

ФИЗИКА МАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

УДК 539.1.07

DOI: 10.17223/00213411/64/2/15

Е.А. МОРОЗОВ¹, А.Р. МОРОЗОВА¹, Л.Е. МОРОЗОВА²

К РАСЧЕТУ МАГНИТНЫХ СПЕКТРОМЕТРОВ

Обосновывается использование аксиально-асимметричных магнитных полей в конструкции магнитных спектрометров, позволяющее улучшить основные рабочие характеристики указанных приборов, – их энергетическое разрешение и светосилу. Строится математическая модель прибора, включающая как геометрию фазового ансамбля движущихся частиц, так и геометрию технических устройств, обеспечивающих формирование ансамбля. Определяется класс геометрических преобразований типа сжатия-растяжения, сохраняющих фокусирующие и дисперсионные свойства магнитного поля энергоанализатора прибора. Доказывается возможность повышения степени фокусировки частиц и увеличения их дисперсии по энергиям при использовании несимметричных полей. Обосновывается использование эллиптических контуров с током в конструкции энергоанализатора магнитного спектрометра для создания магнитного поля с улучшенными характеристиками. Общий характер построенной теории открывает возможность конструирования магнитных спектрометров самой различной аксиально-несимметричной конфигурации с более высокой светосилой и энергетическим разрешением.

Ключевые слова: электронные магнитные спектрометры, бета-спектрометры, фокусирующие магнитные поля, электронная спектроскопия, бета-спектроскопия.

Введение

Аксиально-симметричные магнитные поля находят применение в приборах электронной оптики, в частности в рентгено-электронных [1] и бета-спектрометрах [2], а также в индукционных ускорителях. Фокусирующие и дисперсионные свойства таких полей в настоящее время достаточно хорошо исследованы и, по-видимому, достигнутые параметры этих приборов – энергетическое разрешение и светосила – близки к пределу. Одним из возможных направлений дальнейшего улучшения характеристик является отказ от аксиальной симметрии в пользу использования полей более сложной геометрии.

В этой связи возникает общая задача теоретического обоснования самой возможности использования аксиально-асимметричных магнитных полей для фокусировки и разделения заряженных частиц по энергии (дисперсии). Другой задачей является выбор геометрической конфигурации прибора, позволяющей улучшить его параметры. Решению этих задач посвящена данная работа.

1. Аффинные преобразования

Математической формализацией движения заряженных частиц в приборе является поток [3] – область фазового пространства, определяющая положения и импульсы частиц в любой момент времени. Под фазовым пространством будем понимать аффинное пространство [4] – точечное множество A^7 с присоединенным к нему векторным пространством $\mathbf{R}^7 = \mathbf{R}_p^3 \oplus \mathbf{R}_x^3 \oplus \mathbf{R}_t$ импульсов p , координат x и времени t . Импульс как динамическую величину будем считать ковариантным вектором, а координату как кинематическую величину – контравариантным вектором [5].

Пусть $\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3 \in \mathbf{R}_p^3$, $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \in \mathbf{R}_x^3$, $\mathbf{e}_0 \in \mathbf{R}_t$ – базисы $\mathbf{R}^7$. Центрируем аффинное пространство, выбирая точку $O \in A^7$ за начало отсчета. Отнесем к ней базисные векторы линейного пространства $\mathbf{R}^7$ и получим репер $O \mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3, \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ аффинного пространства как прямую сумму аффинных пространств импульсов, координат и времени.

Координатное представление точки аффинного пространства определяем посредством задания ее радиус-вектора

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}^1 p_1 + \mathbf{e}^2 p_2 + \mathbf{e}^3 p_3 + \mathbf{e}_1 x^1 + \mathbf{e}_2 x^2 + \mathbf{e}_3 x^3 + \mathbf{e}_0 t = \mathbf{e}^i p_i + \mathbf{e}_i x^i + \mathbf{e}_0 t. \quad (1)$$

Здесь мы применили сокращенную запись, подразумевая суммирование по повторяющемуся индексу, если он встречается сверху и снизу. Такую форму записи будем применять в дальнейшем, считая каждый раз, что повторяющийся индекс принимает значения 1, 2, 3.

