МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ
VIII Международной молодежной научной
конференции
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ,
ТЕХНИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 26–30 мая 2021 г.

Под общей редакцией И.С. Шмырина

Томск
Издательство Томского государственного университета
2021

$$\mathbf{F}_1^{(2)}(w, \varepsilon) [\lambda \mathbf{B} - \mathbf{A} - \mu_2 \mathbf{I} + \mu_1 e^{ju} \mathbf{D}] + \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon) (\mu_1 \mathbf{D} + \kappa_1 e^{-ju} \mathbf{I}) - j \varepsilon e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0,$$

$$\mu_1 \mathbf{F}_1^{(2)}(w, \varepsilon) \mathbf{D} \mathbf{e} - \kappa_1 e^{-ju} \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon) \mathbf{e} + j \varepsilon e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{e} = 0.$$

Теорема 2. Пусть $i_2(t)$ – число заявок на орбите второй фазе в тандемной гибридной системе, тогда $\lim_{\sigma \rightarrow 0} E \exp \left\{ jw \sqrt{\sigma} \left(i(t) - \frac{\kappa_1}{\sigma} \right) \right\} = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right\}$, где κ_2 определяется равенством $\kappa_2 = \frac{\kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - \kappa_1 \Phi_0 \mathbf{e} + \mu_1 \mathbf{D} \Phi_1 \mathbf{e}}{\mathbf{r}_0 \mathbf{e} + \kappa_1 \Psi_0 \mathbf{e} - \mu_1 \mathbf{D} \Psi_1 \mathbf{e}}$. Здесь векторы $\mathbf{r}_k$ определены выше, величины $\Phi_0, \Phi_1, \Psi_0, \Psi_1$, определяются системами

$$\begin{aligned} \Phi_0 [\lambda \mathbf{B} - \mathbf{A} - \kappa_1 \mathbf{I}] + \mu_2 \Phi_1 &= 0, \\ \Phi_0 [\mu_1 \mathbf{D} + \kappa_1 \mathbf{I}] + \Phi_1 [\lambda \mathbf{B} - \mathbf{A} - \mu_2 \mathbf{I} + \mu_1 \mathbf{D}] &= \kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{I} - \mu_1 \mathbf{r}_1 \mathbf{D}, \\ \Psi_0 [\lambda \mathbf{B} - \mathbf{A} - \kappa_1 \mathbf{I}] + \mu_2 \Psi_1 &= \mathbf{r}_0, \\ \Psi_0 [\mu_1 \mathbf{D} + \kappa_1 \mathbf{I}] + \Psi_1 [\lambda \mathbf{B} - \mathbf{A} - \mu_2 \mathbf{I} + \mu_1 \mathbf{D}] &= -\mathbf{r}_0. \end{aligned}$$

Вторая асимптотика показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа $i_2(t)$ заявок на второй фазе является гауссовским распределением с математическим ожиданием κ_1/σ и дисперсией κ_2/σ .

Заключение

В результате исследования тандемной системы массового обслуживания, которая содержит конечный бункер на первой фазе и орбиту на второй фазе, было найдено распределения вероятностей числа заявок на орбите. Задача решена методом асимптотического анализа в условии большой задержки заявок на орбите.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. Под редакцией Б.В. Гнеденко. – М.: 1963. – 236 с.
2. Назаров А.А., Пауль С.В., Лизюра О.Д. Асимптотический анализ RQ-системы с N типами вызываемых заявок в предельном условии большой задержки заявок на орбите // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2019. – № 48. – С. 13-20.
3. Судыко Е.А., Назаров А.А. Допредельные характеристики RQ-системы с конфликтами заявок // Научное творчество молодежи: материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции, 15-16 апреля 2010 г. – Томск, 2010. – Ч. 1. – С. 97-100.

DOI: 10.17223/978-5-907442-42-9-2021-26

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАБОТЫ НЕНАДЕЖНОГО УЗЛА ОБРАБОТКИ ЗАПРОСОВ

Решетников О.А., Лапатин И.Л.

Томский государственный университет
oleg.reshetnikov.0411@gmail.com, ilapatin@mail.ru

Введение

В век информационных технологий большой популярностью пользуются телекоммуникационные системы. Зачастую математической моделью таковых являются RQ-системы, т.е. системы с повторными вызовами. Появились они благодаря работам американских ученых R.I. Wilkinson и J.W. Cohen еще в середине XX в., в которых особое внимание уделялось решению практических задач, возникающих в телефонных сетях, и описанию влияния эффекта повторных вызовов на производительность технических

систем. Поскольку данный вопрос представляет реальный практический интерес, имеет смысл изучение, а также и возможное совершенствование уже существующих моделей.

