МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ
VIII Международной молодежной научной
конференции
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ,
ТЕХНИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 26–30 мая 2021 г.

Под общей редакцией И.С. Шмырина

Томск
Издательство Томского государственного университета
2021

Чтобы перейти от характеристических функций обратно к распределению, нам необходимо воспользоваться обратным преобразованием Фурье:

$$P\{m(t) = m\} = P(m, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ju_2 m} \mathbf{R} e^{\mathbf{J}(u_2) t} \mathbf{E} \mathbf{E} du_2. \quad (9)$$

Заключение

В ходе работы была рассмотрена гибридная система с очередью на первой фазе и орбитой на второй. Для описания модели была составлена система дифференциальных уравнений Колмогорова (2). С использованием метода частичных характеристических функций и метода асимптотического анализа была получена формула (8), являющаяся асимптотическим приближением характеристической функции числа событий, наступивших в выходящем потоке. С применением к полученной формуле (8) обратного преобразования Фурье было получено распределение вероятностей числа событий, наступивших в выходящем потоке за время t (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Krishna C.M., Lee Y.H. A study of two-phase service // Operations Research Letters. – 1990. – V. 9. – P. 91–97.
2. Kendall D.G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain. – The Annals of Mathematical Statistics, 1953. – P. 338–354.
3. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. – Springer, 2008. – 309 p.
4. Nawel Gharbi, Claude Dutheillet An algorithmic approach for analysis of finite-source retrial systems with unreliable servers // Computers & Mathematics with Applications. – 2011. – V. 62, Iss. 6. – P. 2535–2546.
5. Назаров А.А., Анисимова А.А. Асимптотический анализ первого порядка двухфазной СМО с конечной очередью и орбитой в условии большой задержки заявок на орбите. // Молодежная научная школа по прикладной теории вероятностей и телекоммуникационным технологиям (АРТСТ–2017): материалы молодежной научной школы. Россия, Москва, 23–27 октября 2017 г.; под общ. ред. К.Е. Самуйлова, Е.А. Кучерявого, А.Н. Дудина. – Москва : РУДН, 2017. – С. 175–177.

DOI: 10.17223/978-5-907442-42-9-2021-22

ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ДУБЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ С ПОЛНЫМ ВОССТАНОВЛЕНИЕМ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ДЛИТЕЛЬНОСТЯХ ЖИЗНИ И РЕМОНТА ЕЁ ЭЛЕМЕНТОВ*

Иванова Н.М.^{1,2}, Нибасумба Э.¹

¹ Российский университет дружбы народов

² Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
nm_ivanova@bk.ru, ema.patiri2015@yandex.ru

Введение

Теория регенерирующих процессов была предложена Смитом в 1955 г. [1] в качестве нового метода исследования случайных процессов. Эта теория нашла множество обобщений (см., например, [2,3]) ввиду широкого круга применений к прикладным задачам. Исследование систем с произвольными распределениями времен жизни и ремонта их компонент важно как с теоретической точки зрения, так и прикладной. В [4] для функций распределения длительностей безотказной работы и ремонта были введены модифицированные преобразования Лапласа-Стилтьеса. На основе этого преобразования в [5] с помощью теории разложимых полурегенерирующих процессов [6] были найдены аналитические выражения для основных характеристик надежности данной системы при сценарии частичного ремонта. Настоящая работа продолжает ис-

* Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00575А (Иванова Н.М., проведение аналитических расчетов).

следование надежности дублированной системы холодного резервирования, но при сценарии полного восстановления. Вычисляются такие характеристики надежности, как функция надежности и среднее время жизни системы, а также нестационарные и стационарные вероятности состояний при произвольных распределениях длительностей жизни и восстановления.

1. Постановка задачи и обозначения

Рассмотрим систему холодного резервирования, состоящую из двух компонент и одной ремонтной единицы. Каждая из компонент может находиться в двух состояниях: рабочем и отказовом, при этом вся система отказывает, когда отказывают обе её компоненты.

