НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2020)

МАТЕРИАЛЫ
XIX Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
2–5 декабря 2020 г.

ТОМСК
«Издательство НТЛ»
2021

УДК 519
ББК 22.17
И74

И74 Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2020): Материалы XIX Международной конференции имени А. Ф. Терпугова (2–5 декабря 2020 г.). – Томск: Изд-во НТЛ, 2021. – 498 с.

ISBN 978-5-89503-647-1

Сборник содержит избранные материалы XIX Международной конференции имени А.Ф. Терпугова по следующим направлениям: теория массового обслуживания и ее приложения, интеллектуальный анализ данных и визуализация, информационные технологии и программная инженерия, математическое и компьютерное моделирование технологических процессов.

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519
ББК 22.17

Конференция проведена при поддержке международного научно-методического центра Томского государственного университета по математике, информатике и цифровым технологиям в рамках федерального проекта «Кадры для цифровой экономики» национальной программы «Цифровая экономика в Российской Федерации»

ISBN 978-5-89503-647-1

Асимптотическая оценка интенсивности сборки пуассоновских потоков

Гурами Цициашвили[1], Анатолий Назаров[2], Александр Моисеев[2]

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток, Россия,
Национальный исследовательский
[2] Томский государственный университет, Томск, Россия

Рассматривается сборка стационарных пуассоновских потоков событий. Под термином «сборка» понимается такой поток, события которого представляют собой события исходных потоков, «склеенных» по их порядковым номерам. Другими словами, события в сборке наступают в момент, когда наступает последнее из событий с соответсвующим порядковым номером среди всех потоков. Подобные модели могут применяться для анализа компьютерных сетей, производственных линий и других систем [1, 2].

В [3] показано, что средняя интенсивность такого потока при растущем времени наблюдения ($t \to \infty$) стремится к наименьшей из интенсивностей исходных потоков. Однако вычислительные эксперименты, проведенные с помощью аппроксимации пуассоновского распределения с большим параметром нормальным распределением, показали, что имеется возможность улучшения построенных оценок скорости сходимости.

Настоящая работа посвящена получению в некотором смысле неулучшаемых оценок скорости сходимости интенсивности потока сборки. Анализ проблемы показывает, что при решении данной задачи следует сочетать аналитические и численные оценки, постоянно сравнивая их друг с другом. Причем важную роль здесь играет центральная предельная теорема, принимаемая в смысле C-сходимости [4].

Для сокращения объема текста все доказательства и некоторые вспомогательные утверждения в данной статье опущены.

Математическая модель и постановка задачи

Пусть имеется r независимых друг от друга стационарных пуассоновских потоков событий, которые будем называть исходными потоками. Интенсивности этих потоков равны $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Обозначим $t_{k,i}$ – момент наступления i-го события в k-м исходном потоке $T_k = \{0 \le t_{k,1} \le t_{k,2} \le \ldots\}$ ($i = 1, 2, \ldots; k = 1, \ldots, r$). Сборкой потоков $T_1, \ldots, T_r$ (или потоком сборки) называется поток событий

$$A_r = \{0 \le \max(t_{1,1}, \ldots, t_{r,1}) \le \max(t_{1,2}, \ldots, t_{r,2}), \ldots\}.$$

Обозначим $n_k(t)$, $t \ge 0$ – число событий, наступивших в k-м исходном потоке до момента t. Тогда число событий $N_r(t)$, наступивших в потоке сборки до момента времени t, можно записать как

$$N_r(t) = \min_{k=1,\ldots,r} n_k(t).$$

Следует заметить, что по очевидным причинам рассматриваемый поток сборки не является пуассоновским, что затрудняет его исследование.

Центральная предельная теорема для потока сборки

Пусть существует некоторое число s потоков с одинаковой наименьшей интенсивностью:

$$\lambda = \lambda_1 = \ldots = \lambda_s < \lambda_{s+1} \le \ldots \le \lambda_r.$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Для любого v: $-\infty < v < \infty$, справедливо предельное соотношение

$$\mathrm{P}\left\{\frac{N_r(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} > v\right\} \to \left[\int_v^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-u^2/2\right) du\right]^s, \ t \to \infty.$$

Замечание 1. Случайный процесс $\dfrac{n_k(tu) - \lambda tu}{\sqrt{\lambda t}}$ как функция неотрицательной переменной u при $t \to \infty$ сходится к винеровскому случайному процессу $w_k(u)$, $k = 1, \ldots, s$ в смысле C-сходимости [4].

