

Секция 6

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ИНФОРМАТИКИ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ

УДК 519.682

DOI 10.17223/2226308X/14/40

О РЕШЕНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГРАММАТИК
И ОБЩЕГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

О. И. Егорушкин, И. В. Колбасина, К. В. Сафонов

Исследуется разрешимость формальных грамматик, под которыми подразумеваются системы некоммутативных полиномиальных уравнений, в случае одного уравнения. Формальные грамматики решаются в виде формальных степенных рядов (ФСР), которые выражают нетерминальные символы языка через терминальные символы; первая компонента решения и есть формальный язык. Авторы развивают метод, основанный на изучении коммутативного образа грамматики и языка, который получается, если во всяком ФСР символы алфавита считать коммутативными переменными. Получена теорема, которая даёт разложение в степенной ряд решения общего алгебраического уравнения, а также позволяет исследовать разрешимость в виде ФСР полиномиальной грамматики, состоящей из одного уравнения.

Ключевые слова: *общее алгебраическое уравнение, полиномиальная грамматика, формальный степенной ряд, некоммутативные символы, коммутативный образ.*

Как известно, теория формальных языков имеет фундаментальное значение не только для лингвистики, но и программирования. Наиболее важные для приложений классы формальных грамматик можно записать в виде системы полиномиальных уравнений с некоммутативными переменными [1, 2].

Следуя [3, 4], понимаем под полиномиальной грамматикой систему полиномиальных уравнений

$$P_j(z, x) = 0, \quad P_j(0, 0) = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

которая решается относительно символов $z = (z_1, \dots, z_n)$ в виде формальных степенных рядов, зависящих от символов $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Символы $x_1, \dots, x_m$ называются терминальными и образуют словарь языка, а символы $z_1, \dots, z_n$ — нетерминальными, они необходимы для задания грамматических правил. Над всеми символами определена некоммутативная операция конкатенации и коммутативные операции формального сложения и умножения на числа, а значит, можно рассматривать ФСР с числовыми коэффициентами. Мономы от терминальных символов интерпретируются как предложения языка, а каждый ФСР — сумма всех «правильных» мономов, который является решением полиномиальной системы, понимается как порождённый грамматикой язык [1, 2].

Исследовать системы с некоммутативными символами очень трудно, и потому в работах [3–5] предложено рассмотреть коммутативный образ полиномиальной грамматики: для ФСР s коммутативный образ $ci(s)$ получается в предположении, что все переменные коммутативны.

Трудность исследования полиномиальных грамматик имеет место даже в случае одного уравнения:

$$P_1(z, x) = 0.$$

Так, известно [3, 4], что одно уравнение с некоммутативными неизвестными может не иметь решений; иметь любое конечное число решений; иметь бесконечно много решений. Поэтому случай некоммутативных переменных принципиально отличается от уравнения над полем комплексных чисел, которое всегда разрешимо.

Понятно, что достаточно рассмотреть общее алгебраическое уравнение

$$P_1(z, x) = x_n z^n + x_{n-1} z^{n-1} + \dots + x_1 z + x_0 = 0 \quad (1)$$

относительно символа z (здесь $z = z_1$) и исследовать разложение неявной функции $z = z(x)$, определяемой коммутативным образом уравнения (1) в степенной ряд либо ряд Лорана относительно переменных $x_0, x_1, \dots, x_n$.

С одной стороны, решение уравнения (1) представляет интерес для теории формальных языков и грамматик, с другой — конструктивное решение общего алгебраического уравнения в виде функции от коэффициентов является фундаментальной математической задачей, имеющей многовековую историю.

Как известно, после открытия формул Кардано и Феррари для решения уравнений третьей и четвертой степени появилась некоторая надежда решать произвольное алгебраическое уравнение в радикалах, однако почти через триста лет, в 1826 г., Абель доказал невозможность этого для уравнений пятой и более высоких степеней. Точнее, Абель доказал, что если существует формула, выражающая в радикалах корни уравнения пятой степени через его коэффициенты, то в случае действительных коэффициентов уравнение имеет либо один действительный корень, либо пять (очевидно, такое уравнение может иметь лишь три действительных корня, а значит, формулы в радикалах не существует). С этого времени конструктивное представление решений вызывает особый интерес.