Обозначим через A_i , B_i и C_i ($i = 1, 2, \dots$) последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин (с.в.) времени безотказной работы (в.б.р.), частичного и полного ремонта элементов и системы соответственно. Эти с.в. имеют функции распределения (ф.р.) $A(t) = P\{A_i \leq t\}$, $B(t) = P\{B_i \leq t\}$ и $C(t) = P\{C_i \leq t\}$. Предположим, что мгновенные отказы и восстановления невозможны и их средние значения конечны:

$$A(0) = B(0) = C(0) = 0,$$

$$a = \int_0^{\infty} (1 - A(x))dx < \infty, \quad b = \int_0^{\infty} (1 - B(x))dx < \infty, \quad c = \int_0^{\infty} (1 - C(x))dx < \infty.$$

Введем следующие обозначения.

1. Преобразования Лапласа – Стильтеса (ПЛС) ф.р. времен жизни и ремонта

$$\tilde{a}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dA(x), \quad \tilde{b}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dB(x), \quad \tilde{c}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dC(x).$$

2. Модифицированные преобразования Лапласа – Стильтеса (МПЛС)

$$\tilde{a}_B(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} B(x) dA(x), \quad \tilde{b}_A(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} A(x) dB(x).$$

3. Соответствующие усеченные средние

$$a_B = -\tilde{a}'_B(0) = \int_0^{\infty} xB(x) dA(x), \quad b_A = -\tilde{b}'_A(0) = \int_0^{\infty} xA(x) dB(x).$$

4. Вероятности $P\{B \leq A\}$ и $P\{B > A\}$ связаны с преобразованиями через следующие соотношения

$$\tilde{a}_B(0) = \int_0^{\infty} B(x) dA(x) = P\{B \leq A\} \equiv p, \quad \tilde{b}_A(0) = \int_0^{\infty} A(x) dB(x) = P\{B > A\} \equiv q = 1 - p.$$

Рассмотрим случайный процесс $J = \{J(t), t \geq 0\}$, где $J(t)$ – количество неисправных компонент в момент времени t . Множество всех возможных состояний системы обозначим как $E = \{i = 0, 1, 2\}$, где i – число отказавших компонент. Исследование процесса J проводится с помощью теории разложимых полу-регенерирующих процессов (РПРП). Обозначим через F и $F(t) = P\{F \leq t\}$ время до полного отказа системы и соответствующую ф.р. Таким образом, в работе вычисляются функция надежности $R(t) = P\{F > t\} = 1 - F(t)$, нестационарные вероятности состояний системы $\pi_j(t) = P\{J(t) = j\}$, $j = 0, 1, 2$, а также стационарные $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_j(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{J(t) = j\}$, $j = 0, 1, 2$.

2. Функция надежности и среднее время жизни системы

Процесс J , траектория которого представлена на рис 1, является регенерирующим (р.п.) с задержкой. Пусть W – это время до отказа системы из состояния 1, F – это время до полного отказа системы, G – это длина цикла регенерации. Вычислим соответствующие функции распределения.

Рис. 1. Траектория процесса J

Из рис. 1 видно, что W удовлетворяет следующему стохастическому уравнению

$$W = \begin{cases} A + W, & B < A, \\ A, & B \geq A, \end{cases}$$

тогда как F и G имеют вид соответственно $F = A + W$ и $G = C + F$.

Лемма 1. ПЛС плотности распределений времени между отказами $\tilde{w}(s) = E[e^{-sW}]$ и времени до полного отказа системы $\tilde{f}(s) = E[e^{-sF}]$ имеют вид

$$\tilde{w}(s) = \frac{\tilde{a}(s) - \tilde{a}_B(s)}{1 - \tilde{a}_B(s)}, \quad \tilde{f}(s) = \tilde{a}(s) \frac{\tilde{a}(s) - \tilde{a}_B(s)}{1 - \tilde{a}_B(s)}. \quad (1)$$

Лемма 2. Производящая функция времени между двумя последовательными посещениями состояния 0 после отказа всей системы $\tilde{g}(s) = E[e^{-sG}]$ определяется как

$$\tilde{g}(s) = \tilde{a}(s) \tilde{c}(s) \frac{\tilde{a}(s) - \tilde{a}_B(s)}{1 - \tilde{a}_B(s)}. \quad (2)$$

После вычисления распределения времени до отказа системы легко перейти к функции надежности $R(t) = P\{F > t\}$ с помощью второго выражения из (1).

