* *
*

УДК 530.1 DOI: 10.17223/00213411/64/2/50

DONGWEI SHI[1], CAIXIA WANG[2]

АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ НЕКОНФОРМНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА КЭРИ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С НАИМЕНЬШЕЙ РЕГУЛЯРНОСТЬЮ РЕШЕНИЯ [*]

Обсуждается метод неконформных конечных элементов Кэри (NFEM) для эллиптической задачи второго порядка. С помощью различных существующих методов неоднородная и равномерная сходимость получается только при предположении наименьшей регулярности решения $u \in H_0^1(\Omega)$.

Ключевые слова: *неконформный конечный элемент Кэри, неоднородность и равномерность, наименьшая регулярность, анализ сходимости и оценки погрешностей.*

Введение

Проведено множество исследований по анализу сходимости и оценкам погрешностей для знаменитой NFEM Кэри [1, 2], когда точное решение $u \in H^2(\Omega)$ или $u \in H^3(\Omega)$. Например, в [3] обсуждается анализ сходимости для класса нелинейных параболических интегродифференциальных задач в 2D и представлены оценки погрешностей оптимального порядка для L^2-нормы и H^1-нормы. В [4, 5] рассмотрено анизотропное поведение для эллиптической задачи второго порядка и задачи вариационного неравенства со смещением препятствия соответственно. В [6] проведен анализ с более высокой точностью и выполнена экстраполяция этого элемента для задач соболевского типа на анизотропных сетках. Кроме того, в [7] сконструирован новый элемент квазикари путем модификации элемента ухода. Показано, что погрешность согласованности этого нового элемента имеет порядок $O(h^2)$, который на порядок выше ошибки интерполяции. Это свойство очень похоже на четырехугольный квазивильсонский элемент [8–10].

В [10–12] авторы исследовали эллиптическую задачу второго порядка при минимальной регулярности точного решения $u \in H^1(\Omega)$. Однако результаты базируются на предположении о регулярности на сетках разбиения [13], т.е. существует постоянная $C > 0$, такая, что $h_K / \rho_K \le C$, где h_K и ρ_K обозначают диаметр элемента K и наибольшие содержащиеся в K окружности соответственно. Это ограничивает применение методов конечных элементов.

Основная цель данной работы – изучить поведение сходимости треугольного неконформного конечного элемента Кэри для эллиптической задачи второго порядка с наинизшей регулярностью $u \in H_0^1(\Omega)$. Используя новый анализ, те же результаты, что и в [11–13], были получены для анизотропных сеток. Представленные в настоящей работе результаты ранее не встречались.

Элемент Кэри и некоторые леммы

Пусть K – треугольник с вершинами $p_i = (x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, λ_i – координата площади, соответствующей вершине p_i, $l_i = \overrightarrow{p_{i+1} p_{p+2}}$ $(i = 1, 2, 3, \mathrm{mod}(3))$ являются тремя краями K. Пусть S – площадь треугольника K и сделаем следующие замечания:

$$\begin{cases} \xi_1 = x_2 - x_3, \quad \xi_2 = x_3 - x_1, \xi_3 = x_1 - x_2, \\ \eta_1 = y_2 - y_3, \quad \eta_2 = y_3 - y_1, \eta_3 = y_1 - y_2, \\ \xi_i^2 + \eta_i^2 = l_i^2, \quad l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2. \end{cases}$$

[*] This research is supported by the National Natural Science Foundation of China (11271340, 11671369), and the Major Project of Science and Research of Henan Province University (16A110013).

Пусть Ω – выпуклая связная область; J_h – семейство разложения Ω с $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in J_h} \overline{K}$, и $\operatorname{diam}(K) \le h$, $\forall K \in J_h$. Для данного элемента $K \in J_h$, пусть $\overrightarrow{p_1 p_2}$ – самый длинный край K. Обозначим $h_1 = h_{1,K} = \left|\overrightarrow{p_1 p_2}\right|$ как его длину. Пусть $h_2 = h_{2,K} = 2S/h_{1,K}$ – толщина K, перпендикулярная к $\overrightarrow{p_1 p_2}$, где S – квадрат K. Мы полагаем, что элемент удовлетворяет условию максимального угла и условию системы координат [14], и нет необходимости подтверждать вышеуказанное регулярное предположение.

