случае это неверно. Например, для решётки 3×3 минимальное расширение имеет пять дополнительных рёбер, а у расширения, построенного по схеме, их восемь. Данные расширения изображены на рис. 3.

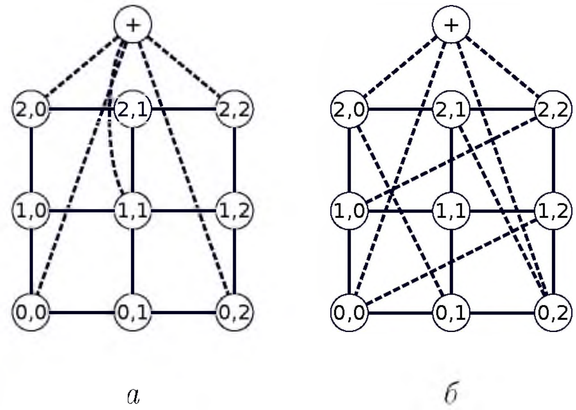

Рис. 3. МВ-1-Р (*а*) и построенное по предложенной схеме расширение решётки 3×3 (*б*)

Следует отметить, что для рассматриваемых в [7] решёток $2 \times m$ построенное по предложенной схеме расширение также не является минимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012.
2. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. No. 9. P. 875–884.
3. *Harary F. and Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. V. 27. P. 19–23.
4. *Абросимов М.Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
5. *Каравай М. Ф.* Минимизированное вложение произвольных гамильтоновых графов в отказоустойчивый граф и реконфигурация при отказах. I // Автоматика и телемеханика. 2004. № 12. С. 159–178.
6. *Каравай М. Ф.* Минимизированное вложение произвольных гамильтоновых графов в отказоустойчивый граф и реконфигурация при отказах. II. Решетки и k-отказоустойчивость // Автоматика и телемеханика. 2005. № 2. С. 175–189.
7. *Камил И. А. К.* Вычислительный эксперимент по построению отказоустойчивых реализаций графов с числом вершин до 9 // Intern. J. Open Inform. Technol. 2020. V. 8. No. 9. P. 43–47.

УДК 519.1 DOI 10.17223/2226308X/14/37

ОБ АТТРАКТОРАХ В ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДВОИЧНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ДВУДОЛЬНЫМ ГРАФОМ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Р. И. Пантелеев, А. В. Жаркова

Рассматривается дискретная двоичная динамическая система (S_n, f), $n > 1$, состояниями которой являются все возможные двоичные векторы длины n, с эволюционной функцией вида $f = (x_n, 0, \ldots, 0, x_1)$ и двудольным графом зависимостей.

Приводится теорема, определяющая аттракторы, их вид и количество, в рассматриваемых системах.

Ключевые слова: *аттрактор, бассейн, граф, граф зависимостей, двудольный граф, дискретная двоичная динамическая система, эволюционная функция.*

Система, использующая модель безопасности с полным перекрытием, должна иметь, по крайней мере, одно средство для обеспечения безопасности на каждом возможном пути проникновения в систему. Множество отношений «объект-угроза» образует двудольный граф, в котором ребро (u, v) существует тогда и только тогда, когда u является средством получения доступа к объекту v. Графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг, занимают важное место в задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей. При изучении модельных графов можно применять идеи и методы теории конечных динамических систем. В данной работе рассматривается дискретная двоичная динамическая система с двудольным графом зависимостей. Важная проблема в теории конечных динамических систем состоит в том, чтобы связать структуру системы с её динамикой.

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ), где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*, $\delta : S \to S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*. Каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой орграф с множеством вершин S и дугами, проведёнными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контуры, в свою очередь, называются *предельными циклами*, или *аттракторами*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров без проведения динамики [1]. К их числу относятся аттракторы, их вид, количество. Например, в работе [2] подсчитано количество аттракторов в конечных динамических системах ориентаций полных графов. В данной работе определяется вид и количество аттракторов в одной дискретной двоичной динамической системе с двудольным графом зависимостей.