Теорема 1. ПЛ функции надежности $\tilde{R}(s) = \frac{1}{s} - \tilde{F}(s)$ системы холодного дублирования при произвольных длительностях отказов и ремонта имеет вид

$$\tilde{R}(s) = \frac{(1 - \tilde{a}(s))(1 + \tilde{a}(s) - \tilde{a}_B(s))}{s(1 - \tilde{a}_B(s))}.$$

Следствие 1. Среднее время безотказной работы системы $E[F] = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{R}(0)$ и среднее время периода регенерации $E[G] = -\frac{d}{ds} \tilde{g}(s)|_{s=0}$ принимают вид соответственно

$$E[F] = a + \frac{a}{q}, \quad E[G] = a + c + \frac{a}{q}.$$

3. Исследование процесса на периоде регенерации

Переходим к исследованию поведения процесса на отдельном периоде регенерации. Моменты регенерации $S_0 = 0$, $S_1 = S_0 + G_1$, ..., $S_n = S_{n-1} + G_n$, ... являются моментами возвращения процесса в состояние 0 после полного восстановления системы. Здесь G_n ($n = 1, 2, \dots$) – последовательность н.о.р. с.в. интервалов времени между двумя последовательными возвратами системы в состояние 0 после полного отказа.

Вероятности состояний процесса J в любой момент времени t $\pi_j(t) = P\{J(t) = j\}$, $j = 0, 1, 2$, могут быть выражены в терминах их же распределения на отдельном периоде регенерации $\pi_j^{(1)}(t) = P\{J(t) = j, t < G\}$, $j = 0, 1, 2$, а также функции восстановления

$H(t) = \sum P\left\{\left[\sum_{1 \leq i \leq n} G_i\right] \leq t\right\} = \sum_{n \geq 1} G^{*n}(t)$, где $G(t) = P\{G_i \leq t\}$ – ф.р. с.в. G_i ($i = 1, 2, \dots$). Тогда

$$\pi_j(t) = \pi_j^{(1)}(t) + \int_0^t \pi_j^{(1)}(t-u) dH(u). \quad (3)$$

Согласно теории восстановления, ПЛС функции восстановления $H(t)$ определяется с помощью (2) как $\tilde{h}(s) = \frac{\tilde{g}(s)}{1 - \tilde{g}(s)}$, где $\tilde{h}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dH(t)$. Переходя к ПЛ для (3) с учетом $\tilde{h}(s)$, получаем

$$\tilde{\pi}_j(s) = (1 + \tilde{h}(s)) \tilde{\pi}_j^{(1)}(s) = \frac{1 - \tilde{a}_B(s)}{1 - \tilde{a}(s) + (\tilde{a}(s) - \tilde{a}_B(s))(1 - \tilde{a}(s)\tilde{c}(s))} \tilde{\pi}_j^{(1)}(s), \quad j = 0, 1, 2. \quad (4)$$

Далее необходимо вычислить вероятности на отдельном периоде регенерации $\pi_j^{(1)}(t)$.

4. Нестационарные вероятности состояний системы

Согласно теории РПП, если поведение процесса на основном периоде регенерации достаточно сложно и удаётся найти так называемые вложенные моменты регенерации, то распределение процесса на основном периоде регенерации определяется по его распределению на вложенных периодах регенерации и вложенной функции восстановления.

Вероятности состояний процесса J на отдельном периоде регенерации вычисляются следующим образом:

$$\pi_j^{(1)}(t) = (1 - \delta_{j2}) \pi_j^{(F)}(t) 1_{\{t < F\}} + \delta_{j2} \pi_j^{(C)}(t) 1_{\{F \leq t < F + C\}}. \quad (5)$$

Событие $\{J(t) = 2, t > G\}$ возникает тогда и только тогда, когда $\{F \leq t < F + C\}$, таким образом, при $j = 2$ уравнение (5) принимает следующий вид:

$$\pi_2^{(1)}(t) = P\{F \leq t < F + C\} = \int_0^t dF(u)(1 - C(t-u)).$$

Лемма 3. ПЛ вероятности $\tilde{\pi}_2^{(1)}(s)$ на периоде регенерации вычисляется как

$$\tilde{\pi}_2^{(1)}(s) = \tilde{f}(s) \cdot \frac{1 - \tilde{c}(s)}{s} = \frac{\tilde{a}(s)(\tilde{a}(s) - \tilde{a}_B(s))}{1 - \tilde{a}_B(s)} \cdot \frac{1 - \tilde{c}(s)}{s}. \quad (6)$$