Пусть V_h – связанное пространство конечных элементов Кэри, определяемое как

$$V_h = \left\{ v : v\big|_K \in P_K,\ v(a) = 0, \forall \text{ node } a \in \partial\Omega \right\}. \tag{1}$$

Здесь $P_K = \operatorname{span}\left\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \varphi\right\}$, $\varphi = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$. Тогда для любого $w_h \in V_h$, которое содержит

$$w_h = \overline{w}_h + w_h^1 = \sum_{i=1}^{3} c_i \lambda_i + c_4(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1), \tag{2}$$

где $c_i (i = 1,2,3,4)$ – константы; $\overline{w}_h$ и w_h^1 – линейная и нелинейная части w_h соответственно, т.е. $\overline{w}_h = \sum_{i=1}^{3} c_i \lambda_i$, $w_h^1 = c_4(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)$.

Рассмотрим следующую проблему Пуассона:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{в } \Omega, \\ u\big|_\Gamma = 0, & \text{на } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть $V \in H_0^1(\Omega)$, тогда слабая форма (3):

$$\begin{cases} \text{чтобы найти } u \in V, \text{ такое, как} \\ a(u,v) = f(v), \ \forall v \in V. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dxdy, \qquad f(v) = \int_\Omega fv dxdy.$$

Аппроксимация (4) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \text{чтобы найти } u_h \in V_h, \text{ такое, как} \\ a_h(u_h, v_h) = f(v_h), \ \forall v_h \in V_h. \end{cases} \tag{5}$$

где

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in J_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h dxdy, \ f(v_h) = \sum_{K \in J_h} \int_K f v_h dxdy.$$

Легко заметить, что $\|\cdot\|_h = \left(\sum_K |\cdot|_{1,K}^2 \right)^{1/2}$ – это норма, определенная в пространстве V_h. По теореме Лакса – Мильграма уравнения (4) и (5) имеют единственные решения u и u_h соответственно. Чтобы получить оценки погрешностей $\|u - u_h\|_h$, введем следующую полезную лемму.

Лемма 1 [4, 5]. Предположим, что V_h определено в (1). Пусть $\forall w_h \in V_h$, а w_h может быть записана как в (2). Для анизотропных сеток:

$$\int_K \frac{\partial w_h^1}{\partial x} dxdy = 0, \quad \int_K \frac{\partial w_h^1}{\partial y} dxdy = 0; \tag{6}$$

$$\left| w_h^1 \right|_{1,K} \le \left| w_h \right|_{1,K}; \tag{7}$$

$$\left| w_h \right|_{0,K} \le \sqrt{\frac{4}{15}} \max(l_1, l_2, l_3) \left| w_h^1 \right|_{1,K} \le \sqrt{\frac{4}{15}} h_K \left| w_h \right|_{1,K}. \tag{8}$$

Лемма 2 [10]. Пусть $D=\left\{f: f\in L^2(\Omega), \|f\|_0=1\right\}$ – единичный круг в $L^2(\Omega)$, и $W=\left\{u: u=Tf, f\in D\right\}$, где $u=Tf\in H_0^1(\Omega)$ является решением (4), т.е.

$$a(Tf,v)=f(v), \quad \forall\, v\in H_0^1(\Omega), \tag{9}$$

тогда W – прекомпакт в $H_0^1(\Omega)$.

Лемма 3 [10]. Пусть V – фиксированное компактное подмножество $H_0^1(\Omega)$, тогда существует конечное открытое покрытие $S(\phi_1,\varepsilon),\ldots,S(\phi_n,\varepsilon)$, такое, что $V\subset\bigcup_{i=1}^n S(\phi_i,\varepsilon)$, и $\phi_i\in C_0^\infty\,(0\le i\le n)$, где $S(\phi,\varepsilon)$ – открытый круг с центром ϕ и ε – радиус в смысле $H_0^1(\Omega)$-нормы.