В работе проводится исследование выходящего потока заявок системы М/М/1 с орбитой и прогулками приборов. Следует отметить, что под прогулками прибора подразумевается переключение прибора на обслуживание потока заявок другого типа или приоритета, т.е. не все системное время отводится под один конкретный поток.

Функционирует рассматриваемая система на основе протокола CSMA/CD (Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection), в основе которого заложена методика обнаружения коллизий. В момент, когда станция готова к передаче данных, выполняется прослушивание канала. Если он оказывается свободным, происходит передача сигнала. В противном случае, станция ждет в течение случайного интервала времени, а затем прослушивает линию снова. Заявки, которые пытаются обратиться к узлу связи, формируют входящий поток и обращаются к нему строго по одной. Это позволяет избежать коллизий, при которых кадры накладываются друг на друга, в результате чего передача сообщения не может быть осуществлена.

Основным методом для исследования был выбран метод асимптотического анализа, который позволяет исследовать выходящий поток обслуженных заявок при условии большой задержки на орбите и установить вероятностно-временные характеристики выходящего потока.

Исследование характеристик выходящего потока представляет практический интерес, т.к. в результате формируется входящий поток данных уже для других узлов связи.

1. Математическая модель

На свободный и готовый к работе прибор с интенсивностью обслуживания заявок, имеющей экспоненциальное распределение с параметром μ , через входящий поток поступают заявки с интенсивностью λ . Если прибор занят, то заявка попадает на орбиту. На ней заявки задерживаются в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром σ , после чего заново пытаются обратиться к прибору. Работающий прибор, занятый обслуживанием заявки, может в случайный момент времени «уйти на прогулку», т.е., к примеру, переключиться на обслуживание другого потока заявок или же выйти из строя на случайный промежуток времени. Интенсивность такого перехода – α_1 . В таком случае заявка уходит обратно на орбиту и через какое-то время снова попытается обратиться к прибору. Поступив на прибор, она будет обслуживаться с самого начала. Как только обслуживающее устройство завершает работу над заявкой, она передается на выход, а прибор в свободном состоянии ожидает обращения случайной заявки с орбиты, если она не пуста, либо ожидает поступления заявки из входящего потока, а также может переключиться на обслуживание другого потока заявок («уйти на прогулку»). Выходящие из обслуживающего устройства заявки формируют выходящий поток $m(t)$. Он характеризуется числом заявок, обслуженных к моменту времени t , т.е. за промежуток времени $[0, t]$. Считаем, что память не ограничена, т.е. все заявки учитываются и не теряются из-за исчерпания памяти.

Основной задачей работы является получение распределения вероятностей числа событий, наступивших в выходящем потоке системы с «прогулками» за время t .

2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Поскольку исследуемый процесс $m(t)$ сам по себе не является марковским, т.к. зависит еще от состояния прибора, то в рассмотрение добавляется процесс $k(t)$, изменения которого зависят от наличия заявок на орбите, т.е. от значения процесса $i(t)$. Трехмерный процесс $\{k(t), i(t), m(t)\}$ является марковским, т.к., зная текущее состояние его компонент, можно с вероятностной точки определить будущее состояние, что согласуется с понятием марковского процесса.

Функционирование рассматриваемой модели описывается рядом случайных процессов:

1. $k(t)$ – состояние прибора в момент времени $t \in \{0, 1, 2\}$. 0 – прибор свободен, 1 – прибор занят обслуживанием поступившей заявки, 2 – прибор «ушел на прогулку».
2. $i(t)$ – количество заявок на орбите в момент времени $t \in [0, +\infty)$.
3. $m(t)$ – число обслуженных заявок за время $t \in [0, t]$.

Запишем вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k , на орбите i заявок и к текущему моменту времени обслужено m заявок:

$$P\{k(t) = k, i(t) = i, m(t) = m\} = P_k(i, m, t).$$

Для распределения вероятностей составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(i, m, t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma + \alpha_1) P_0(i, m, t) + \mu P_1(i, m-1, t) + \alpha_2 P_2(i, m, t), \\ \frac{\partial P_1(i, m, t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu + \alpha_1) P_1(i, m, t) + \lambda P_1(i-1, m, t) + \\ + (i+1) \cdot \sigma P_0(i+1, m, t) + \lambda P_0(i, m, t), \\ \frac{\partial P_2(i, m, t)}{\partial t} = -(\lambda + \alpha_2) P_2(i, m, t) + \alpha_1 P_0(i, m, t) + \alpha_1 P_1(i-1, m, t) + \lambda P_2(i-1, m, t). \end{cases} \quad (1)$$

Система не ограничивается тремя приведенными уравнениями, поскольку каждое представленное уравнение является системой бесконечного числа уравнений, т.к. значения i и m могут принимать неограниченно число состояний.

