ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 64, № 6 ФИЗИКА 2021

УДК 530.12:531.551 DOI: 10.17223/00213411/64/6/21

Е.В. КУВШИНОВА, О.В. САНДАКОВА, Д.М. ЯНИШЕВСКИЙ

О КВАНТОВОМ РОЖДЕНИИ ВСЕЛЕННОЙ С МЕТРИКОЙ IX ТИПА ПО БЬЯНКИ В ПРИСУТСТВИИ АНИЗОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ, СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ И ЧИСТОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В рамках общей теории относительности построена космологическая модель с расширением и вращением с метрикой типа IX по Бьянки, когда источниками гравитации являются анизотропная жидкость, поле чистого излучения и скалярное поле. Получено уравнение Уилера – Де Витта, исследована возможность минисуперпространственного квантования.

Ключевые слова: *первая стадия инфляции, темная энергия, квантовое рождение Вселенной.*

Введение

Квантовая космология – одна из наиболее сложных в идейном отношении областей теоретической физики. Это обстоятельство связано не только с такими трудностями квантовой теории гравитации, как проблема ультрафиолетовых расходимостей, но, в первую очередь, с тем, что сама постановка задачи в рамках квантовой космологии совершенно нетривиальна. Результаты соответствующих исследований зачастую выглядят парадоксально, и требуется большая степень непредубежденности для того, чтобы не отмахнуться от них с самого начала [1].

В настоящий момент принято считать, что наша Вселенная однородна и изотропна. Однако имеются и наблюдательные факты [2–5], демонстрирующие возможность крупномасштабных отклонений от изотропии в наблюдаемой Вселенной. Отметим, что глобальная анизотропия Вселенной может быть обусловлена в том числе и космологическим вращением. В силу отсутствия завершённой квантовой теории гравитации вычисления в квантовой космологии реализуются различными подходами. Следует отметить суперсимметричное квантование гравитационно связанных однородных систем, служащее для построения космологических моделей с метриками Кантовского – Сакса и различных типов по Бьянки, полуклассические пути к устранению сингулярности Большого взрыва в однородных, анизотропных моделях и уравнение Уилера – Де Витта, до последнего времени служащее основным рабочим инструментом в квантовой космологии и применяющееся как в стандартной, так и в многомерной космологии [6]. Волновая функция Вселенной представляет собой $\psi(h_{ij}, \varphi)$, где h_{ij} – трехмерная пространственная метрика, φ – поля материи. Уравнение Уилера – Де Витта является по существу уравнением Шредингера для волновой функции в стационарном случае $\partial\Psi/\partial t = 0$. В данной работе исследуется возможность квантового рождения модели Вселенной с метрикой типа IX по Бьянки.

Модель Бьянки IX

В настоящей работе рассматривается космологическая модель с метрикой IX типа Бьянки вида

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta, \quad \alpha, \beta = \overline{0,3}, \tag{1}$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ – элементы диагональной лоренцевой матрицы; θ^α – ортонормированные 1-формы, выражающиеся следующим образом:

$$\theta^0 = dt - R\nu_A e^A, \quad \theta^1 = RK_1e^1, \quad \theta^2 = RK_2e^2, \quad \theta^3 = RK_3e^3, \tag{2}$$

где $R = R(t)$; K_A, $\nu_A = \text{const}$, $K_A > 0$, при A = 1, 2, 3; 1-формы e^A имеют вид

$$\begin{aligned} e^1 &= \cos y \cos z dx - \sin z dy, \\ e^2 &= \cos y \sin z dx + \cos z dy, \\ e^3 &= -\sin y dx + dz. \end{aligned} \tag{3}$$

Нами рассмотрен случай, определяемый условиями

$$\nu_1 \neq 0, \quad \nu_2 = \nu_3 = 0, \quad \nu_1^2 = K_1^2 - K_2^2, \quad K_3 = K_2.$$