Анализ сходимости и оценки погрешностей

Предложим три теоремы в качестве основных результатов. Сначала анализ неоднородной сходимости обсуждается в теореме 1, то есть решение конечного элемента сводится к точному решению *u* как $h\to 0$.

Теорема 1. Предположим, что u и u_h – решения (4) и (5) соответственно и что $u\in H_0^1(\Omega)$, $f\in L^2(\Omega)$, тогда решение u_h сводится к u как $h\to 0$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует $h_0=h_0(\varepsilon,u,f)$, такое, что

$$\|u-u_h\|\le\varepsilon \tag{10}$$

содержится, когда $0<h\le h_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По второй лемме Стренга [14]

$$\|u-u_h\|_h\le\left\{\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_h+\sup_{\omega_h\in V_h}\frac{E_h(u,w_h)}{\|w_h\|_h}\right\}, \tag{11}$$

где

$$E_h(u,w_h)=a_h(u,w_h)-f(w_h)=a_h(u,w_h^1)-f(w_h^1)=E_h(u,w_h^1)\,. \tag{12}$$

Пусть $\hat V_h$ – соответствующее линейное треугольное пространство конечных элементов, тогда $\hat V_h\subset V_h$. В [11] доказано, что существует $h_0'=h_0'(\varepsilon,u)>0$, так что для каждого $h<h_0'$ первое слагаемое в правой части (11) можно оценить как

$$\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_h\le\inf_{v_h\in\hat V_h}\|u-v_h\|_h\le\frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{13}$$

Далее оценим член $E_h(u,w_h)$ в (11). Поскольку $u\in H_0^1(\Omega)$, то для любого $\varepsilon'>0$ существует функция $\tilde u\in C_0^\infty(\Omega)$, такая, что

$$\|u-\tilde u_h\|\le\varepsilon'. \tag{14}$$

Так,

$$E_h(u,w_h^1)=a_h(u-\tilde u,w_h^1)+E_h(\tilde u,w_h^1). \tag{15}$$

Из леммы 1 и (14) следует

$$\left|a_h(u-\tilde u,w_h^1)\right|\le\|u-\tilde u\|_{1,\Omega}\left\|w_h^1\right\|_h<\varepsilon'\left\|w_h^1\right\|_h\le\varepsilon'\|w_h\|_h\,. \tag{16}$$

Теперь воспользуемся следующим новым приемом, чтобы оценить член $E_h(\tilde u,w_h^1)$ для анизотропных сеток.

Определим P_0 как

$$P_0v|_K=\frac{1}{|K|}\int_K \boldsymbol{v}\,dxdy, \quad \forall \boldsymbol{v}\in(L^2(\Omega))^2, K\in J_n.$$

Пусть $\boldsymbol{v}=\nabla\boldsymbol{u}$, тогда из леммы 1 имеем

$$E_h(\tilde{u},w_h^1)=a_h(\tilde{u},w_h^1)-f(w_h^1)=\sum_K\int_K\nabla\tilde{u}\cdot\nabla w_h^1dxdy-\int_\Omega fw_h^1dxdy=$$

$$=\sum_K\int_K(\boldsymbol{v}-P_0\boldsymbol{v})\nabla w_h^1dxdy-\int_\Omega fw_h^1dxdy\le\sum_K\|\boldsymbol{v}-P_0\boldsymbol{v}\|_{0,K}\left\|w_h^1\right\|_h+\|f\|_0(\sum_K\left\|w_h^1\right\|_{0,K}^2)^{1/2}\le \tag{17}$$

$$\le ch\|\tilde{u}\|_{2,\Omega}\left\|w_h^1\right\|_h+ch\|f\|_0\|w_h\|_h\le ch(\|\tilde{u}\|_{2,\Omega}+\|f\|_0)\|w_h\|_h.$$

Воспользовавшись (15), (16) и (17), получим

$$\left|E_h(u,w_h)\right|\le c(\varepsilon'+h(\|\tilde{u}\|_{2,\Omega}+\|f\|_0))\|w_h\|_h. \tag{18}$$

Здесь и далее $c>0$ обозначает постоянную, не зависящую от h и h_K/ρ_K, и функцию при рассмотрении.

