МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

**VIII Международной молодежной научной
конференции**

**«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ,
ТЕХНИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»**

Томск, 26–30 мая 2021 г.

Под общей редакцией И.С. Шмырина

Томск
Издательство Томского государственного университета
2021

3. *Дмитренко А.Г., Балашова О.М.* Моделирование электромагнитного рассеяния на тонких параллельных идеально проводящем и диэлектрическом цилиндрах // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2020. – № 51. – С. 35–44.

4. *Дмитренко А.Г., Балашова О.М.* Алгоритм и программа расчета электромагнитного рассеяния на тонких ортогональных идеально проводящем и диэлектрическом цилиндрах // Материалы Международной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем». Томск, 28-30 мая 2020 г. – С. 90-98.

5. *Дмитренко А.Г., Балашова О.М.* Моделирование электромагнитного рассеяния на тонких ортогональных идеально проводящем и диэлектрическом цилиндрах // Материалы тринадцатой международной конференции «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур». Томск, 7-9 сентября 2020 г. – С. 7–8.

DOI: 10.17223/978-5-907442-42-9-2021-14

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ОБОБЩЁННОМ МАР-ПОТОКЕ СОБЫТИЙ

Кеба А.В., Нежелская Л.А.

Томский государственный университет
mir.na.mig7@mail.ru, ludne@mail.ru

Введение

В настоящее время математические модели теории массового обслуживания (ТМО) широко используются для описания и анализа реальных физических, технических и иных процессов и систем. Интенсивное развитие компьютерных технологий и информационных сетей связи послужило толчком к формированию и развитию ключевых сфер приложений аппарата ТМО: телекоммуникационных, вычислительно-информационных, компьютерных, спутниковых сетей связи и т.п. Так, если рассмотреть входящий поток событий реальных систем, то можно выявить, что характеризующая их интенсивность подвержена случайным изменениям, моменты времени регистрации событий, в большинстве, носят случайный характер. Данные факторы становятся причиной рассмотрения в качестве математических моделей информационных потоков сообщений в реальных сетях и системах дважды стохастических потоков событий [1], которые подразделяются на два класса: 1) интенсивность потоков есть непрерывный случайный процесс [2,3]; 2) интенсивность потоков есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний [4–6]. Отметим, что к потокам второго класса относится обобщённый МАР-поток событий с произвольным (конечным) числом состояний, который представляет собой адекватную математическую модель реальных потоков случайных событий.

В данной работе осуществляется исследование обобщённого МАР-потока событий с произвольным числом состояний при его полной наблюдаемости. Находится явный вид плотности вероятности [7–9] длительности интервала между моментами наступления соседних событий. Данная статья является непосредственным развитием работ [10–13].

1. Постановка задачи

Исследуется обобщённый МАР-поток событий с произвольным числом состояний (далее – поток), функционирующий в установившемся режиме (время функционирования потока стремится к бесконечности). Сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ изучаемого потока представляет собой кусочно-постоянный принципиально ненаблюдаемый случайный процесс с n состояниями: $S_1, S_2, \dots, S_n$. Полагается, что при $\lambda(t) = \lambda_i$ имеет место i -е состояние (S_i), $i = \overline{1, n}$ процесса $\lambda(t)$. При этом $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$. Наблюдаемыми являются моменты времени наступления событий потока $t_1, t_2, \dots$.

Функция распределения случайной величины – длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i – является экспоненциальной: $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $t \geq 0$, $i = \overline{1, n}$. В момент окончания состояния S_i процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния S_i в состояние S_j с вероятностью $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$ с наступлением события потока или с вероятностью $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$ без наступления события потока, $i, j = \overline{1, n}$. Отметим, что для введённых вероятностей справедливо $\sum_{j=1}^n P_0(\lambda_j | \lambda_i) + \sum_{j=1}^n P_1(\lambda_j | \lambda_i) = 1$, $i = \overline{1, n}$.

Замечание 1. Введение вероятности $P_0(\lambda_i | \lambda_i) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_i без наступления события приводит к обобщению классического МАР-потока с произвольным числом состояний.

Утверждение. Для обобщённого МАР-потока событий с n состояниями процесс $\lambda(t)$ является скрытым марковским процессом.

Блочная матрица инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ имеет вид $\mathbf{D} = \|\mathbf{D}_0 | \mathbf{D}_1\|$, где

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} -\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_1)) & \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_0(\lambda_n | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) & -\lambda_2(1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_2)) & \dots & \lambda_2 P_0(\lambda_n | \lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_0(\lambda_1 | \lambda_n) & \lambda_n P_0(\lambda_2 | \lambda_n) & \dots & -\lambda_n(1 - P_0(\lambda_n | \lambda_n)) \end{pmatrix}_{n \times n},$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_1(\lambda_n | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) & \dots & \lambda_2 P_1(\lambda_n | \lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_1(\lambda_1 | \lambda_n) & \lambda_n P_1(\lambda_2 | \lambda_n) & \dots & \lambda_n P_1(\lambda_n | \lambda_n) \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

В качестве иллюстрации на рис. 1 приведена одна из реализаций процесса $\lambda(t)$ и наблюдаемого потока, где $\lambda_i(t)$ – значение процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i , $i = \overline{1, n}$; $t_1, t_2, \dots$ – моменты времени наступления событий в наблюдаемом потоке.

