ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 64, № 4 ФИЗИКА 2021

УДК 531.1 DOI: 10.17223/00213411/64/4/115

В.В. ОБУХОВ[1,2]

РЕШЕНИЯ ВАКУУМНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ШТЕККЕЛЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА (1.1) [*]

Проинтегрированы вакуумные уравнения Максвелла для случая, когда уравнения Гамильтона – Якоби для заряженной пробной частицы допускают полное разделение переменных типа (1.1). Использованы результаты осуществлённой ранее классификации штеккелевых метрик и электромагнитных потенциалов внешнего электромагнитного поля.

Ключевые слова: *уравнение Гамильтона – Якоби, разделение переменных, векторы и тензоры Киллинга, интегралы движения.*

Введение

В работах [1–4] осуществлена классификация штеккелевых пространств, в которых допускает полное разделение переменных уравнение Гамильтона – Якоби для заряженной пробной частицы, движущейся во внешнем электромагнитном поле. Под классификацией понимается перечисление всех классов эквивалентности для метрик и физических полей относительно группы допустимых (т.е. не нарушающих условия полного разделения переменных) преобразований координат и потенциалов. Получены все неэквивалентные наборы электромагнитных потенциалов внешнего электромагнитного поля и метрик штеккелевых пространств типа $(N.N_0)$.

Теория штеккелевых пространств построена в [5–7]. В работе [8] теория была обобщена на случай комплексных привилегированных систем координат. Отличительной особенностью штеккелева пространства является существование в нём полного набора геометрических объектов – взаимно коммутирующих и удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям векторных и тензорных полей Киллинга, что позволяет осуществить полное разделение переменных в классических и квантовых уравнениях движения пробных частиц. Она даёт возможность использовать полученные результаты для осуществления аналогичной классификации для уравнения Клейна – Гордона – Фока и Дирака – Фока [9, 10]. Отметим, что метрики штеккелевых пространств типа (1.1) исследовались в ряде работ. Так, ещё в работах [11, 12] были проклассифицированы все системы координат плоского пространства-времени и электромагнитные поля, допускающие полное разделение переменных типа (1.1) в уравнениях Гамильтона – Якоби и Клейна – Гордона – Фока. Авторы работ [13, 14] проклассифицировали все вакуумные и электровакуумные решения уравнений Эйнштейна – Максвелла, полученные при условии полного разделения переменных в уравнении Гамильтона – Якоби. В ряде задач теории гравитации все материальные поля можно рассматривать как внешние на фоне сильного гравитационного поля. В частности, имеет физический смысл задача нахождения решений вакуумных уравнений Максвелла. В [1] эта задача решена для пространств типа (1.0). В настоящей работе рассматриваются вакуумные уравнения Максвелла в штеккелевых пространствах типа (1.1), в которых допускает полное разделение переменных уравнение Гамильтона – Якоби для заряженной пробной частицы. Использованы электромагнитные потенциалы и метрики, полученные в [4].

1. Уравнение Гамильтона – Якоби

Приведём необходимые в дальнейшем сведения и результаты, полученные в работе [4]. Рассмотрим пространство-время V_4 с координатной системой $\{u^i\}$ $(i, j = 0,\dots,3)$ и метрическим тензором, имеющим компоненты g_{ij}, g^{ij}.

[*] Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, проект FEWF-2020-0003.

Символы Кронеккера обозначим $\delta^{ij}, \delta_{ij}, \delta^i_j$, $\lambda_i = \mathrm{const}$ (постоянные разделения), величины ε, ε_i могут принимать значения $+1, -1$. Функции, зависящие только от переменной u^i, выразим малыми буквами с обязательным одиночным правым (нижним) индексом i, малыми буквами со значком «$\sim$» обозначены постоянные. По повторяющимся верхним и нижним индексам ведётся суммирование в установленных пределах изменения индексов.