Замечание 2. Пусть $r = s$, тогда случайный процесс $\dfrac{N_r(tu) - \lambda tu}{\sqrt{\lambda t}}$ при $t \to \infty$ сходится к винеровскому случайному процессу $\min\limits_{k=1,\ldots,r} w_k(u)$ в смысле C-сходимости, где $w_1(u), \ldots, w_r(u)$, $u \ge 0$ – независимые винеровские процессы.

Предельные соотношения для интенсивности сборки потоков с одинаковой интенсивностью

Пусть все исходные потоки имеют одинаковую интенсивность (случай $s = r$). Рассмотрим марковский процесс $\{n_1(t), \ldots, n_r(t)\}$. Скачок этого процесса в момент времени t из состояния $(n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_r)$, в котором $n_i < \min\limits_{k \neq i} n_k$, в состояние $(n_1, \ldots, n_i + 1, \ldots, n_r)$ приводит к появлению в этот момент времени события у потока сборки. Следовательно, мгновенная интенсивность потока сборки $\overline{\lambda}(t)$ удовлетворяет равенству

$$\overline{\lambda}(t) = \lambda \sum_{i=1}^{r} \mathrm{P}\left\{ n_i(t) < \min_{k \neq i} n_k(t) \right\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$a = \lambda t, \quad p(k,a) = \frac{e^{-a} a^k}{k!}, \; k = 0,1,\ldots,$$

$$f(a) = \mathrm{P}\{n_1(t) = \ldots = n_r(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} p^r(k,a).$$

Лемма 1. Выполняется следующее равенство:

$$\overline{\lambda}(t) = \lambda\left(1 - \mathrm{P}\{n_1(t) = \ldots = n_r(t)\}\right) = \lambda\left(1 - f(a)\right). \tag{1}$$

Аппроксимацию $g(a)$ функции $f(a)$ будем искать в виде

$$g(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2a} \right) \right]^r dx = \frac{1}{\sqrt{r}} (2\pi a)^{(1-r)/2}.$$

Запишем основные результаты исследования.

Теорема 2. Для $\lambda > 0$, $r > 2$ и $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{2}{3}$ справедливо следующее предельное выражение:

$$f(a) = g(a)\left(1 + O(a^{3\gamma - 2})\right) \sim g(a), \;\; a \to \infty, \tag{2}$$

и, следовательно, $\lambda(t) \to \lambda$: $\lambda(t) - \lambda \sim \lambda \dfrac{(2\pi\lambda t)^{(1-r)/2}}{\sqrt{r}}$, $t \to \infty$.

Замечание 3. Приведем результаты численного эксперимента, иллюстрирующего точность полученной аппроксимации (2). Обозначим погрешность $\Delta(a) = \left| \dfrac{f(a) - g(a)}{f(a)} \right|$. Ее значения для различных возрастающих a при разных значениях числа потоков в сборке представлены в табл. 1. Как видно из таблицы, погрешность $\Delta(a)$ аппроксимации (2) уменьшается с ростом числа событий в исходных потоках $a = \lambda t$ для разного их числа r, что косвенно подтверждает полученные выражения.

Т а б л и ц а 1

Уменьшение погрешности аппроксимации Δ(*a*) при возрастании *a* для разных *r*

r \ a	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
2	$6.4{\cdot}10^{-3}$	$6.3{\cdot}10^{-4}$	$6.3{\cdot}10^{-5}$	$6.3{\cdot}10^{-6}$	$6.2{\cdot}10^{-7}$	$6.2{\cdot}10^{-8}$
5	$2.0{\cdot}10^{-2}$	$2.0{\cdot}10^{-3}$	$2.0{\cdot}10^{-4}$	$2.0{\cdot}10^{-5}$	$2.0{\cdot}10^{-6}$	$2.0{\cdot}10^{-7}$
20	$8.3{\cdot}10^{-2}$	$8.3{\cdot}10^{-3}$	$8.3{\cdot}10^{-4}$	$8.3{\cdot}10^{-5}$	$8.3{\cdot}10^{-6}$	$8.2{\cdot}10^{-7}$