Рис. 1. Реализация обобщённого МАР-потока событий с произвольным числом состояний

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_k \geq 0$ – значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока t_k и t_{k+1} , $k = 1, 2, \dots$. Для плотности вероятности значений τ_k вследствие функционирования потока в стационарном режиме справедливо $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geq 0$, при любом $k \geq 1$, что позволяет без ограничения общности положить момент наступления события t_k равным нулю или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$.

Задача заключается в нахождении явного вида плотности распределения вероятностей длительности интервала между моментами наступления соседних событий в обобщённом МАР-потоке событий с двумя состояниями.

2. Вид плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в обобщённом МАР-потоке событий

Последовательность $t_1, t_2, \dots$ образует вложенную по моментам времени наступления событий цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, поэтому плотность $p(\tau)$ имеет вид

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (1)$$

где $\pi_i(0)$ – условная стационарная вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии S_i при условии, что в момент времени $\tau = 0$ событие потока наступило, $i = 1, 2$; $\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$; пусть $p_{ij}(\tau)$ – условная вероятность того, что на интервале $(0, \tau)$ нет событий потока и в момент времени τ значение процесса $\lambda(\tau) = \lambda_j$ при условии, что в момент времени $\tau = 0$ значение процесса $\lambda(0) = \lambda_i$, и событие потока в момент времени $\tau = 0$ наступило, $i, j = 1, 2$; $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ – соответствующая вероятности $p_{ij}(\tau)$ плотность вероятности, $i, j = 1, 2$.

Для введённых величин справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Условные вероятности $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в обобщённом МАР-потоке событий имеют вид

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau) &= \frac{1}{z_1 - z_2} \left\{ \left[\lambda_2 (1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_2)) - z_1 \right] e^{-z_1 \tau} - \left[\lambda_2 (1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_2)) - z_2 \right] e^{-z_2 \tau} \right\}, \\ p_{12}(\tau) &= \frac{\lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1)}{z_2 - z_1} \left\{ e^{-z_1 \tau} - e^{-z_2 \tau} \right\}, \\ p_{22}(\tau) &= \frac{1}{z_1 - z_2} \left\{ \left[\lambda_1 (1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_1)) - z_1 \right] e^{-z_1 \tau} - \left[\lambda_1 (1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_1)) - z_2 \right] e^{-z_2 \tau} \right\}, \\ p_{21}(\tau) &= \frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)}{z_2 - z_1} \left\{ e^{-z_1 \tau} - e^{-z_2 \tau} \right\}, \\ z_{1,2} &= \frac{\lambda_1 (1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_1)) + \lambda_2 (1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_2)) \mp \sqrt{D}}{2}, \quad 0 < z_1 < z_2, \\ D &= \left[\lambda_1 (1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_1)) - \lambda_2 (1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_2)) \right]^2 + 4\lambda_1 \lambda_2 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) P_0(\lambda_1 | \lambda_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Лемма 2. Плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в обобщённом МАР-потоке событий определяются формулами

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{11}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) p_{11}(\tau) + \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) p_{12}(\tau), \\
\tilde{p}_{12}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) p_{11}(\tau) + \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) p_{12}(\tau), \\
\tilde{p}_{21}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) p_{21}(\tau) + \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) p_{22}(\tau), \\
\tilde{p}_{22}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) p_{21}(\tau) + \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) p_{22}(\tau),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, определены в (2).

Лемма 3. Условные финальные вероятности $\pi_i(0)$, $i = 1, 2$, в обобщённом МАР-потоке событий задаются выражениями

$$\begin{aligned}
\pi_1(0) &= \frac{A}{A+B}, \quad \pi_2(0) = \frac{B}{A+B}, \quad \pi_1(0) + \pi_2(0) = 1, \\
A &= P_1(\lambda_1 | \lambda_2)(1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_1)) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)P_1(\lambda_1 | \lambda_1), \\
B &= P_1(\lambda_2 | \lambda_1)(1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_2)) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1)P_1(\lambda_2 | \lambda_2).
\end{aligned} \tag{4}$$

Леммы 2 и 3 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема. В обобщённом МАР-потоке плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями имеет вид

$$\begin{aligned}
p(\tau) &= \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad \tau \geq 0, \\
\gamma &= \frac{z_2 - \lambda_1 \pi_1(0) [P_1(\lambda_1 | \lambda_1) + P_1(\lambda_2 | \lambda_1)] - \lambda_2 \pi_2(0) [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2)]}{z_2 - z_1},
\end{aligned} \tag{5}$$

где z_i определены в (2), $\pi_i(0)$ – в (4), $i = 1, 2$.