Если в пространстве V_4 допускает полное разделение переменных уравнение Гамильтона – Якоби

$$g^{ij}(S_{,i} + A_i)(S_{,j} + A_j) = \lambda_1, \tag{1}$$

то оно называется штеккелевым, и существует привилегированная система координат, в которой полный интеграл можно представить как

$$S = \sum_{i=0}^{i=3} s_i(u^i, \lambda_j), \quad \det\left|\frac{\partial^2 S}{\partial u^i \partial \lambda_j}\right| \neq 0. \tag{2}$$

Штеккелево пространство типа (1.1) допускает полный набор, состоящий из изотропного векторного поля Киллинга Y^i и трёх (вместе с метрическим тензором) тензорных полей Киллинга X^{ij}_α. Векторное поле имеет вид $Y^i = \delta^i_0 \to u^0$ – игнорируемая переменная, и $s_0 = \lambda_0 u^0$. Так как $Y^i Y_i = 0 \to g_{00} = 0 \to g^{11} = 0$, (1) является уравнением параболического типа и среди пространств рассматриваемого типа имеются плоско-волновые. Неигнорируемые переменные будем снабжать индексами $\alpha, \beta = 1, \ldots, 3,$ и $\nu, \mu = 2, 3$. При этом u^1 является изотропной переменной.

Тензорные поля Киллинга в привилегированной системе координат можно записать в виде

$$X^{ij}_1 = g^{ij} = \frac{1}{\Delta}\Big((\tau_3 - \tau_2)h^{ij}_1 + (\tau_1 - \tau_3)h^{ij}_2 + (\tau_2 - \tau_1)h^{ij}_3\Big),$$

$$X^{ij}_2 = \frac{1}{\Delta}\Big((w_2 - w_3)h^{ij}_1 + (w_3 - w_1)h^{ij}_2 + (w_1 - w_2)h^{ij}_3\Big), \tag{3}$$

$$X^{ij}_3 = \frac{1}{\Delta}\Big((w_3\tau_2 - w_2\tau_3)h^{ij}_1 + (\tau_3 w_1 - \tau_1 w_3)h^{ij}_2 + (\tau_1 w_2 - \tau_2 w_1)h^{ij}_3\Big),$$

где

$$h^{ij}_\alpha = (\delta^i_0\delta^j_1 + \delta^j_0\delta^i_1)\delta^1_\alpha + \delta^i_\nu\delta^j_\nu\delta^\nu_\alpha\varepsilon_\nu + \delta^i_0\delta^j_0 b_\alpha,$$

$$\Delta = (\tau_3 - \tau_2)w_1 + (\tau_1 - \tau_3)w_2 + (\tau_2 - \tau_1)w_3.$$

В этой же системе координат компоненты метрического тензора и электромагнитного потенциала можно привести к виду

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{b_\alpha V^\alpha}{\Delta} & \frac{V^1}{\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{V^1}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon^2 V^2}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon^3 V^3}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta}{V^1} & 0 & 0 \\ \frac{\Delta}{V^1} & -\frac{b_\alpha V^\alpha}{\Delta V^{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon^2 \Delta}{V^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon^3 \Delta}{V^3} \end{pmatrix}; \tag{4}$$

$$A^i = \frac{\delta^{i0}(a_\alpha V^\alpha) + \delta^{i1} e_1 V^1}{\Delta}, \quad A_i = \delta_{i0} e_1 + \frac{\delta_{i1}(a_\alpha V^\alpha)}{V^1}, \tag{5}$$

где

$$V^1 = (\tau_3 - \tau_2), \quad V^2 = (\tau_1 - \tau_3), \quad V^3 = (\tau_2 - \tau_1).$$

Функции $a_\alpha, b_\alpha, \tau_\alpha, e_1$, входящие в выражения (4), (5), должны удовлетворять функциональному уравнению

$$A^\alpha A_\alpha \Delta = (2e_1 a_\alpha - e_1^2 b_\alpha)V^\alpha = h_\alpha V^\alpha, \tag{6}$$

которое сводится к системе алгебраических уравнений. Решение этой системы позволяет найти все метрики и электромагнитные потенциалы, допускающие полное разделение переменных типа (1.1) в уравнении (1).