Сборка потоков с разной интенсивностью

Рассмотрим случай двух независимых стационарных пуассоновских потоков с разными интенсивностями λ_1 и λ_2, при этом будем считать, что $\lambda_1 < \lambda_2$. Обозначим

$$d = \lambda_2 t,\ c = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1\ \ (cd = \lambda_1 t).$$

По аналогии с формулой (1) имеем

$$\begin{aligned}\overline{\lambda}(t) &= \lambda_1 \,\mathrm{P}\{n_2(t) > n_1(t)\} + \lambda_2 \,\mathrm{P}\{n_1(t) > n_2(t)\} = \\ &= \lambda_1 - \lambda_1 \,\mathrm{P}\{n_1(t) \ge n_2(t)\} + \lambda_2 \,\mathrm{P}\{n_1(t) > n_2(t)\},\end{aligned}$$

следовательно,

$$\left|\overline{\lambda}(t) - \lambda_1\right| \le \lambda_2 \,\mathrm{P}\{n_1(t) \ge n_2(t)\},$$

где
$$\mathrm{P}\{n_1(t) \ge n_2(t)\} = G(d) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-d} \frac{d^k}{k!} \sum_{i=k}^{\infty} e^{-cd} \frac{(cd)^i}{i!}.$$

Будем называть положительные функции $p(d)$ и $q(d)$ удовлетворяющими соотношению $p(d) \precsim q(d)$ при $d \to \infty$, если $\limsup\limits_{d\to\infty} \dfrac{p(d)}{q(d)} < \infty$.

Теорема 3. Для любого c: $0 < c < 1$, справедливо соотношение

$$d^{-1} \exp(-d\alpha(c))\,G(d) \le d^{1/2} \exp(-d\alpha(c)), \tag{3}$$

и, следовательно, $\lambda(t) \to \lambda$: $\lambda(t) - \lambda = G(-\lambda_2 t)$, $t \to \infty$. Здесь множитель

$\alpha(c)$ вычиляется по формуле

$$\alpha(c) = 1 - s^*(c)(1 - \ln s^*(c)),\ \text{где}\ s^*(c) = -\frac{1-c}{\ln c}.$$

Замечание 4. В Замечании 3 мы оценивали вероятность $P\{n_1(t) = \ldots = n_r(t)\}$, используя для распределения Пуассона с большим параметром гауссовскую аппроксимацию. Показано, что данная аппроксимация дает результаты близкие к аналитическим. Рассмотрим теперь, как такая аппроксимация работает при оценке вероятности $P\{n_1(t) \geq n_2(t)\}$. Для этого запишем следуюшие аппроксимации для случайных величин $n_1(t)$ и $n_2(t)$:

$$n_1(t) \approx \sqrt{cd}\,\xi_1 + cd\,,\ n_2(t) \approx \sqrt{d}\,\xi_2 + d\,,$$

где ξ_1 и ξ_2 – независимые стандартные нормальные случайные величины. Тогда необходимую гауссовскую аппроксимацию (при больших d) мы можем построить следующим образом:

$$P\{n_1(t) \geq n_2(t)\} \approx P\left\{\sqrt{cd}\,\xi_1 + cd \geq \sqrt{d}\,\xi_2 + d\right\} =$$
$$= P\left\{\xi_2 \leq \sqrt{c}\,\xi_1 + \sqrt{d}\,(c-1)\right\} = S(d).$$

Обозначим $h = (c-1)\sqrt{\dfrac{d}{c+1}}$ и η – стандартная нормальная случайная величина. Так как (ξ_1, ξ_2) – двумерный гауссовский случайный вектор с нулевыми средними и единичной матрицей ковариации, то, применяя известную формулу

$$P\{\eta > R\} \sim \frac{1}{R\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{R^2}{2}\right),\ \ R \to \infty\,,$$

мы можем получить следующее соотношение:

$$P\{n_1(t) \geq n_2(t)\} \approx \frac{1}{h\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{h^2}{2}\right) = \frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{2\pi d}\,(c-1)}\exp\left(-d\,\frac{(c-1)^2}{2(c+1)}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{2\pi d}\,(c-1)}\exp\left(-dA(c)\right) = S(d)\ \text{при}\ d \to \infty, \qquad (4)$$

где $$A(c) = \frac{(c-1)^2}{2(c+1)}.$$

Сравним теперь множители $\alpha(c)$ и $A(c)$ в экспонентах формул (3) и (4). Для $c = 5/6$ имеем $\alpha(c) \approx 0.0038$, $A(c) \approx 0.0076$; для $c = 2/3$ – $\alpha(c) \approx 0.0168$, $A(c) \approx 0.0333$. Таким образом, множитель $A(c)$, вычисленный с помощью гауссовской аппроксимации, больше $\alpha(c)$, вычисленного аналитически.