Множество реперов $Oe^1e^2e^3, e_0e_1e_2e_3$ с группой однотранзитивных квазиаффинных преобразований вида

$$e^{i'} = A_i^{i'} e^i, \quad e_{i'} = B_i^{i'} e_i, \quad e_{0'} = C_0^{0'} e_0, \quad \det |A_i^{i'}| \neq 0, \quad \det |B_i^{i'}| \neq 0, \quad C_0^{0'} = 0, \quad (2)$$

определяет многообразие аффинных реперов.

Каждое преобразование реперов индуцирует координатное преобразование

$$p_{i'} = A_i^{i'} p_i, \quad x^{i'} = B_i^{i'} x, \quad t' = C_0^{0'} t, \quad i, i' = 1, 2, 3, \quad t, t' = 1,$$

и осуществляет переход от одной системы координат к другой.

Пусть в аффинное пространство A_X^3 с репером $Oe_1e_2e_3, e_0$ определена конфигурация прибора как множество точек. Под конфигурацией мы понимаем геометрическую формализацию как ансамбля частиц, так и составляющих прибора, обеспечивающих формирование ансамбля. Например, в случае магнитного спектрометра это будут контуры с током, которые создают магнитное поле.

Кроме квазиаффинных преобразований (2), отражающих выбор системы отсчета, введем в рассмотрение группу аффинных преобразований пространства $A_X^3 \rightarrow A_X^{*3}$, которые будут выражать изменения конфигурации прибора. Группа аффинных преобразований определяется как совокупность однотранзитивных точечных преобразований вида

$$x^{*j} = A_j^{*j} x^j, \quad \det |A_j^{*j}| \neq 0. \quad (3)$$

Преобразование координат (3) индуцирует выражение элементов репера $Oe_{*1}e_{*2}e_{*3}$ через элементы репера $Oe_1e_2e_3$

$$e_j = A_j^{*j} e_{*j}, \quad \det |A_j^{*j}| \neq 0.$$

Аффинное преобразование пространства (3), изменяющее конфигурацию прибора, само по себе неинформативно, поскольку сопровождается «компенсирующим» преобразованием репера. В этой связи дополним его эквиаффинным преобразованием репера $Oe_{*1}e_{*2}e_{*3} \rightarrow Oe_{*1'}e_{*2'}e_{*3'}$

$$e_{*j'} = A_{j*}^{*j} e_{*j},$$

таким, что $e_{*j'} = e_j$, т.е. преобразованные базисные элементы совпадают с базисными элементами исходного пространства.

Теперь координаты точек конфигурационного пространства A_X^{*3} связаны с координатами точек исходного пространства A_X^3 аффинным преобразованием

$$x^{*j} = A_j^{*j} x^j, \quad (4)$$

отнесенным к одному и тому же реперу $Oe_1e_2e_3$.

Поставим следующую задачу. Пусть у нас определены фазовые траектории ансамбля как область пространства A^7 относительно репера $Oe^1e^2e^3, e_0e_1e_2e_3$. Что будет, если пространство A_X^3 , в котором определена конфигурация прибора, подвергнуть преобразованию (4)?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо рассмотреть динамическую структуру ансамбля.

2. Фазовый поток ансамбля частиц

Пусть в пространстве A^7 с репером $Oe^1e^2e^3, e_0e_1e_2e_3$ фазовая траектория частицы определяется радиус-вектором

$$x(t) = p_i e^i + x^i e_i + t^0 e_0, \quad (5)$$

где $p_i = p_i(t)$, $x^i = x^i(t)$, $t^0 = t$ – дифференцируемые параметрические функции времени каждой частицы $t \in R$.