Введём символы ξ_0, ξ_1, такие, что

$$\xi_0\xi_1 = 0, \quad \xi_0 + \xi_1 = 1.$$

Тогда компоненты метрического тензора и электромагнитного потенциала, удовлетворяющие уравнению (6), можно представить так:

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \xi_1 \dfrac{b_\nu V^\nu}{\Delta} & \dfrac{V^1}{\Delta} & 0 & 0 \\ \dfrac{V^1}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\varepsilon^2 V^2}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\varepsilon^3 V^3}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\Delta}{V^1} & 0 & 0 \\ \dfrac{\Delta}{V^1} & -\xi_1 \dfrac{b_\nu V^\nu}{\Delta V^{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\varepsilon^2 \Delta}{V^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\varepsilon^3 \Delta}{V^3} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$A^i = \frac{\delta^{i0}\xi_1(a_\nu V^\nu) + \delta^{i1}\xi_0 e_1 V^1}{\Delta}, \quad A_i = \delta_{i0}\xi_0 e_1 + \frac{\delta_{i1}\xi_1(a_\nu V^\nu)}{V^1}.$$

Входящие в полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби (2) функции s_ν имеют вид

$$s_1 = \int \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 t_1 + \lambda_3 w_1}{2\lambda_0} - \xi_0 e_1\right) du^2,$$

$$s_\nu = \varepsilon \int \sqrt{\varepsilon^\nu(\lambda_1 + \lambda_2 t_\nu + \lambda_3 w_\nu) - \xi_1(b_\nu \lambda_0{}^2 + 2a_\nu \lambda_0)}\, du^3.$$

2. Решения вакуумного уравнения Максвелла

При изучении ряда эффектов в присутствии гравитационного поля иные физические поля в силу незначительности их вклада в формирование пространственно-временной (см., например, [15]) геометрии часто рассматриваются как внешние на фоне заданной метрики. Поэтому известный интерес с физической точки зрения представляет проблема интегрирования вакуумных уравнений Максвелла для приведённых выше метрик и электромагнитных потенциалов.

Рассмотрим вакуумные уравнения Максвелла

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|}F^{ij})_{,i} = 0, \quad g = \det|g_{ij}|, \tag{8}$$

при условии, что компоненты метрического тензора и электромагнитного потенциала заданы соотношениями (7).

I. $\xi_1 = 0 \to \dot{e}_1 \neq 0 \to A^i = \delta^{i1} e_1/\Delta.$

При интегрировании уравнения (8) следует отдельно рассмотреть два варианта (в зависимости от значения τ_1).

А. $\tau_1 = 0$. В этом случае компоненты метрического тензора и электромагнитного потенциала можно, используя допустимые преобразования вида

$$u^\nu \to \int \sqrt{\varepsilon\tau^\nu}\, du^\nu,$$

представить в форме

$$\| g^{ij} \| = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\tau_2+\tau_3}{\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{\tau_2+\tau_3}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$A^i = \delta^{i1} e_1/\Delta, \quad \Delta = w_1(\tau_2+\tau_3) + w_2 + w_3.$$

Из уравнения Максвелла (8) немедленно получаем

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|}F^{01})_{,1} = 0 \rightarrow \ddot{e}_1 = 0 \rightarrow e_1 = \tilde{e}u^1.$$

Здесь и далее точками обозначаются производные по соответствующим переменным. В данном случае – по u^1.

