот, имеет место второе состояние процесса (потока) S_2 , если $\lambda(t) = 0$. Если имеет место первое состояние процесса S_1 (второе состояние процесса S_2), то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda$ (когда $\lambda(t) = 0$), поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью λ (события потока не наступают). Переход из состояния S_1 (из состояния S_2) процесса $\lambda(t)$ в состояние S_2 (в состояние S_1) может осуществляться в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события потока (свойство асинхронных потоков). При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i , $i=1,2$, есть случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону $F_i(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}$, $t \geq 0$, где α_1 (α_2) – интенсивность смены состояния S_1 на S_2 (S_2 на S_1). В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс ($\lambda(t)$ – принципиально ненаблюдаемый процесс).

После каждого зарегистрированного события в момент времени t_k наступает период мёртвого времени случайной длительности, который порождается этим событием, так что другие события исходного потока, наступившие в течение этого периода мёртвого времени недоступны наблюдению и не вызывают его продления (непродлеваемое мёртвое время). Принимается, что случайная длительность мёртвого времени распределена по равномерному закону с плотностью вероятности $p(T) = 1/T^*$, где T – значение длительности мёртвого времени, $0 < T \leq T^*$.

На рис. 1 приведён вариант возникающей ситуации, где S_1 , S_2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; временная ось $(0, T)$ – ось наступления наблюдаемых событий в моменты времени $t_1, t_2, \dots$; временная ось $(0, t^{(1)})$ – ось наступления наблюдаемых событий в моменты времени $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots$ в первом (S_1) состоянии процесса $\lambda(t)$, на которой также указаны значения длительностей $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \dots$ мёртвых времён, порождённых наблюдаемыми событиями потока; белыми кружками обозначены наблюдаемые события, чёрными – ненаблюдаемые, штриховкой – значения периодов мёртвого времени; траектория процесса $\lambda(t)$ привязана к осям $(0, t^{(1)})$ и $(0, t^{(2)})$.

Рис. 1. Альтернирующий асинхронный поток событий при непродлеваемом случайном мёртвом времени

Целью работы является разработка алгоритма оценивания параметра T^* длительности непродлеваемого случайного мёртвого времени в альтернирующем асинхронном потоке событий.

2. Уравнение моментов для оценивание параметра T^*

Оценивание параметра T^* происходит на основе выборки $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k\}$, $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k \geq 1$, где t_k – моменты наступления событий наблюдаемого потока, функционирующего в стационарном режиме. Для оценки параметра используется метод моментов [14]. Найдём теоретический момент – математическое ожидание случайной величины τ (длительности интервала между двумя соседними событиями наблюдаемого потока)

$M(\tau|T^*)$. Построим уравнение моментов $M(\tau|T^*) = C_1$, где $C_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (t_{k+1} - t_k)$ – оценка теоретического среднего $M(\tau|T^*)$. Из этого уравнения находится оценка $\hat{T}^*$.

Для нахождения теоретического среднего $M(\tau|T^*)$ воспользуемся формулой

$M(\tau|T^*) = \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau$. В этой формуле плотность $p(\tau)$ определяется в виде:

$$p(\tau) = \int_{(T)} p(\tau, T) d\tau = \int_{(T)} p(T) p(\tau|T) dT, \text{ где } (T) \text{ — область изменения величины } T.$$

Для случая, когда мёртвое время является детерминированной величиной длительности T , воспользуемся формулой из [15]:

$$p(\tau|T) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (1)$$

где $z_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2) \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right]$, $z_1 < z_2$, $z_1 > 0$,

$$\gamma(T) = \frac{z_2 - \lambda_1}{(z_2 - z_1)(\alpha_1 + \alpha_2)} \left\{ z_2 - \lambda_2 + \frac{\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)(z_1 - \lambda_1)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T}}{\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1 + \lambda_1\lambda_2[1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T}]} \right\}. \text{ Тогда плотность } p(\tau)$$

будет находиться по формуле

$$p(\tau) = \begin{cases} p_1(\tau) = \int_0^{\tau} p(T)p(\tau|T)dT, & 0 \leq \tau < T^*, \\ p_2(\tau) = \int_0^{T^*} p(T)p(\tau|T)dT, & \tau \geq T^*. \end{cases} \quad (2)$$