Конструктивное представление решения как функции от коэффициентов возможно в виде интегралов и рядов, что часто оказывается более удобным для приближённых вычислений. Так, в 1921 г. Меллин предложил решать общее уравнение с помощью гипергеометрических функций, причём разложение в ряд получено на основе интегрального представления Меллина — Барнса. В 1984 г. Умемура доказал разрешимость уравнения произвольной степени с помощью тэта-функций.

В принципе, получить разложение в ряд неявной функции $z = z(x_1, \dots, x_n)$, определяемой функциональным уравнением

$$F(z, x_1, \dots, x_n) = 0,$$

не очень сложно. Как правило, такие разложения содержат оператор дифференцирования возрастающего порядка, либо коэффициенты степенного разложения даются формулой с возрастающим числом слагаемых.

Теперь наша цель — найти конструктивный способ разложить в ряд неявную функцию $z(x)$, заданную коммутативным образом уравнением (1), если возможно, в «замкнутом виде». Идея состоит в том, что функция $z(x)$ — алгебраическая, и потому её ряд является диагональю ряда некоторой рациональной функции от переменных, число которых на 1 больше числа коэффициентов уравнения [6].

Рассмотрим произвольную ветвь $z = z(x)$ решения уравнения (1), проходящую через точку $(0, 0)$ (достаточно считать, что такая ветвь единственная).

Теорема 1. Для функции, заданной коммутативным образом уравнения (1), имеет место разложение в ряд Лорана

$$z(x) = \sum_{k_2+\dots+k_n \geq 1} (-1)^k \frac{(2k_2 + \dots + nk_n)!}{((n-1)k_n + \dots + k_2 + 1)!k_2! \dots k_n!} \times \\ \times x_0^{(n-1)k_n+\dots+k_2+1} x_1^{-nk_n-\dots-2k_2-1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

Поскольку в формуле решения степени переменной x_1 отрицательные, то решение исходного некоммутативного уравнения (1) в виде ФСР невозможно, таким образом, имеет место следующее

Следствие 1. Полиномиальная грамматика, порождённая уравнением (1), не имеет решения (не порождает полиномиального языка).

ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л. Алгебра. Языки. Программирование. Киев: Наукова думка, 1973.
2. Salomaa A. and Soittola M. Automata-Theoretic Aspects of Formal Power Series. N.Y.: Springer Verlag, 1978.
3. Егорушкин О. И., Колбасина И. В., Сафонов К. В. О совместности систем символьных полиномиальных уравнений и их приложении // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2016. № 9. С. 119–121.
4. Egorushkin O. I., Kolbasina I. V., and Safonov K. V. On solvability of systems of symbolic polynomial equations // Журн. СВУ. Сер. Матем. и физ. 2016. Т. 9. Вып. 2. С. 166–172.
5. Семёнов А. Л. Алгоритмические проблемы для степенных рядов и контекстно-свободных грамматик // Докл. АН СССР. 1973. № 212. С. 50–52.
6. Safonov K. V. On power series of algebraic and rational functions in C^n // J. Math. Analysis Appl. 2000. V. 243. P. 261–277.

УДК 510.52

DOI 10.17223/2226308X/14/41

О ГЕНЕРИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ ПРОБЛЕМЫ ИЗОМОРФИЗМА КОНЕЧНЫХ ПОЛУГРУПП

А. Н. Рыбалов

Изучается генерическая сложность проблемы изоморфизма конечных полугрупп: по любым двум полугруппам одинакового порядка, заданным таблицами умножения, требуется определить, являются ли они изоморфными. К этой проблеме полиномиально сводится проблема изоморфизма конечных графов. Таким образом, проблема изоморфизма конечных полугрупп с вычислительной точки зрения не проще проблемы изоморфизма графов. Предлагается генерический полиномиальный алгоритм для проблемы изоморфизма конечных полугрупп. В его основе лежит характеристика почти всех конечных полугрупп как 3-нильпотентных полугрупп специального вида, а также полиномиальный алгоритм Боллобаши, решающий проблему изоморфизма для почти всех сильно разреженных графов.

Ключевые слова: генерическая сложность, конечные полугруппы, изоморфизм.

Введение

Понятие изоморфизма является одним из важнейших понятий в современной математике. Изоморфные объекты имеют одинаковые математические свойства, одина-