Были взяты параметры: $c = 1$, $\hbar = 1$, $8\pi G = 1$, где G – ньютоновская гравитационная постоянная. При этом источниками гравитации являются анизотропная жидкость, которая описывает вращающуюся темную энергию, поле чистого излучения и скалярное поле. Для метрики типа IX по Бьянки получено инфляционное космологическое решение уравнений Эйнштейна. Источниками гравитации являлись: анизотропная жидкость, поле излучения, а также скалярное поле. Тензор энергии-импульса анизотропной жидкости имеет вид

$$T_{\alpha\beta}{}^{(1)} = (\pi + \rho)u_\alpha u_\beta + (\sigma - \pi)\chi_\alpha \chi_\beta - \pi\eta_{\alpha\beta}\,, \tag{4}$$

где $u_i u^i = 1$, $\chi_i \chi^i = -1$, $\chi^i u_i = 0$, $k_i k^i = 0$, $\rho > 0$, $w > 0$, $\sigma > \pi$; ρ – плотность энергии жидкости; π, σ – компоненты анизотропного давления; χ^i – вектор анизотропии.

Тензор энергии-импульса чистого излучения имеет вид

$$T_{\alpha\beta}{}^{(2)} = w k_\alpha k_\beta\,, \qquad k_\alpha = (k_0, k_0, 0, 0). \tag{5}$$

Тензор энергии-импульса скалярного поля равен

$$T_{\alpha\beta}{}^{(3)} = \varphi,_\alpha \varphi,_\beta - \left\{\frac{1}{2}\varphi,_k \varphi,_l g^{kl} - U(\varphi)\right\} g_{\alpha\beta}\,. \tag{6}$$

При этом скалярное поле удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(\sqrt{-g}g^{ik}\phi,_k) + \frac{dU}{d\phi} = 0, \tag{7}$$

а потенциал имеет хиггсовский вид

$$U = -\frac{m^2\varphi^2}{2} + \frac{\lambda\varphi^4}{4}. \tag{8}$$

Расчёты, связанные с уравнениями Эйнштейна, проведены с помощью тетрадного формализма [7]. Система уравнений Эйнштейна в тетрадной форме:

$$\begin{gathered}
G_{00} = -\left(2\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2}\right)\frac{v_1^2}{K_1^2} + 3\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2K_1^2 + K_2^2}{4K_2^4 R^2} = \rho + U + k_0^2 w + \frac{\varphi'^2}{2}\left(1 + \frac{v_1^2}{K_1^2}\right), \\
G_{11} \equiv -\left(2\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2}\right) + 3\frac{R'^2}{R^2}\frac{v_1^2}{K_1^2} + \frac{2K_1^2 - 3K_2^2}{4K_2^4 R^2} = \sigma - U + k_0^2 w + \frac{\varphi'^2}{2}\left(1 + \frac{v_1^2}{K_1^2}\right), \\
G_{22} = G_{33} \equiv \left(2\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2}\right)\left(\frac{v_1^2}{K_1^2} - 1\right) - \frac{1}{4K_2^2 R^2} = \pi - U + \frac{\varphi'^2}{2}\left(1 - \frac{v_1^2}{K_1^2}\right), \\
G_{01} \equiv 2\left(-\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2}\right)\frac{v_1}{K_1} + \frac{v_1 K_1}{2K_2^4 R^2} = k_0^2 w + \frac{v_1\varphi'^2}{K_1}.
\end{gathered} \tag{9}$$