B. $\dot{\tau}_1 \neq 0$. Уравнения Максвелла принимают вид

$$2\ddot{e}_1 = \dot{e}_1\dot{\tau}_1\left(\frac{1}{\tau_1-\tau_3} - \frac{1}{\tau_2-\tau_1}\right). \tag{10}$$

Поскольку $\dot{\tau}_1\dot{e}_1 \neq 0$, отсюда следует $\tau_\nu = \tilde{\tau}_\nu$, и решение уравнения (10) запишем как

$$\dot{e}_1 = |(\tau_1 - \tilde{\tau}_2)(\tau_1 - \tilde{\tau}_3)|^{1/2}.$$

Переобозначив постоянные $\tilde{\tau}_\nu$ и преобразовав функции τ_1, ω_α, представим решение в виде, явно учитывающем пространственно-временную сигнатуру:

1. $$\| g^{ij} \| = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\sin\tau_1)^2}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\cos\tau_1)^2}{\Delta} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$A^i = \tilde{e}\delta^{i1}\frac{\int(\sin 2\tau_1)du^1}{\Delta}, \quad \Delta = w_1 + w_2(\sin\tau_1)^2 + w_3(\cos\tau_1)^2.$$

2. $$\| g^{ij} \| = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\sinh\tau_1)^2}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\cosh\tau_1)^2}{\Delta} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$A^i = \tilde{e}\delta^{i1}\frac{\int(2\sinh\tau_1)du^1}{\Delta}, \quad \Delta = w_1 + w_2(\sinh\tau_1)^2 + w_3(\cosh\tau_1)^2.$$

II. $\xi_0 = 0 \rightarrow e_1 = 0, \quad A^i = \dfrac{a_\nu V^\nu}{\Delta}\delta^{i0}.$

Приведём уравнение Максвелла к виду

$$2(\tau_\nu - \tau_1)(\tau_1 A_{,\nu\nu} + B_{,\nu\nu}) - \dot{\tau}_\nu(\tau_1 A_{,\nu} + B_{,\nu}) = 0, \quad (13)$$

где обозначено

$$A = \frac{a_3 - a_2}{\tau_2 - \tau_3}, \quad B = \frac{a_2\tau_3 - a_3\tau_2}{\tau_2 - \tau_3}.$$

Как и ранее, отдельно рассмотрим варианты $\dot{\tau}_1 = 0$ и $\dot{\tau}_1 \neq 0$.

A. $\dot{\tau}_1 \neq 0$. В этом случае из уравнения (13) следует система

$$\varepsilon^\nu A_{,\nu\nu} = 0; \quad (14)$$

$$\dot{\tau}_\nu(B_{,\nu} - \tau_\nu A_{,\nu}) = 0; \quad (15)$$

$$\varepsilon_2\tau_3(2B_{,22} - \dot{\tau}_2 A_{,2}) + \varepsilon_3\tau_2(2B_{,33} - \dot{\tau}_3 A_{,3}) = 0; \quad (16)$$

$$\varepsilon_2\tau_3 A_{,22} + \varepsilon_3\tau_2 A_{,33} + \varepsilon^\nu\left(B_{,\nu\nu} - \frac{A_{,\nu}\dot{\tau}_\nu}{2}\right) = 0. \quad (17)$$

Легко показать, что система уравнений (16), (17) имеет решение только при условии

$$\tau_\nu = \tilde{\tau}_\nu.$$

Из уравнений (16), (17) следует

$$a_\nu = \tilde{a}_\nu u^\nu.$$

После очевидных преобразований приведём решение уравнения (13) к виду

$$\hat{g}^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{(\tau_1+1)b_2 + (\tau_1-1)b_3}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tau_1+1}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon\frac{\tau_1-1}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad \Delta = w_1 + w_2(\tau_1+1) + w_3(\tau_1-1), \quad (18)$$

$$A_i = \delta^{i0}((\tau_1+1)\tilde{a}_2 u^2 + (\tau_1-1)\tilde{a}_3 u^3).$$

B. $\dot{\tau}_1 = 0$. В этом случае, осуществляя такие же преобразования, как и в пункте I (A), получаем

$$\hat{g}^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{b_2 - b_3}{\Delta} & \frac{\tau_2 - \tau_3}{\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{\tau_2 - \tau_3}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad \Delta = w_1(\tau_2 - \tau_3) + w_2 + w_3, \quad (19)$$

$$A_i = \delta_{i0}\frac{A}{T},$$

где обозначено $A = a_2 - a_3, \quad T = \tau_2 - \tau_3$. Уравнения Максвелла сводятся к единственному уравнению