Таким образом, существует $h_0''=h_0''(f,u)>0$, удовлетворяющее $ch_0''<\varepsilon/4$. Теперь выбираем ε' такое, что $c\varepsilon'<\varepsilon/4$, и (18) уменьшает

$$\left|E_h(u,w_h)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}\|w_h\|_h,\quad \text{как}\ \ 0<h<h_0''. \tag{19}$$

Пусть $h_0=\min(h_0',h_0'')$, и желаемый результат может быть получен из (11) – (19).

Анализ однородной сходимости приведем в теореме 2.

Теорема 2. В предположении теоремы 1 и при данном $\varepsilon>0$ существует $h_0=h_0(\varepsilon)>0$, такое, что для всех $0<h<h_0$

$$\|u-u_h\|_h\le\varepsilon\|f\|_0. \tag{20}$$

Доказательство. Для $f\in L^2(\Omega)$

$$\bar{f}=\frac{f}{\|f\|_0},\quad \bar{u}=\frac{u}{\|f\|_0},\quad \bar{u}_h=\frac{u_h}{\|f\|_0}.$$

Тогда

$$a(\bar{u},v)=\bar{f}(v),\quad \forall\, v\in H_0^1(\Omega),\quad a_h(\bar{u}_h,v_h)=\bar{f}(v_h),\quad \forall\, v_h\in V_h.$$

Следовательно, из (11) имеем

$$\|\bar{u}-\bar{u}_h\|_h\le\left\{\inf_{v_h\in V_h}\|\bar{u}-v_h\|_h+\sup_{w_h\in V_h}\frac{E_h(\bar{u},w_h)}{\|w_h\|_h}\right\}. \tag{21}$$

Для $\hat{V}_h$ в [11] также показано, что существует $h_0'=h_0'(\varepsilon/2)$ так, что для $0<h<h_0'(\varepsilon/2,\bar{W})$

$$\inf_{v_h\in\hat{V}_h}\|\bar{u}-v_h\|_h\le\varepsilon/2,$$

где

$$\bar{W}=\left\{\bar{u}:a(\bar{u},v)=\bar{f}(v),\left\|\bar{f}\right\|_0=1\right\}.$$

Таким образом,

$$\inf_{v_h\in V_h}\|\bar{u}-v_h\|_h\le\inf_{v_h\in\hat{V}_h}\|\bar{u}-v_h\|_h\le\varepsilon/2. \tag{22}$$

Что касается оценки второго слагаемого в правой части (21), то из доказательства теоремы 1 с учетом леммы 3 получаем $h_0''(\varepsilon/2,\bar{W})$. Для $0<h<h_0=\ \min\left\{h_0'(\varepsilon/2,\bar{W}),h_0''(\varepsilon/2,\bar{W})\right\}$ следует

$$\left|E_h(\bar{u},w_h)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}\|w_h\|_h. \tag{23}$$

Таким образом, из (21) – (23), когда $0<h<h_0=\min\left\{h_0'(\varepsilon/2,\bar{W}),h_0''(\varepsilon/2,\bar{W})\right\}$, имеем

$$\|\bar{u}-\bar{u}_h\|_h\le\varepsilon,$$

т.е.

$$\|u-u_h\|_h\le\varepsilon\|f\|_0.$$

Доказательство завершено.

Итак, мы сделаем оценку L^2-нормы в теореме 3.