Потребуем, чтобы в духе инфляции было $\varphi = \varphi_0 e^{-Ht}$. Тогда решения (9) с потенциалом (8) даются следующими формулами:

$$\begin{gathered}
R = R_0 e^{\alpha(t)}, \\
\alpha(t) = \tilde{Q}t - \frac{K_1^2\lambda\varphi_0^2}{6H^2 K_2^2 e^{2Ht}}, \\
\tilde{Q} = \frac{1}{3}H - \frac{K_1^2}{K_2^2}\frac{m^2}{3H}, \\
wk_0^2 = \frac{4K_1 v_1 \lambda\varphi_0^2}{3K_2^2 e^{2Ht}} + \frac{K_1 v_1}{2R_0^2 e^{2\alpha(t)}} - \frac{\varphi_0^2 H^2}{e^{2Ht}}\frac{v_1}{K_1},
\end{gathered} \tag{10}$$

$$\pi = -3\left(\tilde{Q} + \frac{K_1^2\lambda\varphi_0^2}{3HK_2^2e^{2Ht}}\right)^2 \frac{K_2^2}{K_1^2} + \frac{4\lambda\varphi_0^2}{3e^{2Ht}} - \frac{1}{4R_0^2e^{2\alpha(t)}K_2^2} - \frac{\varphi_0^2H^2}{2e^{2Ht}}\frac{K_2^2}{K_1^2} - \frac{m^2\varphi_0^2}{2e^{2Ht}} + \frac{\lambda\varphi_0^4}{4e^{4Ht}},$$

$$\sigma = -3\left(\tilde{Q} + \frac{K_1^2\lambda\varphi_0^2}{3HK_2^2e^{2Ht}}\right)^2 \frac{K_2^2}{K_1^2} + \frac{4K_1\lambda\varphi_0^2(K_1 - \nu_1)}{3K_2^2e^{2Ht}} + \frac{-K_2^2 + 2\nu_1^2 - 2K_1\nu_1}{4R_0^2e^{2\alpha(t)}K_2^4} - \frac{m^2\varphi_0^2}{2e^{2Ht}} +$$
$$+ \frac{\lambda\varphi_0^4}{4e^{4Ht}} - \frac{\varphi_0^2H^2}{2e^{2Ht}}\frac{(K_1 - \nu_1)^2}{K_1^2},$$

$$\rho = 3\left(\tilde{Q} + \frac{K_1^2\lambda\varphi_0^2}{3HK_2^2e^{2Ht}}\right)^2 \frac{K_2^2}{K_1^2} - \frac{4\nu_1\lambda\varphi_0^2(K_1 - \nu_1)}{3K_2^2e^{2Ht}} + \frac{2K_1^2 + K_2^2 - 2K_1\nu_1}{4R_0^2e^{2\alpha(t)}K_2^4} - \frac{m^2\varphi_0^2}{2e^{2Ht}} -$$
$$- \frac{\lambda\varphi_0^4}{4e^{4Ht}} - \frac{\varphi_0^2H^2}{2e^{2Ht}}\frac{(K_1 - \nu_1)^2}{K_1^2}.$$

Кинематические параметры сопутствующей анизотропной жидкости в данной модели: параметр расширения определяется формулой $\Theta = \frac{3\dot{R}}{R}$, ускорение равно $a = \frac{\dot{R}\nu_1}{RK_1}$, параметр вращения $\omega = \frac{\nu_1}{2RK_2{}^2}$, сдвиг отсутствует.

В работе [8] рассматривалась стадия инфляции, здесь же примем, что космологическое решение (10) соответствует и квантовому рождению.

Получение уравнения Уилера – Де Витта

Пространство-время с метрикой (1) – (3) можно расщепить на пространство и время согласно стандартной процедуре [9]. Для этого метрику можно представить в виде

$$ds^2 = -N^2dt^2 + g_{ab}(dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt), \tag{11}$$

где N – функция хода; N^a – вектор сдвига; нормальный базис на гиперповерхностях постоянного параметра t = const определяется триадой касательных векторов e_a^α (a – реперный, α – координатный индексы); $e_a^0 = 0,\ e_a^b = \delta_a^b$ ($a, b = 1, 2, 3$). Единичный времениподобный нормальный вектор к трехмерной пространственноподобной гиперповерхности постоянного параметра t = const имеет вид

$$n_\alpha = (-N, 0, 0, 0), \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \tag{12}$$