Фазовая скорость точек ансамбля определяется производной радиус-вектора (5)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{p}_i \mathbf{e}^i + x^i \dot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{e}_0. \quad (6)$$

Построим бивекторное аффинное пространство. Для этого образуем сначала кососимметрический тензор вида

$$\mathbf{p} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{r} = (p_i \mathbf{e}^i + x^i \mathbf{e}_i + t \mathbf{e}_0) \wedge (p_i \mathbf{e}^i + x^i \mathbf{e}_i + t \mathbf{e}_0). \quad (7)$$

При этом внешнему умножению подлежат как базисные векторы, так и координаты векторов.

Ориентируя пространство A^7 правым бивекторным репером $O\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}^i, \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}_i$, получим представление тензора (7) в форме ориентированного бивектора

$$\mathbf{p} = \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}_i p_i \wedge x^i + \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}^i t \wedge p_i + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_0 x^i \wedge t.$$

Аналогично из вектора фазовой скорости (6) получается соответствующий бивектор

$$\mathbf{\sigma} = \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}_i \dot{p}_i \wedge x^i + \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}^i 1 \wedge \dot{p}_i + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_0 \dot{x}^i \wedge 1.$$

Для определения фазовых траекторий рассмотрим функцию вида

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}^i p_i + \mathbf{e}_i x^i + \mathbf{e}_0 H, \quad (8)$$

где $H = H(p_1, p_2, p_3, x^1, x^2, x^3, t)$ – непрерывная дифференцируемая функция импульсов координат и, вообще говоря, времени – так называемая функция Гамильтона [4].

Будем использовать оператор внешней кососимметрической производной

$$\nabla \wedge \mathbf{f} = (\mathbf{e}^i \nabla_i + \mathbf{e}_i \nabla^i + \mathbf{e}_0 \nabla^0) \wedge, \quad (9)$$

где мы использовали формализм $\mathbf{e}^i \nabla_i \equiv \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial p_i}$, $\mathbf{e}_i \nabla^i \equiv \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\mathbf{e}_0 \nabla^0 \equiv \mathbf{e}_0 \frac{\partial}{\partial t}$.

Действуя оператором (9) на функцию (8) и принимая во внимание кососимметрические свойства внешнего произведения [4], найдем тензор

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}_0 \nabla_i H + \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}^i \nabla^0 p_i + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_0 \nabla^i H + \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_i \nabla^0 x^i.$$

Выбирая в качестве бивекторного репера $O\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}^i, \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}_i$, получим бивектор

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}^i (\nabla^0 p_i - \nabla_i H) + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_0 (\nabla^i H - \nabla^0 x^i) + \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}_i,$$

который формирует тело ансамбля частиц.

Производные $\nabla^0 p_i$, $\nabla^0 x^i$ не равны нулю в случае явной зависимости координат и импульсов от времени, что не имеет отношения к динамике. Считаем $\nabla^0 p_i = \nabla^0 x^i = 0$.

Покажем, что бивекторное условие $\mathbf{\sigma} = \mathbf{\Phi}$ определяет фазовые траектории. Действительно, в развернутом виде это условие имеет вид

$$\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}_i \dot{p}_i \wedge x^i + \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}^i 1 \wedge \dot{p}_i + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_0 \dot{x}^i \wedge 1 = -\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}^i \nabla_i H + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_0 \nabla^i H + \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}_i \cdot 0,$$

откуда следуют уравнения гамильтоновой механики [4]

$$\dot{p}_i = -\nabla_i H, \quad \dot{x}^i = \nabla^i H, \quad \dot{p}_i \wedge x^i = 0. \quad (10)$$

Преобразования

$$p_i = p_{i0} - \int_0^t \nabla^i H d\tau, \quad x^i = x_0^i + \int_0^t \nabla_i H d\tau$$

для каждой точки ансамбля образуют группу диффеоморфизмов или поток [5].

3. Преобразования конфигурационного пространства

Теперь конкретизируем следующую задачу. У нас имеется центрированное фазовое пространство $A^7 = A_P^3 \oplus A_X^3 \oplus A_t$ с реперами $Oe^1e^2e^3e_1e_2e_3, e_0$, $Oe_i \wedge e_0, e_0 \wedge e^i, e^i \wedge e_i$. В координатном пространстве A_X^3 представлена конфигурация прибора, задающая тело ансамбля частиц в пространстве A^7 . Как изменится тело ансамбля, если над конфигурационным пространством A_X^3 осуществить преобразование вида (4)?