Теорема 3. В условиях теоремы 1 существует $h_1 = h(\varepsilon) > 0$, так что для $0 < h < h_1$ имеем

$$\|u - u_h\|_0 \le \varepsilon^2 \|f\|_0. \tag{24}$$

Доказательство. Согласно аргументу Обена – Нитше, выполняется

$$\|u - u_h\|_0 \le C \sup_{g\in L^2(\Omega)} \frac{1}{\|g\|_0}\left\{\|u - u_h\|_h \left\|\phi_g - (\phi_g)_h\right\|_h + E_h(u,(\phi_g)_h - \phi_g) + E_h^*(u - u_h, \phi_g)\right\}, \tag{25}$$

где $\phi_g \in H_0^1(\Omega)$ – решение

$$a(v,\phi_g) = (g,v), \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

Пусть $(\phi_g)_h \in V_h$ является приближением Кэри NFE из ϕ_g, для любого $g \in L^2(\Omega)$

$$a_h(v_h,(\phi_g)_h) = (g,v_h), \quad \forall\, v_h \in V_h.$$

Тогда

$$E_h(u,w_h) = a_h(u,w_h) - f(w_h); \tag{26}$$

$$E_h^*(w_h,\phi_g) = a_h(w_h,\phi_g) - (g,w_h); \tag{27}$$

$$\left\|\phi_g - (\phi_g)_h\right\|_h \le C \inf_{\varphi_h\in V_h} \left\|\phi_g - \varphi_h\right\|_h \le C \inf_{\varphi_h\in \hat{V}_h} \left\|\phi_g - \varphi_h\right\|_h. \tag{28}$$

Используя те же аргументы, что и в теореме 1, пусть $W^* = \left\{u^* : u^* = T^* g,\ \forall g \in D\right\}$, $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$ и $u^* = T^* g \in H_0^1(\Omega)$ являются решениями

$$a(Tf,v) = (f,v), \quad a(v,T^* g) = (g,v), \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

соответственно. Тогда W^* также предварительно компактен в $H_0^1(\Omega)$. Так как $C_0^\infty(\Omega)$ связано с $H_0^1(\Omega)$, то существует конечное открытое покрытие $\left\{S(\varphi_i,\varepsilon)\right\}_{i=1}^n$, такое, что

$$\overline{W} \subset \bigcup_{i=1}^n S(\phi_i,\varepsilon), \quad \overline{W}^* \subset \bigcup_{i=1}^n S(\phi_i,\varepsilon),$$

где

$$\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega), \quad S(\varphi_i,\varepsilon) = \left\{v \in H_0^1(\Omega) : \|v - \varphi_i\|_1 \le \varepsilon\right\}, \quad 1 \le i \le n.$$

Аналогично, пусть

$$\overline{g} = \frac{g}{\|g\|_0}, \quad \overline{\varphi}_g = \frac{\varphi_g}{\|g\|_0}, \quad (\overline{\varphi}_h)_h = \frac{(\varphi_g)_h}{\|g\|_0}.$$

Тогда

$$a(\overline{u},v) = (\overline{f},v), \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\mathrm{J}; \tag{29}$$

$$a_h(\overline{u}_h,v_h) = (\overline{g},v_h), \quad \forall\, v_h \in V_h\mathrm{J}; \tag{30}$$

$$a(v,\overline{\phi}_g) = (\overline{g},v), \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\mathrm{J}; \tag{31}$$

$$a_h(v_h,(\overline{\phi}_g)_h) = (\overline{g},v_h), \quad \forall\, v_h \in V_h. \tag{32}$$

Таким образом,

$$\|\overline{u} - \overline{u}_h\|_0 \le C \sup_{g\in L^2(\Omega)} \left\{\|\overline{u} - \overline{u}_h\|_h \left\|\overline{\phi}_g - (\overline{\phi}_g)_h\right\|_h + E_h(\overline{u},(\overline{\phi}_g)_h - \overline{\phi}_g) + E_h^*(\overline{u}_h - u, \overline{\phi}_g)\right\}. \tag{33}$$

Из теоремы 1 видно, что существуют $h_1' = h_1'(\varepsilon) > 0$ и $h_1'' = h_1''(\varepsilon,\overline{W},\overline{W}^*)$, такие, что

$$\left\|\overline{\phi}_g - (\overline{\phi}_g)_h\right\|_h \le \alpha_1 \varepsilon \quad \text{для } 0 < h < h_1'; \tag{34}$$

$$\left|E_h(\overline{u},(\overline{\phi}_g)_h-\overline{\phi}_g)\right|\le \alpha_2\varepsilon\left\|\overline{\phi}_g-(\overline{\phi}_g)_h\right\|_h; \tag{35}$$

$$\left|E_h^*(\overline{u}_h-\overline{u},\overline{\phi}_g)\right|\le \alpha_2\varepsilon\left\|\overline{u}-\overline{u}_h\right\|_h \quad \text{для } 0<h<h_1'', \tag{36}$$