Обозначим погрешность $\delta(d) = \left|\dfrac{G(d) - S(d)}{G(d)}\right|$ и оценим точность гауссовской аппроксимации при $c = 5 / 6$ и $c = 2 / 3$. Соответсвующие результаты приведены в табл. 2 и 3. Из них видно, что при $c = 5/6$ с ростом d погрешность уменьшается, однако с увеличением d скорость ее убывания сильно падает. При $c = 2/3$ с ростом d функция $\delta(d)$ начинает расти. Таким образом, результаты, представленные в табл. 2 и 3, свидетельствуют о значительно худшем качестве гауссовской аппроксимации, чем для результатов, представленных в табл. 1.

Таблица 2

Изменение погрешности аппроксимации $\delta(d)$ с ростом d для случая $c = 5 / 6$

d	100	200	500	1000	2000
$\delta(d)$	0.267	0.143	0.051	0.021	0.018

Таблица 3

Изменение погрешности аппроксимации $\delta(d)$ с ростом d для случая $c = 2 / 3$

d	10	50	100	200	500
$\delta(d)$	0.321	0.059	0.029	0.047	0.192

Замечание 5. Используя полученные результаты, несложно рассмотреть случай сборки потоков с интенсивностями

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_s < \lambda_{s+1} \le \ldots \le \lambda_r$$

и получить неравенство

$$\left|\bar{\lambda}(t) - \lambda_1\right| \le \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i \, \mathrm{P}\{n_1(t) \ge n_i(t)\}.$$

Заключение

Различные варианты центральной предельной теоремы для сборки получены как в терминах случайных величин, так и в терминах случайных процессов. Получены точные асимптотические формулы для интенсивности сборки идентичных пуассоновских потоков и для случая исходных потоков с разными интенсивностями. Выполнена оценка скорости их сходимости для обоих случаев. Несмотря на кажущуюся простоту рассматриваемой задачи исследования сборки независимых стационарных пуассоновских потоков, результаты исследования показали, что построенная модель достаточно сложна и требует тщательного подхода к ее анализу. При этом в обязательном порядке должен проводиться численный анализ получаемых результатов, так как не во всех случаях построенные аппроксимации позволяют обеспечить приемлемую погрешность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горбунова А.В.*, *Зарядов И.С.*, *Самуйлов К.Е.*, *Сопин Э.С.* Обзор систем параллельной обработки заявок. Часть I // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. 2017. Т. 25. № 4. С. 345–357.
2. *Горбунова А.В.*, *Зарядов И.С.*, *Самуйлов К.Е.* Обзор систем параллельной обработки заявок. Часть II // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. 2018. Т. 26. № 1. С. 13–27.
3. *Цициашвили Г.Ш.*, *Осипова М.А.* Исследование процесса сборки пуассоновских потоков // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 3. С. 51–56.
4. *Боровков А.А.*, *Могульский А.А.*, *Саханенко А.И.* Пределеные теоремы для случайных процессов // Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1995. Т. 82. С. 5–197.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

QUEUING THEORY AND APPLICATION

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ПРОГРАММНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ

INFORMATION TECHNOLOGIES AND SOFTWARE ENGINEERING

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING OF TECHNOLOGICAL PROCESSES

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ

INTELLIGENT DATA ANALYSIS AND VISUALIZATION

Научное издание

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2020)

МАТЕРИАЛЫ XIX Международной конференции имени А. Ф. Терпугова 2–5 декабря 2020 г.

Редактор *Т.С. Портнова*

Дизайн, верстка *Д.В. Фортеса*

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634034, г. Томск, ул. Студенческая, 4, тел. (3822) 53-10-35

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 24.02.2021.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 28.95. Уч.-изд. л. 32.42. Тираж 100 экз. Заказ № 4.