Как известно, Ψ – волновая функция Вселенной – удовлетворяет уравнению Уилера – Де Витта

$$T_\perp\Psi = 0 \tag{13}$$

и уравнениям суперимпульсов

$$T_a\Psi = 0. \tag{14}$$

В соответствии с [9] уравнения связей можно записать так:

$$T_\perp = -\sigma_0 G_{abcd}\pi^{ab}\pi^{cd} - g^{1/2}\cdot{}^3R - 2\sigma_0 g^{1/2}\cdot T_{\perp\perp} = 0\,; \tag{15}$$

$$T_a = -2g_{ac}\pi^{cd}{}_{|d} - 2g^{1/2}\cdot T_{\perp a} = 0. \tag{16}$$

Здесь обозначены: скаляр единичной нормали σ_0, суперметрика Де Витта

$$G_{abcd} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\left(g_{ac}g_{bd} + g_{ad}g_{bc} - g_{ab}g_{cd}\right), \tag{17}$$

канонически сопряжённые компонентам g_{ab}-импульсы

$$\pi^{ab} = -g^{1/2}(K^{ab} - g^{ab}K), \tag{18}$$

внешняя кривизна

$$K_{ab} = -n_{a;b}, \tag{19}$$

проекции тензора энергии-импульса на векторы нормального базиса

$$T_{\perp\perp} = T_{\alpha\beta} n^{\alpha} n^{\beta}, \quad T_{a\perp} = \sigma_0 n^{\alpha} e_a^{\beta} T_{\beta\alpha}. \tag{20}$$

В данной метрике получается

$$T_{\perp} = \frac{6R\cos yK_2{}^5}{K_1{}^2}\left(-\dot{R}^2 + R^2\left(\tilde{Q} + \frac{A}{e^{2Ht}}\right)^2\right), \tag{21}$$

где $A = \dfrac{K_1{}^2 \lambda \phi_0{}^2}{3K_2{}^2}$,

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0. \tag{22}$$

Для нашей модели лагранжиан гравитационного поля:

$$\Lambda_{GE} = -\frac{3(4R'^2 K_2{}^4 - K_1{}^2)}{2R^2 K_1{}^2 K_2{}^2},$$

$$g^{1/2} = -R^3 K_2{}^3 \cos y,$$

$$N = \frac{K_1}{K_2}.$$

Имеем

$$L_{GE} = \frac{1}{2}\int d^3x (N g^{1/2} \Lambda_{GE}) = -6\pi^2 \frac{R\left\{4\dot{R}^2 K_2{}^4 - K_1{}^2\right\}}{K_1}. \tag{23}$$

Определим в духе минисуперпространственного квантования канонический импульс

$$\pi_R = \frac{\partial L_{GE}}{\partial R'} = -\frac{48\pi^2 R\dot{R} K_2{}^4}{K_1}. \tag{24}$$

Тогда

$$T_{\perp} = \frac{6R\cos yK_2{}^5}{K_1{}^2}\left(-\frac{\pi_R^2 K_1^2}{\left(48\pi^2\right)^2 R^2 K_2^8} + R^2\left(\tilde{Q} + \frac{A\tilde{R}_0}{Re^{2H/(Q+A)}}\right)^2\right). \tag{25}$$

Осуществляем квантование

$$\pi_R = \frac{1}{i}\frac{d}{dR}, \quad \pi_R^2 = -\frac{d^2}{dR^2}. \tag{26}$$

В результате преобразований получим

$$T_{\perp} = \frac{6R\cos yK_2{}^5}{K_1{}^2}\left(\frac{K_1^2}{\left(48\pi^2\right)^2 R^2 K_2^8}\frac{d^2}{dR^2} + R^2\left(\tilde{Q} + \frac{A\tilde{R}_0}{Re^{2H/(\tilde{Q}+A)}}\right)^2\right). \tag{27}$$