Т.к. во втором состоянии события не наступают, то положим в (1) $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 0$. Подставляя выражение (1) в (2) и учитывая, что $p(T) = 1/T^*$, получаем

$$p_1(\tau) = \frac{1}{T^*} \left(1 + e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)\tau} - e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau} \right), \quad 0 \leq \tau < T^*, \quad (3)$$

$$p_2(\tau) = \frac{1}{T^*(z_2 - z_1)(\alpha_1 + \alpha_2)} \left(e^{-z_1\tau} \left[z_2(z_2 - \lambda) e^{z_1 T^*} - (z_2 - z_1)(\alpha_1 + \alpha_2) \right] - e^{-z_1\tau} \times \right. \\ \times e^{(\lambda - z_2)T^*} z_1(z_1 - \lambda) + e^{-z_2\tau} \left[-z_1(z_1 - \lambda) e^{z_2 T^*} - (z_2 - z_1)(\alpha_1 + \alpha_2) \right] + e^{-z_2\tau} \times \\ \left. \times e^{(\lambda - z_1)T^*} z_2(z_2 - \lambda) \right), \quad \tau \geq T^*, \quad (4)$$

$$\text{где } z_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(\lambda + \alpha_1 + \alpha_2) \mp \sqrt{(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right].$$

Выполнение двух условий $p_1(\tau = T^*) = p_2(\tau = T^*)$ и $p'_1(\tau = T^*) = p'_2(\tau = T^*)$ показывает, что функция (2) непрерывна и имеет излом в точке $\tau = T^*$.

Учитывая (2), получим формулу для математического ожидания длительности интервала между соседними событиями наблюдаемого потока $M(\tau|T^*)$:

$$M(\tau|T^*) = \int_0^{T^*} \tau p_1(\tau) d\tau + \int_{T^*}^{\infty} \tau p_2(\tau) d\tau. \text{ Подставляя (3) и (4) в последнюю формулу, получим}$$

$$M(\tau|T^*) = \frac{T^*}{2} + \frac{\lambda\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2}{\lambda\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)} - \frac{\alpha_1}{T^*\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)^2} + \frac{\alpha_1}{T^*\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)^2} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T^*}, \quad T^* \geq 0. \quad (5)$$

Аналитически доказано, что математическое ожидание длительности интервала между соседними событиями $M(\tau|T^*)$ является возрастающей функцией переменной T^* , отсюда следует, что уравнение моментов $M(\tau|T^*) = C_1$ имеет единственное решение. Т.к. решение уравнения моментов единственно, то получение численного решения особых трудностей не представляет [16]. Для установления качества получаемой оценки параметра T^* проведены статистические эксперименты с применением имитационного моделирования.

3. Численные результаты

Численные результаты получены с использованием имитационной модели исследуемого потока при заданных значениях параметров альтернирующего асинхронного потока $\lambda = 1.5$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.1$ с заданной точностью $\varepsilon = 0.0001$ поиска решения уравнения моментов методом простой итерации [16] и заданным шагом $\Delta T^* = 0.001$. Получено $N = 100$ реализаций потока и, следовательно, всего 100 решений уравнения моментов для $T^* = 1, 2, 3, 4, 5$ при фиксированном значении времени моделирования $T_m = 1000$. На основании этих данных вычислены выборочное среднее искомой оценки

$$\hat{M}(\hat{T}^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{T}_i^* \text{ и её выборочная вариация } \text{Var}(\hat{T}^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{T}_i^* - T^*)^2, \text{ где } \hat{T}_i^* - \text{реше-}$$

ние уравнение моментов для i -й реализации потока, T^* – значение оцениваемого параметра, известное из имитационной модели потока.

В табл. 1 приведены численные результаты для $\hat{M}(\hat{T}^*)$, где указано выборочное среднее $\hat{M}(\hat{T}^*)$ для случаев $\lambda = 1$ и $\lambda = 5$ при $T^* = 1, 2, \dots, 5$.

Таблица 1

Оценка математического ожидания длительности интервала между соседними событиями
при $\lambda = 1$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.1$, $T^* = 1, 2, \dots, 5$, $T_m = 1000$

T^*		1	2	3	4	5
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	$\lambda = 1$	0.89	1.87	2.91	3.93	4.95
	$\lambda = 5$	0.97	1.94	2.93	3.95	4.97

На рис. 2 и 3 приведены графики зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ от T^* для $\lambda = 1$ и $\lambda = 5$, построенные по данным табл. 1.

Рис. 2. График зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ от T^* для $\lambda = 1$

Рис. 3. График зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ от T^* для $\lambda = 5$

По данным табл. 1 и рис. 2 и 3 можно сделать следующий вывод: оценка $\hat{T}^*$ – смещённая, т.е. $\hat{M}(\hat{T}^*) < T^*$. Причиной смещения оценки $\hat{T}^*$ относительно известного из имитационной модели T^* служит то, что значение теоретического среднего случайной величины T есть $T^*/2$; в силу этого значения T сосредоточены слева от T^* .