Введем частичные характеристические функции и обозначим $j = \sqrt{-1}$:

$$H_k(u_1, u_2, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{ju_1 i} e^{ju_2 m} P_k(i, m, t). \quad (2)$$

Применяя замену (2) к (1), получим

$$\begin{cases} \frac{\partial H_0(u_1, u_2, t)}{\partial t} = -(\lambda + \alpha_1) H_0(u_1, u_2, t) + j\sigma \frac{\partial H_0(u_1, u_2, t)}{\partial u_1} + \\ + \mu e^{ju_2} H_1(u_1, u_2, t) + \alpha_2 H_2(u_1, u_2, t), \\ \frac{\partial H_1(u_1, u_2, t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu + \alpha_1) H_1(u_1, u_2, t) + \lambda e^{ju_1} H_1(u_1, u_2, t) - \\ - j\sigma e^{-ju_1} \frac{\partial H_0(u_1, u_2, t)}{\partial u_1} + \lambda H_0(u_1, u_2, t), \\ \frac{\partial H_2(u_1, u_2, t)}{\partial t} = -(\lambda + \alpha_2) H_2(u_1, u_2, t) + \alpha_1 H_0(u_1, u_2, t) + \\ + e^{ju_1} [\alpha_1 H_1(u_1, u_2, t) + \lambda H_2(u_1, u_2, t)]. \end{cases} \quad (3)$$

Полученную систему (3) будем решать методом асимптотического анализа при условии большой задержки на орбите, т.е. $\sigma \rightarrow 0$.

3. Метод асимптотического анализа

Введем обозначение $\sigma = \varepsilon$ и проведем замену в системе (3): $u_1 = \varepsilon w$, $H_k(u_1, u_2, t) = F_k(w, u_2, t, \varepsilon)$. Получим систему

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F_0(w, u_2, t, \varepsilon)}{\partial t} &= -(\lambda + \alpha_1) F_0(w, u_2, t, \varepsilon) + \\ &\quad + j \frac{\partial F_0(w, u_2, t, \varepsilon)}{\partial w} + \mu e^{ju_2} F_1(w, u_2, t, \varepsilon) + \alpha_2 F_2(w, u_2, t, \varepsilon), \\ \frac{\partial F_1(w, u_2, t, \varepsilon)}{\partial t} &= -(\lambda + \mu + \alpha_1) F_1(w, u_2, t, \varepsilon) + \\ &\quad + \lambda e^{j\omega w} F_1(w, u_2, t, \varepsilon) - j e^{-j\omega w} \frac{\partial F_0(w, u_2, t, \varepsilon)}{\partial w} + \lambda F_0(w, u_2, t, \varepsilon), \\ \frac{\partial F_2(w, u_2, t, \varepsilon)}{\partial t} &= -(\lambda + \alpha_2) F_2(w, u_2, t, \varepsilon) + \alpha_1 F_0(w, u_2, t, \varepsilon) + \\ &\quad + e^{j\omega w} [\alpha_1 F_1(w, u_2, t, \varepsilon) + \lambda F_2(w, u_2, t, \varepsilon)]. \end{aligned} \right.$$

С использованием условия согласованности для многомерных распределений характеристическая функция процесса $m(t)$ выражается следующим образом через введенные функции:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M(e^{ju_2 m(t)}) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sum_{k=0}^2 H_k(0, u_2, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^2 F_k(0, u_2, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^2 F_k(u_2, t).$$

Теорема. Асимптотическое приближение характеристической функции числа обслуженных заявок входящего потока за время t при условии большой задержки на орбите имеет вид

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M(e^{ju_2 m(t)}) = \sum_{k=0}^2 F_k(u_2, t) = F(u_2, t) = \mathbf{R} \cdot e^{\mathbf{M}(u_2)t} \cdot \mathbf{E}, \quad (4)$$

где $\mathbf{M}(u_2) = \begin{bmatrix} -(\lambda + \alpha_1 + \kappa) & \kappa + \lambda & \alpha_1 \\ \mu e^{ju_2} & -(\mu + \alpha_1) & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}$ – единичный вектор-столбец соответствующей размерности, $\mathbf{R} = \{R_0, R_1, R_2\}$ – стационарное распределение вероятностей процесса $k(t)$ ($R_0 = \frac{\alpha_2(\mu + \alpha_1)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda + \alpha_1 + \kappa + \mu)}$, $R_1 = \frac{\alpha_2(\lambda + \kappa)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda + \alpha_1 + \kappa + \mu)}$, $R_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$) κ – норми-

рованное среднее процесса $i(t)$, $\kappa = \frac{\lambda^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda \alpha_1(\mu + \alpha_1 + \alpha_2)}{\mu \alpha_2 - \lambda(\alpha_1 + \alpha_2)}$.