$$A_{0,22} + A_{0,33} = 0, \quad (20)$$

решение которого имеет вид

$$A_0 = W + \bar{W} \to A = T(W + \bar{W}), \tag{21}$$

где $W = W(z), \quad z = \sqrt{\frac{1}{2}}(u^2 + iu^3)$. Соотношение (21) представляет собой функциональное уравнение. Поскольку $\partial^2 - \bar{\partial}^2 = -i\partial_2\partial_3$, из (21) следует

$$\partial W \partial \ln(\partial W T^2) = \bar{\partial}\bar{W}\bar{\partial}\ln(\bar{\partial}\bar{W}T^2). \tag{22}$$

Если выполняется условие

$$T = \dot{Q}(z)\dot{\bar{Q}}(\bar{z}) \tag{23}$$

(точками обозначаются производные по z), то уравнение (22) допускает разделение комплексных переменных. В этом случае, переобозначив $W = F/\dot{Q}$, условие (21) можно преобразовать следующим образом:

$$A = \dot{Q}\bar{F} + \dot{\bar{Q}}F. \tag{24}$$

Вместо (22) получим

$$\ddot{F}\dot{\bar{Q}} - \ddot{\bar{F}}\dot{Q} + \bar{F}\partial^2\dot{Q} - F\bar{\partial}^2\dot{\bar{Q}} = 0. \tag{25}$$

Поскольку

$$(\partial^2 - \bar{\partial}^2)(\tau_2 - \tau_3) = 0 \quad \to \quad \partial^2\dot{Q} = \tilde{l}\dot{Q},$$

из уравнения (25) следует функциональное уравнение

$$(\ddot{F} - \tilde{l}F)\dot{\bar{Q}} = (\ddot{\bar{F}} - \tilde{l}\bar{F})\dot{Q},$$

решение которого запишем как

$$\ddot{F} - \tilde{l}F = \tilde{n}\dot{Q}. \tag{26}$$

Проинтегрируем уравнение (26). В результате получим:

a) $\tilde{l} \neq 0$. Без ограничения общности можно полагать $\tilde{l} = 1$. Тогда

$$F = \tilde{a}zQ + Q_0, \quad Q = \tilde{\alpha}\exp z + \tilde{\beta}\exp(-z), \quad Q_0 = \tilde{\alpha}_0 \exp z + \tilde{\beta}_0 \exp(-z). \tag{27}$$

b) $\tilde{l} = 0$:

$$F = \tilde{e}(\tilde{p}z^3 + \tilde{\alpha}z^2 + \tilde{\beta}z + \tilde{\gamma}), \quad \dot{Q} = 6\tilde{p}z + 2\tilde{\alpha}. \tag{28}$$

Таким образом, искомые решения уравнения Максвелла имеют вид

$$A_0 = F/\dot{Q} + \bar{F}/\dot{\bar{Q}},$$

где функции F и Q задаются соотношениями (27), (28); $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ – комплексные постоянные.