Заметим, что уравнения Гамильтона, формирующие фазовый поток, инвариантны относительно координатного преобразования (4), иначе являются каноническими [5]. Действительно, подставляя преобразование (4) в первое уравнение Гамильтона (10), получим $\dot{p}_i = -A_i^{*i} \nabla_{*i} H$. Обозначим новый импульс $p_{*i} = A_{*i}^i p_i$ и отнесем его к новому пространству A_{*P}^3 . Первое уравнение (10) принимает вид $\dot{p}_{*i} = -\nabla_{*i} H$. Преобразование второго уравнения к новому импульсу даст $\dot{x}^i = A_{*i}^i \nabla^{*i} H^*$ или $\dot{x}^{*i} = \nabla^{*i} H^*$, где $x^{*i} = A_i^{*i} x^i$.

Аффинные преобразования, как и любые однородные преобразования, не меняют локальные свойства пространства [3], поэтому точки пересечения линий вновь перейдут в точки их пересечения. Отсюда следует, что если функция Гамильтона изначально определяла поле, для которого тело потока имело точки фокусировки в координатном пространстве, то изменение конфигурации прибора (4) сохраняет эти точки. В частности, это относится и к точкам двойной фокусировки частиц.

Теперь рассмотрим структуру центрораффинного преобразования (4) пространства A_X^3 , сохраняющего его ориентацию. Тензор преобразования A_i^{*i} может быть разложен на симметрическую B_i^{*i} и кососимметрическую C_i^{*i} части. Далее замечаем, что уравнения Гамильтона осуществляют преобразование только диагональных элементов матриц преобразования B_i^{*i} , C_i^{*i} . Поскольку преобразования B_i^{*i} выражаются матрицей с нулевыми диагональными элементами, то они не меняют геометрии фазового потока вообще. По физическому смыслу они соответствуют повороту всего прибора как целого относительно некоторой оси в конфигурационном пространстве.

Основной конструктивный интерес представляет симметрический тензор C_i^{*i} , который выражает деформацию конфигурационного пространства прибора. Учтем, что среди реперов многообразия A_X^3 существует единственный репер, для которого тензор деформации C_i^{*i} будет иметь диагональный вид, т.е. $C_i^{*i} = a^{*i} \delta_i^{*i}$. Без ограничения общности мы выберем его для задания исходной конфигурации прибора $Oe_1e_2e_3$. Базисные элементы этого репера определяют три ортогональных оси конфигурационного пространства, вдоль которых происходит деформация.

Пусть Γ_x – проекция фазового потока в конфигурационное пространство A_X^3 . Если интеграл

$$V_\Gamma = \int_\Gamma dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

выражает объем этой области, то преобразование

$$x^{*i} = a^{*i} \delta_i^{*i} x^i \quad (11)$$

влечет преобразование объема

$$V_\Gamma^* = \left| \det \left| a^{*i} \delta_i^{*i} \right| \right| V_\Gamma.$$

Иными словами, объем области, занимаемой движущимися частицами, является относительным инвариантом [4]. В частности, он не изменится, если преобразование (11) эквиаффинное $\left| \det \left| a^{*i} \delta_i^{*i} \right| \right| = 1$.

Поскольку преобразование C_i^{*i} индуцирует преобразование импульсов

$$p_{*i} = a_{*i} \delta_{*i}^i p_i,$$

то аналогичный вывод будет справедлив и для объема импульсного пространства, занимаемого частицами. При этом преобразования объемов конфигурационного и импульсного пространства будут взаимно-обратные.

4. Изменение конфигурации прибора

Мы обосновали возможность изменения конфигурации прибора в общем виде. Нашей последней задачей будет анализ особенностей изменения конфигурации магнитного спектрометра – прибора, использующего аксиально-симметричное магнитное поле.