В итоге уравнение Уилера – Де Витта имеет вид

$$\left[\frac{d^2}{dR^2} + \frac{2304\pi^4 R^4 K_2^8}{K_1^2}\left(\tilde{Q} + \frac{A\tilde{R}_0}{Re^{2H/(Q+A)}}\right)^2\right]\Psi(R) = 0. \tag{28}$$

Уравнение (28) можно записать так:

$$\left[\frac{d^2}{dC^2} - U(R)\right]\Psi(R) = 0, \tag{29}$$

где

$$U(R) = -\frac{2304\pi^4 R^4 K_2^8}{K_1^2}\left(\tilde{Q} + \frac{A\tilde{R}_0}{Re^{2H/(Q+A)}}\right)^2. \tag{30}$$

Из (30) видно, что $U(R)$ не может быть положительным. Таким образом, приходим к выводу, что минисуперпространственное квантование нашего решения (10) с метрикой (1) – (3) невозможно.

Отметим основное значение работ [10–13] для развития квантовой космологии. Квантовое рождение Вселенной в основном рассматривается для изотропных моделей. Для неизотропных моделей имеются в этой области лишь отдельные результаты. В работах [10–13] исследуется квантовое рождение новых неизотропных моделей Вселенной с вращением в точной, а не численной постановке. Для точной космологической модели с вращением скорость вращения ранней Вселенной может быть значительна, что сказывается на вероятности квантового рождения такой модели. В работах [10–13] впервые для точных моделей установлено, что в определенных случаях наличие космологического вращения может увеличить вероятность квантового рождения моделей Вселенной. В связи с этим приближенные численные оценки роли вращения для вероятности квантового рождения Вселенной с вращением имеют меньшую ценность, чем подход, опирающийся на точные космологические модели с вращением, пусть даже частные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линде А.Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. – М.: Наука, 1990. – 280 с.
2. Land K. and Magueijo J., astro-ph/0502237v2, (2005).
3. Payez A., Cudell J.R., and Hutsemekers D., astro-ph/1204.6614v1, (2012).
4. Longo M.J., astro-ph/1104.2815, (2011).
5. Liddle A.R. and Cortes M. // Phys. Rev. Lett. – 2013. – V. 111. – No. 11. – P. 111302.
6. Moricone R. and Montani G. // Phys. Rev. D. – 2017. – V. 95. – No. 12. – P. 123533.
7. Panov V.F., Pavelkin V.N., Kuvshinova E.V., and Sandakova O.V. Cosmology with Rotation. – Perm: PSU, 2016.
8. Panov V.F., Kuvshinova E.V., Yanishevsky D.M., and Sandakova O.V. // Int. J. Geometric Methods Mod. Phys. – 2018. – V. 15. – No. 1. – P. 1850016.
9. Пономарев В.Н., Барвинский А.О., Обухов Ю.Н. Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. – М.: Энергоатомиздат, 1985.
10. Кувшинова Е.В., Панов В.Ф. // Изв. вузов. Физика. – 2003. – Т. 46. – № 10. – С. 40–47.
11. Panov V.F. and Kuvshinova E.V. // Grav. and Cosmol. – 2004. – V. 10. – No. 1–2 (37–38). – P. 156–160.
12. Кувшинова Е.В., Панов В.Ф. // Изв. вузов. Физика. – 2005. – Т. 48. – № 6. – С. 71–75.
13. Кувшинова Е.В. // Изв. вузов. Физика. – 2005. – Т. 48. – № 10. – С. 93–95.

Поступила в редакцию 29.10.2020.

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
г. Пермь, Россия

Кувшинова Елена Владимировна, к.ф.-м.н, доцент ПГНИУ, e-mail: kuvlenka@narod.ru;
Сандакова Ольга Васильевна, к.ф.-м.н, доцент ПГНИУ, e-mail: o_sandakova@list.ru;
Янишевский Даниил Михайлович, соискатель ПГНИУ, e-mail: ydm86@yandex.ru.