Заключение

С физической точки зрения, внимание к внешним полям связано с наличием физических процессов, при исследовании которых влиянием на геометрию всех полей, кроме гравитационного, можно пренебречь. В качестве примера приведем аксионные поля, которые в настоящее время считаются наиболее вероятными кандидатами для описания темной материи. При построении космологических моделей ранней Вселенной эти поля вносят существенный вклад в тензор энергии-импульса [16, 17]. В то же время при изучении совокупности локальных эффектов в сильных гравитационных полях электромагнитные и аксионные поля ввиду незначительности их вклада в формирование геометрии пространства-времени часто можно рассматривать как внешние на фоне заданной метрики (см., например, работу [18]). Укажем ещё одно перспективное направление применения штеккелевых пространств в теории гравитации. Как уже отмечалось, среди пространственно-временных штеккелевых метрик типа $(N.1)$ есть волнообразные (см. также [19–22]). В последнее время интерес к волновым метрикам значительно возрос. Например, в работах [23, 24] описано распространение гравитационных волн в ускоряющейся Вселенной. Полученные в настоящей работе результаты позволяют строить реалистичные модели с плоскими гравитационными и электромагнитными волнами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обухов В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2020. – V. 63. – No. 7. – P. 33.
2. Obukhov V.V. // Symmetry. – 2020. – V. 12. – P. 1289.
3. Obukhov V.V. // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. – 2020. – V. 17. – No. 14. – P. 2050186.
4. Obukhov V.V. // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. – 2021. – V. 18. – No. 03. – P. 2150036. DOI: 10.1142/S0219887821500365.
5. Stäckel P. // Math. Ann. – 1897. – V. 49. – P. 145–47.
6. Шаповалов В.Н. // Изв. вузов. Физика. – 1978. – Т. 21. – № 9. – С. 18–24.
7. Shapovalov V.N. // Sib. Math. J. – 1979. – V. 20. – P. 1117–1130.
8. Bagrov V.G. and Obukhov V.V. // Theor. Math. Phys. – 1993. – V. 97. – No. 2. – P. 1275–1289.
9. Bagrov V.G. and Obukhov V.V. // Class. Quant. Grav. – 1990. – V. 7. – No. 1. – P. 19–25.
10. Bagrov V.G. and Obukhov V.V. // J. Math. Phys. – V. 33. – No. 6. – P. 2279–2289.
11. Багров В.Г., Мешков А.Г., Шаповалов В.Н., Шаповалов А.В. // Изв. вузов. Физика. – 1973. – Т. 16. – № 11. – С. 66–72.
12. Багров В.Г., Мешков А.Г., Шаповалов В.Н., Шаповалов А.В. // Изв. вузов. Физика. – 1973. – Т. 16. – № 12. – С. 45–52.
13. Bagrov V.G., Obukhov V.V., and Shapovalov A.V. // Pramana J. Phys. – 1986. – V. 26. – No. 2. – P. 93.
14. Bagrov V.G. and Obukhov V.V. // Ann. Phys. – 1983. – B. 40. – N 4/5. – S. 181–188.
15. Breev A. and Shapovalov A. // Symmetry. – 2020. – V. 12. – P. 1867.
16. Nojiri S., Odintsov S.D., and Oikonomou V.K. // Ann. Phys. – 2020. – V. 418. – P. 168186.
17. Odintsov S.D. and Oikonomou V.K. // EPL. – 2020. – V. 129. – No. 4. – P. 40001.
18. Balakin A.B. and Zayats A.E. // Eur. Phys. J. C. – 2017. – V. 77. – No. 8. – P. 519.
19. Osetrin K. and Osetrin E. // Symmetry. – 2020. – V. 12. – P. 1372.
20. Осетрин Е.К., Осетрин К.Е., Филиппов А.Е. // Изв. вузов. Физика. – 2020. – Т. 63. – № 3. – С. 51–56.
21. Осетрин Е.К., Осетрин К.Е., Филиппов А.Е. // Изв. вузов. Физика. – 2020. – Т. 63. – № 3. – С. 57–64.
22. Осетрин Е.К., Осетрин К.Е., Филиппов А.Е. // Изв. вузов. Физика. – 2019. – Т. 62. – № 2. – P. 96–102.
23. Capozziello S., Laurentis De M., Nojiri S., and Odintsov S.D. // Phys. Rev. D. – 2017. – V. 95. – No. 8. – P. 083524.
24. Bamba K., Nojiri S., and Odintsov S.D. // Phys. Rev. D. – 2018. – V. 98. – No. 2. – P. 024002.

Поступила в редакцию 23.11.2020.

[1] Томский государственный педагогический университет, г. Томск, Россия
[2] Томский университет автоматизированных систем управления
и радиоэлектроники, г. Томск, Россия

Обухов Валерий Владимирович, д.ф.-м.н., профессор ТГПУ, ведущ. науч. сотр. Международной лаборатории теоретической космологии ТУСУРа, e-mail: obukhov@tspu.edu.ru.