где $\alpha_1,\alpha_2>0$ будет определено ниже. Таким образом, когда $0<h=h_1(\varepsilon)=\min(h_1',h_1'')$, имеем

$$\begin{aligned}\left\|\overline{u}-\overline{u}_h\right\|_0 &\le C\varepsilon\left\{(\alpha_1+\alpha_2)\left\|\overline{u}-\overline{u}_h\right\|_h+\alpha_2\left\|\overline{\phi}_g-(\overline{\phi}_g)_h\right\|_h\right\}\le\\ &\le C\varepsilon\left\{(\alpha_1+\alpha_2)\left\|\overline{u}-\overline{u}_h\right\|_h+\alpha_1\alpha_2\varepsilon\right\}\le C\varepsilon\left\{\left\|\overline{u}-\overline{u}_h\right\|_h+\varepsilon\right\}.\end{aligned} \tag{37}$$

Выберем $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{1}{2C}(C>1)$ и отмечая, что

$$\left\|\overline{u}-\overline{u}_h\right\|_0\le\frac{\left\|u-u_h\right\|_0}{\left\|f\right\|_0}; \tag{38}$$

$$\left\|\overline{u}-\overline{u}_h\right\|_h\le\frac{\left\|u-u_h\right\|_h}{\left\|f\right\|_0}, \tag{39}$$

завершим доказательство теоремы 3.

Заключение

Проверено, что подходы, используемые в теоремах этой работы, действительно сильно отличаются от подходов [12, 13], которые значительно упрощают доказательства. Тем более методы, использованные в [11–13], не могут быть применены непосредственно к анизотропным сеткам.

В теореме 1 $h_0=h_0(\varepsilon,u,f)$ означает, что она зависит не только от u, но и от f. То есть u_h сходится к u как $h\to 0$ неравномерно. Итак, необходимые доказательства результатов равномерной сходимости можно найти в теореме 2. В итоге равномерные оценки сходимости с L^2-нормой даны в теореме 3.