В табл. 2 приведены численные результаты для $\text{Var}(\hat{T}^*)$, где указана выборочная вариация $\text{Var}(\hat{T}^*)$ для случаев $\lambda = 1$ и $\lambda = 5$ при $T^* = 1, 2, \dots, 5$.

Таблица 2

Значение выборочной вариации
при $\lambda = 1$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.1$, $T^* = 1, 2, \dots, 5$, $T_m = 1000$

T^*		1	2	3	4	5
$\text{Var}(\hat{T}^*)$	$\lambda = 1$	$7.52 \cdot 10^{-3}$	0.0011	0.0016	0.0019	0.0024
	$\lambda = 5$	$4.658 \cdot 10^{-3}$	0.0080	0.0013	0.0016	0.0020

На рис. 4 и 5 приведены графики зависимости $\text{Var}(\hat{T}^*)$ от T^* для $\lambda = 1$ и $\lambda = 5$, построенные по данным табл. 2.

Рис. 4. График зависимости $\text{Var}(\hat{T}^*)$ от T^* для $\lambda = 1$

Рис. 5. График зависимости $\text{Var}(\hat{T}^*)$ от T^* для $\lambda = 5$

По данным табл. 2 и рис. 4 и 5 можно сделать следующий вывод: оценка $\hat{T}^*$ — смещённая, т.е. значения $\hat{T}^*$ не стремятся к параметру T^* , но при этом выборочная вариация $\text{Var}(\hat{T}^*)$ стремится к числу, близкому к 0, а, следовательно, можно сказать, что метод оценивания достаточно удовлетворительный и полученную оценку можно принимать за истинную с небольшой погрешностью.

Отметим, что выборочная вариация для $\lambda = 5$ больше, чем для $\lambda = 1$. Причиной этому является то, что при увеличении T^* увеличивается период ненаблюдаемости потока, следовательно, происходит увеличение потерь событий исходного потока, что влечёт за собой ухудшение качества оценивания при одинаковых параметрах.

Заключение

Таким образом, в данной статье рассмотрен альтернирующий асинхронный поток событий с непродлевающимся случайным мёртвым временем. Аналитически получены формулы (3) и (4) для плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями. Выведено математическое ожидание (5) длительности интервала между соседними событиями. Доказано, что математическое ожидание является возрастающей функцией, и поэтому уравнение моментов имеет единственное решение.

Решение уравнения моментов найдено с использованием численного метода простой итерации, которое является оценкой параметра равномерного распределения длительности случайного мёртвого времени. Проведены численные эксперименты, которые указывают на адекватность и хорошее качество найденной оценки в смысле введённого критерия (выборочной вариации оценки).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. – Минск: Изд-во БГУ, 2000. – 175 с.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1979. – № 6. – С. 92–99.
3. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. – 1979. – V. 16. – P. 764–779.
4. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. – Минск: Университетское, 1988. – 256 с.
5. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мёртвого времени в обобщённом полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 1 (30). – С. 27–37.
6. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщённого асинхронного потока событий при непродлеваемом мёртвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 4 (21). – С. 14–25.
7. Горцев А.М., Соловьёв А.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов потока физических событий при непродлеваемом мёртвом времени // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2014. – Т. 57. – № 7. – С. 103–111.
8. Горцев А.М., Василевская Т.П., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мёртвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока с проявлением либо непроявлением событий // Вестник Томского государственного университета. – 2004. – № S9-2. – С. 129–138.
9. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. – 2000. – № 269. – С. 95–98.
10. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщённого асинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 2 (19). – С. 88–101.
11. Горцев А.М., Колягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщённого полусинхронного потока событий при непродлеваемом мёртвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 2 (27). – С. 19–29.
12. Горцев А.М., Загородняя М.Е. Оценивание параметра непродлевающегося мёртвого времени случайной длительности в пуассоновском потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 40. – С. 32–40.
13. Глухова Е.В., Тертугов А.Ф. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий при наличии продлевающегося мёртвого времени // Известия высших учебных заведений. Физика. – 1995. – Т. 38. – № 3. – С. 22–31.
14. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика (Часть 2. Математическая статистика). – Гомель: УО «ГТУ им. Ф. Скорины», 2004. – 146 с.
15. Васильева Л.А. Оценивание длительности мёртвого времени и параметров асинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата технических наук. 2005. – 47 с.
16. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Конченкова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высшая школа, 1994. – 544 с.