Рассмотрим, согласно [3], дискретную двоичную динамическую систему (S_n, f), $n > 1$, состояниями которой являются все возможные двоичные векторы длины n, с эволюционной функцией $f = (f_1, \ldots, f_n)$, где двоичные функции имеют вид

$$f_i = \alpha_i x_1^{\varepsilon_{1i}} \ldots x_n^{\varepsilon_{ni}},$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$ и $\varepsilon_{ji} \in \{0, 1\}$. Если $\alpha_i = 0$, то все $\varepsilon_{ji} = 0$.

С f ассоциируется ориентированный *граф зависимостей* X с множеством вершин $\{a_1, \ldots, a_n, \varepsilon\}$, в котором существует дуга из a_i в a_j, если $\alpha_i = 1$ и x_j — множитель f_i (то есть $\varepsilon_{ji} = 1$), а также существует дуга из a_i в ε, если $\alpha_i = 0$ (то есть $f_i = 0$).

В работе рассматриваются данные динамические системы с двудольными графами зависимостей и функциями вида $f = (x_n, 0, \ldots, 0, x_1)$, при $n = 2$ получаем $f = (x_n, x_1)$.

На рис. 1 изображена карта дискретной двоичной динамической системы (S_3, f) с эволюционной функцией $f = (x_3, 0, x_1)$ и её двудольный граф зависимостей.

В результате исследований сформулирована следующая

Теорема 1. Дискретная двоичная динамическая система (S_n, f), $n > 1$, с эволюционной функцией $f = (x_n, 0, \ldots, 0, x_1)$ имеет три бассейна и три аттрактора видов рис. 2, и только их.

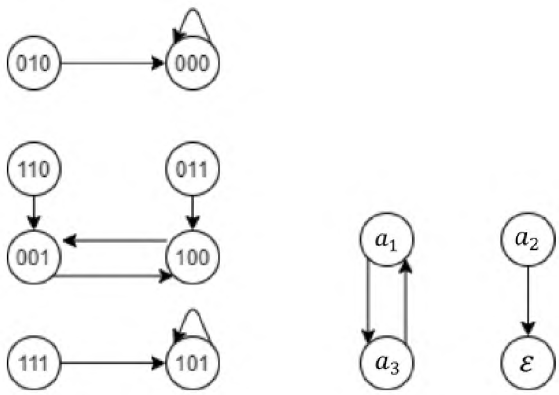

Рис. 1

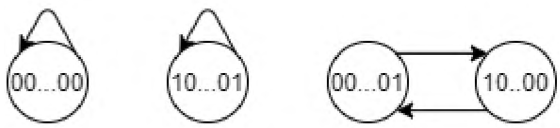

Рис. 2. Аттракторы

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жаркова А. В.* Индексы состояний в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. Вып. 4. С. 475–484.
2. *Жаркова А. В.* О количестве аттракторов в конечных динамических системах ориентаций полных графов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2018. №11. С. 106–109.
3. *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., and Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems // Ann. Combinatorics. 2004. V. 8. P. 425–439.

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/14/38

СХЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ 1-РАСШИРЕНИЙ ПОЛНЫХ ДВУХЦВЕТНЫХ ГРАФОВ[1]

П. В. Разумовский, М. Б. Абросимов

Рассматриваются двухцветные графы, то есть графы, вершины которых раскрашены в два цвета. Пусть $G = (V, \alpha, f)$ — цветной граф с определённой на множестве его вершин функцией раскраски f. Цветной граф G^* называется вершинным 1-расширением цветного графа G, если граф G можно вложить с учётом цветов в каждый граф, получающийся из графа G^* удалением любой его вершины вместе с инцидентными рёбрами. Вершинное 1-расширение G^* графа G называется минимальным, если граф G^* имеет на две вершины больше, чем граф G, а среди всех вершинных 1-расширений графа G с тем же числом вершин граф G^* имеет минимальное число рёбер. Предлагается полное описание минимальных вершинных 1-расширений полных двухцветных графов. Пусть K_{n_1,n_2} — полный n-вершинный граф с n_1 вершинами одного цвета и n_2 вершинами другого цвета. Если в полном

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках госзадания (проект №FSRR-2020-0006).