Процесс J является р.п. с задержкой, поэтому для вычисления распределения вероятностей для состояний $j = 0, 1$ представим период F в виде двух интервалов A и W . Тогда

$$\pi_0^{(F)}(t) = P\{J(t) = 0, t < F\} = P\{t < A\} + \int_0^t dA(u) \pi_0^{(W)}(t-u),$$

$$\pi_1^{(F)}(t) = P\{J(t) = 1, t < F\} = \int_0^t dA(u) \pi_0^{(W)}(t-u).$$

В терминах ПЛС соответствующих функций получаем

$$\tilde{\pi}_0^{(F)}(s) = \frac{1 - \tilde{a}(s)}{s} + \tilde{a}(s) \tilde{\pi}_0^{(W)}(s), \quad \tilde{\pi}_1^{(F)}(s) = \tilde{a}(s) \tilde{\pi}_0^{(W)}(s). \quad (7)$$

При наличии вложенных моментов регенерации $S_k^{(1)}$ распределение на периоде W вероятностей первого уровня $\pi_j^{(W)}(t)$ аналогично предыдущему и выражается через распределения вероятностей на вложенных периодах регенерации второго уровня $\pi_j^{(2)}(t)$ и вложенную функцию восстановления $H^{(W)}(t)$ в виде

$$\pi_j^{(W)}(t) = \pi_j^{(2)}(t) + \int_0^t dH^{(W)}(u) \pi_0^{(2)}(t-u), \quad j = 0, 1, \quad (8)$$

где $\pi_j^{(W)}(t) = P\{J(t) = j, t < G^{(1)}\}$, $j = 0, 1$. В рассматриваемом случае в качестве вложенных моментов регенерации $S_k^{(1)}$ рассмотрим случайное число $v = \min\{n : A_n < B_n\}$ моментов: $S_1^{(1)} = A_1 1_{\{A_1 > B_1\}}$, $S_2^{(1)} = S_1^{(1)} + A_2 1_{\{A_1 > B_1, A_2 > B_2\}}$, ..., до тех пор, пока событие $\{A_n < B_n\}$ не произойдет впервые. Таким образом, распределение $G^{(1)}(t) = A(t)$, а вложенная функция восстановления $H^{(W)}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$H^{(W)}(t) + W(t) = A(t) + \int_0^t dH^{(W)}(u) A(t-u). \quad (9)$$

Лемма 4. Переходя к ПЛ в (8) и (9) по определению, получаем

$$\tilde{\pi}_j^{(W)}(s) = (1 + \tilde{h}^{(W)}(s)) \tilde{\pi}_j^{(2)}(s) = \frac{1}{1 - \tilde{a}_B(s)} \tilde{\pi}_j^{(2)}(s). \quad (10)$$

Вычислим вероятности на втором уровне регенерации для состояний 0, 1. Из рис. 1 можно определить следующие события:

1. Событие $\{J(t) = 0, t < G^{(1)}\}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\{B < t < A\}$, откуда
 $\pi_0^{(2)}(t) = P\{B < t < A\} = B(t)(1 - A(t)).$
2. Событие $\{J(t) = 1, t < G^{(1)}\}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\{t < B < A\}$ или $\{t < A < B\}$, откуда

$$\pi_1^{(2)}(t) = P\{t < B < A\} + P\{t < A < B\} = \int_t^\infty (1 - A(u)) dB(u) + \int_t^\infty (1 - B(u)) dA(u).$$

Лемма 5. ПЛ вероятностей на втором уровне регенерации имеет вид

$$\tilde{\pi}_0^{(2)}(s) = \frac{1}{s} [\tilde{b}(s) - (\tilde{a}_B(s) + \tilde{b}_A(s))], \quad \tilde{\pi}_1^{(2)}(s) = \frac{1}{s} [1 - (\tilde{a}(s) + \tilde{b}(s)) + \tilde{a}_B(s) + \tilde{b}_A(s)]. \quad (11)$$

Таким образом, собирая полученные результаты (6)–(7), (10)–(11) и подставив их в определение (4), получаем следующую теорему.