При использовании уравнений Гамильтона магнитное поле, в котором движутся частицы ансамбля, задается векторным потенциалом $A = A(r)$. При этом динамические уравнения движения (10) выражаются через так называемые обобщенные импульсы частицы $P = p + A$. Подстановка $p_i = P_i - A_i$ в уравнения Гамильтона не меняет их формы:

$$\dot{P}_i = -\nabla_i H, \quad \dot{x}^i = \nabla^i H,$$

где $H = H(P_1, P_2, P_3, x^1, x^2, x^3)$. Поэтому полученные выше результаты остаются в силе.

Пусть теперь ось OX^1 конфигурационного пространства является осью симметрии прибора. Кроме осевой симметрии конфигурационное пространство спектрометров обладает зеркальной симметрией относительно центральной плоскости OX^2X^3 . Область конфигурационного пространства Γ_X , которую занимает поток частиц, представляет собой окрестность так называемой равновесной траектории – окружности с центром в начале координат, лежащей в плоскости OX^2X^3 .

В плоскости симметрии лежат точки двойной фокусировки – пересечения траекторий частиц. Для частиц с разной энергией точки фокусировки будут различны. Иными словами, будет осуществляться дисперсия частиц по энергии, что и определяет назначение прибора.

Пусть существует прибор заданной конфигурации с аксиальной симметрией [1]. Согласно изложенному выше, деформация растяжения и сжатия конфигурационного пространства прибора вдоль направлений осей OX^2 , OX^3 хотя и нарушает аксиальную симметрию области Γ_X , но оставляет точки фокусировки в плоскости OX^2X^3 . При этом деформация растяжения приводит к пропорциональному возрастанию дисперсии в этом направлении. Это позволяет увеличить либо разрешение прибора, либо его светосилу.

В инженерном аспекте не представляет трудности осуществить деформацию конструктивных элементов прибора, при которой деформации вдоль осей OX^2 , OX^3 будут взаимно-обратными. Иными словами, будут сохраняться площади фигур в плоскости OX^2X^3 . Например, деформация круговых контуров с током в эллипсы той же площади позволяет увеличить дисперсию частиц в одном направлении за счет ее уменьшения в другом. При этом конструктивный объем энергоанализатора не меняется.

Заключение

Однородные преобразования конфигурации прибора, включающие его поворот в пространстве и деформацию в трех взаимно-перпендикулярных направлениях, не нарушают его фокусирующие свойства. Объем области, занимаемой движущимися частицами в приборе, есть относительный инвариант однородного преобразования.

Если геометрическое преобразование конструкции прибора – эквиаффинное, то объем области, занимаемой движущимися частицами, также остается постоянным. Преобразования объемов конфигурационного и импульсного пространства будут взаимно-обратные. Изменения геометрии прибора типа сжатия и растяжения позволяют увеличить либо его разрешения, либо его светосилу.

Таким образом, мы достигли поставленной цели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соснов В.А., Хазова Р.А., Ширококов С.В. и др. // ПТЭ. – 1997. – № 3. – С. 130–132.
2. Зигбан К. Альфа-, бета-, гамма-спектроскопия. – М.: Атомиздат, 1969. – 567 с.
3. Рашевский К.Р. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 664 с.
4. Морозов Е.А., Морозова А.Р., Морозова Л.Е. // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2018. – № 3. – С. 31–37.
5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 432 с.

Поступила в редакцию 22.09.2020.

¹ Чайковский филиал Пермского национального исследовательского
политехнического университета, г. Чайковский, Россия

² Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова,
г. Ижевск, Россия

Морозов Евгений Александрович, д.т.н., профессор ЧФ ПНИПУ, e-mail: morothov@yandex.ru;

Морозова Амина Рафкатовна, к.т.н., доцент ЧФ ПНИПУ, e-mail: morothova0711@yandex.ru;

Морозова Людмила Евгеньевна, к.ф.-м.н., доцент ИжГТУ им. М.Т. Калашникова, e-mail: luvial@mail.ru.