4. Распределение вероятностей числа событий, наступивших в выходящем потоке

Поскольку в ходе работы была получена формула (4), являющаяся асимптотическим приближением характеристической функции числа событий, наступивших в выходящем потоке, перейдем к распределению вероятностей числа событий, наступивших в выходящем потоке за время t . Для этого применим обратное преобразование Фурье к формуле (4):

$$P\{m(t) = m\} = P_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ju_2 m} \mathbf{R} e^{\mathbf{M}(u_2)t} \mathbf{E} du_2. \quad (5)$$

Заключение

В ходе проделанной работы были изучены методы теории массового обслуживания, благодаря которым была построена математическая модель узла связи с орбитой и прогулками прибора. Рассматриваемая система представляет собой трехмерную цепь

Маркова с непрерывным временем. Для описания функционирования модели была составлена система дифференциально-конечноразностных уравнений Колмогорова (1). Как результат, с помощью метода частичных характеристических функций и модификации метода асимптотического анализа была получена формула (4), являющаяся асимптотическим приближением характеристической функции числа событий, наступивших в выходящем потоке системы М/М/1. Применяв к полученной формуле (4) обратное преобразование Фурье, было получено распределение вероятностей числа событий, наступивших в выходящем потоке за время t , формула (5).

DOI: 10.17223/978-5-907442-42-9-2021-27

ЗАДАЧА MARL ДЛЯ СВЕТОФОРА НА ПЕРЕКРЁСТКЕ

Тисленко Т.И.

Сибирский федеральный университет
timtisko@mail.ru

Введение

В Красноярске с каждым годом растет количество желающих стать автомобилистом. По данным агентства «Автостат» на 1 января 2020 г. Красноярский край оказался на 12 месте в топ-20 регионов по объему автомобильного парка в России. С количеством автомобилистов увеличивается и время, которое проводится в пробках. Таким образом, проблема оптимизации сети светофоров с целью уменьшения задержек трафика автомобилей является актуальной и востребованной в современных мегаполисах. Решение проблемы – согласование действий сети светофоров по управлению процессом выбора задержки сигнала. Внедрение адаптивных систем светофоров в городскую транспортную сеть может его уменьшить.

На данный момент существует множество адаптивных систем управления трафиком. Например, модель Split Cycle Offset Optimization Technique (SCOOT) в Великобритании [1]. При ее использовании транспортные средства обнаруживаются по мере приближения к перекрестку задолго до стоп-линии, затем с нескольких перекрестков сигналы об обнаружении передаются в центральную систему, которая моделирует поток транспорта в этом районе и производит адаптацию фаз светофора в соответствии с трафиком, тем самым сводя к минимуму ненужные зеленые фазы. Также к централизованному типу координации можно отнести систему Traffic-responsive Urban Control (TUC) в Греции [1,2]. Использование центральных систем координации в случае большого количества перекрестков ресурсозатратно, поэтому в качестве альтернативы возникли распределенные модели [1]: Sydney Coordinated Adaptive Traffic System (SCATS) в Австралии, Dynamic Programming Algorithm (PRODYN) и Real-time Hierarchical Optimized Distributed Effective System (RHODES). Приведенные системы оперируют количеством транспортных средств, проходящих на определенном отрезке полосы дороги, и поэтому их можно отнести к моделям, основанным на плотности потока.

Как альтернативный способ координации можно рассмотреть модели, основанные на марковских процессах принятия решений, которые могут не оперировать интенсивностью потока. В качестве математической модели сети светофоров в работе рассматривается управляемый марковский процесс с конечным числом действий и состояний [3,4]. Каждый агент (светофор) не располагает ресурсами и решает задачу целесообразности выбора того или иного сигнала. Среда – перекресток с машинами, где на отрезках дорог за 100 м до стоп-линий засекается время. Состояние среды отражает активность фазы светофора. Тогда проблема оптимизации сводится к задаче MARL (Multiagent Reinforcement Learning) [4]. Как правило, обучение с подкреплением используется для одного агента в среде, чтобы максимизировать его долгосрочную награду. Модель среды – марковский процесс принятия решения [5]. В работе исследуется