Теорема 2. ПЛС нестационарных вероятностей состояний системы холодного дублирования при сценарии полного ремонта системы и произвольных распределениях времени жизни и ремонта принимает вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_0(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{1 - \tilde{a}_B(s) - \tilde{a}(s)(1 - \tilde{b}(s) + \tilde{b}_A(s))}{1 - \tilde{a}(s) + (\tilde{a}(s) - \tilde{a}_B(s))(1 - \tilde{a}(s)\tilde{c}(s))}, \\
\tilde{\pi}_1(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{\tilde{a}(s)(1 - (\tilde{a}(s) + \tilde{b}(s) + \tilde{a}_B(s) + \tilde{b}_A(s)))}{1 - \tilde{a}(s) + (\tilde{a}(s) - \tilde{a}_B(s))(1 - \tilde{a}(s)\tilde{c}(s))}, \\
\tilde{\pi}_2(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{\tilde{a}(s)(1 - \tilde{c}(s))(\tilde{a}(s) - \tilde{a}_B(s))}{1 - \tilde{a}(s) + (\tilde{a}(s) - \tilde{a}_B(s))(1 - \tilde{a}(s)\tilde{c}(s))}.
\end{aligned} \tag{12}$$

5. Стационарные вероятности

Стационарные вероятности состояний процесса можно получить из (12) с помощью предельного перехода: $\pi_j = \lim_{t \rightarrow 0} \pi_j(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{\pi}_j(s)$.

Теорема 3. Стационарные вероятности состояний системы холодного дублирования при сценарии полного ремонта системы и произвольных распределениях времени жизни и ремонта принимает вид

$$\pi_0 = \frac{aq - (a_B + b_A) - b}{a + q(a + c)}, \quad \pi_1 = \frac{a + b + (a_B + b_A)}{a + q(a + c)}, \quad \pi_2 = \frac{cq}{a + q(a + c)}. \tag{13}$$

Замечание 1. Рассмотрим Марковскую модель $A(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, $B(t) = 1 - e^{-\beta t}$, $C(t) = 1 - e^{-\gamma t}$, где α, β, γ – интенсивности в.б.р., частичного и полного восстановления элементов и системы. Тогда стационарные вероятности состояний системы примут вид

$$\pi_0 = \frac{(\alpha + \beta)\gamma}{\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \beta\gamma}, \quad \pi_1 = \frac{\alpha\gamma}{\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \beta\gamma}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \beta\gamma}.$$

Эти же вероятности можно получить путем замены ПЛ на экспоненциальное распределение длительностей жизни и ремонта в (13).

Заключение

В данной работе была исследована надежность дублированной системы холодного резервирования с полным восстановлением. С помощью модифицированных преобразований Лапласа – Стильтеса и теории разложимых полурегенерирующих процессов были найдены основные характеристики надежности системы. Для произвольных распределений в.б.р., частичного и полного ремонта вычислены функция надежности и среднее время жизни системы, а также ее нестационарные и стационарные вероятности состояний системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Smith W.L. Regenerative stochastic processes. // Proc. R. Soc. – 1955. – Ser. A. – 232. – DOI:10.1098/rspa.1955.0198
2. Cinlar E. On semi-Markov processes on arbitrary space // Proc. Camb. Philos., Math. Proc. Camb. Philos. Soc. – 1969. – 66. – P. 381–392.
3. Nummelin E. Uniform and ratio-limit theorems for Markov-renewal and semi-regenerative processes on a general state space // Ann. inst. Henri Poincaré B. – 1978. – 14. – P. 119–143.
4. Rykov V. On Reliability of a Double Redundant Renewable System. // Springer Nature Switzerland AG 2020. M. Gribov et al. (Eds.): ASMTA 2019, LNCS 12023. – P. 1–9. – https://doi.org/10.1007/978-3-030-62885-7_3
5. Rykov V, Efrosinin D, Stepanova N, Sztrik J. On Reliability of a Double Redundant Renewable System with a Generally Distributed Life and Repair Times. Mathematics. – 2020. – 8(2):278. – <https://doi.org/10.3390/math8020278>
6. Rykov V.V. Decomposable Semi-Regenerative Processes and Their Applications // Lap Lambert Academic Publishing: Berlin, Germany. – 2011. – P. 75.