Приведенные выше результаты справедливы и для некоторых других NFEs, таких, как анизотропный квазиэлемент Кэри [7], анизотропный элемент Уилсона [15], квазиэлемент Уилсона [8] и т.д. Однако вопрос распространения результатов настоящей работы на неконформные прямоугольные элементы, изученные в работах [16–34], до сих пор остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carey G.F. // Comput. Method. Appl. Mech. Eng. – 1976. – V. 9. – P. 165–179.
2. Shi Z.C. // Comput. Method. Appl. Mech. Eng. – 1985. – V. 48. – P. 123–137.
3. Shi D.Y. and Pei L.F. // J. Sys. Sci. Math. Sci. – 2009. – V. 29. – No. 6. – P. 854–864.
4. Shi D.Y., Shi S.C., and Hagiwara I. // J. Comp. Math. – 2005. – V. 23. – No. 4. – P. 373–382.
5. Shi D.Y. and Wang C.X. // Chin. J. Eng. Math. – 2006. – V. 23. – No. 3. – P. 399–406.
6. Shi D.Y. and Hao X.B. // Chin. J. Eng. Math. – 2009. – V. 26. – No. 6. – P. 1021–1026.
7. Shi D.Y. and Hao X.B. // J. Syst. Sci. Math. – 2008. – V. 21. – No. 3. – P. 456–462.
8. Chen S.C., Shi D.Y., and Zhao Y.C. // IMA J. Numer. Anal. – 2004. – V. 24. – No. 1. – P. 77–95.
9. Shi D.Y. and Liang H. // Appl. Math. Mech. – 2007. – V. 28. – No. 1. – P. 119–125.
10. Shi D.Y. and Pei L.F. // Appl. Math. Comp. – 2013. – V. 219. – No. 17. – P. 9447–9460.
11. Schatz A.H. and Wang J.P. // Math. Comp. – 1996. – V. 65. – P. 19–27.
12. Wang L.H. // J. Comput. Math. – 2000. – V. 18. – No. 3. – P. 277–282.
13. Wang L.H. // J. Comput. Math. – 1999. – V. 17. – No. 6. – P. 609–614.
14. Ciarlet P.G. // J. Appl. Mech. Dec – 1978. – V. 45. – No. 4. – P. 968–969.
15. Rannacher R. and Turek S. // Numer. Meth. for PDEs. – 1992. – V. 8. – P. 97–111.
16. Shi D.Y. and Wang C.X. // Inter. J. Comput. Math. – 2011. – V. 88. – No. 10. – P. 2167–2177.
17. Shi D.Y., Mao S.P., and Chen S.C. // J. Comput. Math. – 2005. – V. 23. – No. 3. – P. 261–274.
18. Shi D.Y. and Pei L.F. // Inter. J. Numer. Anal. Model. – 2008. – V. 5. – No. 3. – P. 373–385.
19. Shi D.Y., Wang H.H., and Du Y.D. // J. Comput. Math. – 2009. – V. 27. – No. 2–3. – P. 299–314.
20. Shi D.Y. and Ren J.C. // Inter. J. Numer. Anal. Model. – 2009. – V. 6. – No. 2. – P. 293–310.
21. Shi D.Y. and Ren J.C. // Nonlinear Anal. TMA. – 2009. – V. 71. – No. 9. – P. 3842–3852.
22. Lin Q., Lutz T., and Zhou A.H. // IMA J. Numer. Anal. – 2005. – V. 25. – P. 160–181.
23. Shi D.Y. and Yao C.H. // Numer. Meth. for PDEs. – 2014. – V. 30. – No. 5. – P. 1654–1673.
24. Hu J. and Shi Z.C. // J. Comput. Math. – 2005. – V. 23. – No. 6. – P. 561–586.
25. Park C. and Sheen D. // SIAM. J. Numer. Anal. – 2003. – V. 41. – No. 2. – P. 624–640.
26. Baig A.Q., Naeem M., and Gao W. // Appl. Math. Nonlinear. Sci. – 2018. – V. 3. – No. 1. – P. 33–40.

27. Dewasurendra M. and Vajravelu K. // Appl. Math. Nonlinear. Sci. – 2018. – V. 3. – No. 1. – P. 1–14.
28. Lakshminarayana P., Vajravelu K., Sucharitha G., et al. // Appl. Math. Nonlinear. Sci. – 2018. – V. 3. – No. 1. – P. 41–54.
29. Aidara S. // Appl. Math. Nonlinear Sci. – 2019. – V. 4. – No. 1. – P. 9–20.
30. Amanda R. and Atangana A. // Chaos Solitons Fractals. – 2018. – V. 116. – P. 414–423.
31. Wang S., Du S., Atangana A., et al. // Multimedia Tools Appl. – 2018. – V. 77. – No. 3. – P. 3701–3714.
32. Yao C.H. and Wang L.X. // Numer. Math. Theory Methods Appl. – 2017. – V. 10. – No. 1. – P. 145–166.
33. Yao C.H. and Jia S.H. // Appl. Math. Comput. – 2014. – V. 229. – P. 34–40.
34. Qiao Z.H., Yao C.H., and Jia S.H. // J. Sci. Comput. – 2011. – V. 46. – No. 1. – P. 1–19.

Поступила в редакцию 14.10.2020.

[1] School of Mathematical Sciences, Henan Institute of Science and Technology, Xinxiang, China
[2] School of Mathematics and Statistics, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou, China

---

Dongwei Shi, M.S., Lecturer School of Mathematical Sciences, Henan Institute of Science and Technology, e-mail: shidongwei@hist.edu.cn;
Caixia Wang, Ph.D., Associate Professor School of Mathematics and Statistics, North China University of Water Resources and Electric Power, e-mail: wangcaixia@ncwu.edu.cn.