Доказательство. Подставляя в (1) сначала (3), а затем явные выражения (4) для $\pi_i(0)$, $i = 1, 2$, проделывая необходимые преобразования, приходим к (5). Теорема доказана.

Замечание 2. Полагая в (5) вероятности $P_0(\lambda_j | \lambda_i) = 0$, $i, j = \overline{1, 2}$, $P_1(\lambda_2 | \lambda_1) = p$, $P_1(\lambda_1 | \lambda_2) = q$, приходим к виду плотности для синхронного потока [9], являющегося частным случаем рассматриваемого обобщённого МАР-потока событий:

$$\begin{aligned}
p(\tau) &= \gamma \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} + (1 - \gamma) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau}, \quad \tau \geq 0, \\
\gamma &= \frac{q}{p + q}, \quad \lambda_1 > \lambda_2, \quad 0 < p \leq 1, \quad 0 < q \leq 1.
\end{aligned}$$

Заключение

В данной статье получен явный вид (5) плотности вероятности $p(\tau)$, $\tau \geq 0$, длительности интервала между наступлениями соседних событий. Полученный результат можно использовать для решения задачи оценивания неизвестных параметров обобщённого МАР-потока событий с двумя состояниями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grandell J. Doubly stochastic Poisson processes. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1976. – 240 p.
2. Cox D.R., Miller H.D. The theory of stochastic processes. – New York: Wiley, 1965. – 398 p.
3. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 1964. – V. 60. – Is. 4. – P. 923–930.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи. Ч. 1. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1979. – №6. – С. 92–99.
5. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи Ч. 2. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1980. – № 1. – С. 55–61.
6. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. – 1979. – V. 16. – P. 764–779.

7. Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного МАР-потока событий и условия рекуррентности потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 1 (30). С. 57–67.
8. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. – 2015. – V. 564. – P. 141–151.
9. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. – 2002. – № S1-1. – С. 24–29.
10. Кеба А.В., Нежелская Л.А. Статистические эксперименты на имитационной модели обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая. – 2018. – Т. 302. – С. 157–164.
11. Кеба А.В., Нежелская Л.А. Апостериорные вероятности состояний обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая. – 2019. – Т. 304. – С. 23–32.
12. Кеба А.В., Нежелская Л.А. Статистические эксперименты на имитационной модели обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний в условиях непродлевающего мертвого времени // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Тринадцатой Международной конференции, 7–9 сентября 2020 г. – Томск, 2020. – С. 85–86.
13. Nezhel'skaya L.A., Keba A.V. Optimal state estimation of a generalized MAP event flow with an arbitrary number of states observability // Automation and Remote Control. – 2021. – V. 82. – No. 5. – P. 798–811.

DOI: 10.17223/978-5-907442-42-9-2021-15

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ НА ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ОБОБЩЕННОГО ПОЛУСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ С ПРОДЛЕВАЮЩИМ МЕРТВЫМ ВРЕМЕНЕМ ФИКСИРОВАННОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

Нежелская Л.А., Степаненко И.Д.
Томский государственный университет
ludne@mail.ru, 97step@mail.ru

Введение

Системы массового обслуживания (СМО) являются широко распространенными математическими моделями реальных физических, технических, экономических, информационных систем и сетей. СМО включают: 1) множество входящих потоков событий различных типов; 2) множество обслуживающих приборов; 3) множество бункеров (накопителей, очередей); 4) дисциплины обслуживания [1].

В последние десятилетия в связи с интенсивным развитием компьютерной техники и информационных технологий возникла важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, спутниковых сетей связи, телекоммуникационных сетей и т.п. Для реализации перечисленных задач классические математические модели входящих потоков событий (пуассоновские потоки) являются в той или иной степени непригодными для описания реальных информационных потоков сообщений [2]. На практике параметры, определяющие входящий поток событий, неизвестны или известны только частично, они изменяются со временем, при этом изменения часто носят случайный характер, что привело к рассмотрению дважды стохастических потоков событий [3–5]. Двойная стохастика характеризуется случайностью моментов времени наступления событий в потоке и представлением интенсивности потока как случайного процесса.

В данной работе исследуется первый элемент, определяющий СМО, в частности, обобщенный полусинхронный поток событий [6,7] при условии неполной наблюдаемости потока. Т.к. решение различных задач, в том числе оценка состояний и параметров дважды стохастического потока, может быть произведено только по наблюдаемым событиям, то наличие периода ненаблюдаемости (далее – мертвого времени) приводит к невозможности зарегистрировать все события потока и, как следствие, к ухудшению качества оценивания [8]. На практике это может быть обусловлено работой приборов, регистрирующих входящий поток. При регистрации прибором события возникает