

ВСЕ ГРАНИ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Сборник статей Всероссийской молодежной научной конференции

Томск, 12–15 мая 2020 г.



ТОМСК «Издательство НТЛ» 2020

УДК 51 ББК 22 В841

Все грани математики и механики: сборник статей Всероссийской молодежной научной конференции (Томск, 12–15 мая 2020 г.) / под ред. Л.В. Гензе. – Томск: Изд-во НТЛ, 2020. – 140 с.

ISBN 978-5-89503-643-3

В сборнике представлены статьи, посвященные актуальным проблемам математики и механики, а также современным подходам и методам решения фундаментальных и прикладных задач. Для студентов, аспирантов, молодых ученых.

УДК 51 ББК 22

Организаторы:

Национальный исследовательский Томский государственный университет; механико-математический факультет НИ ТГУ; Региональный научно-образовательный математический центр (НОМЦ) НИ ТГУ.

Редакционная коллегия:

Гензе Л.В., к.ф.-м.н., декан ММФ ТГУ; Старченко А.В., д.ф.-м.н., зав. кафедрой ВМиКМ ММФ ТГУ; Касымов Д.П., к.ф.-м.н., доцент ММФ ТГУ.

Организационный комитет конференции:

Касымов Д.П., председатель оргкомитета, к.ф.-м.н., доцент, зам. декана ММФ; Барт А.А., доцент ММФ, к.ф.-м.н.; Гурина Е.И., доцент ММФ, к.ф.-м.н.; Голубничий Е.Н., ответственный секретарь оргкомитета; Тараканова В.А., аспирантка ММФ; Мартынов П.С., аспирант ММФ; Бердалиева М.А., студентка ММФ; Орлов К.Е., студент ММФ.

ISBN 978-5-89503-643-3

© ООО «Издательство НТЛ», 2020

Математическое моделирование переноса примеси в уличном каньоне^{*}

Д.В. Лещинский

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Исследованы структура течения и характер распространения примеси в идеализированном уличном каньоне. Проведено исследование сеточной сходимости, по результатам которого было выбрано оптимальное сеточное покрытие рассматриваемой области. Посчитаны максимальные и средние концентрации примеси в зоне дыхания и в каньоне в целом.

Ключевые слова: математическое моделирование, турбулентное течение, уличный каньон, перенос примеси.

Вопросы экологии являются наиболее актуальными в современной реальности. Процесс урбанизации и ускорение технологического прогресса приводят к повышенным темпам роста загрязнения атмосферного воздуха над городами, что отрицательно воздействует на окружающую среду и здоровье человека.

В данной работе на основе разрабатываемой оригинальной микромасштабной математической модели M2U [1] проведено математическое моделирование процесса переноса примеси в уличном каньоне. Источник примеси представляет собой точечный источник вредных выбросов постоянной интенсивности. Размеры зданий соизмеримы с размерами области исследования. Экспериментальным путем проведено исследование сеточной сходимости, по результатам которого было определено оптимальное сеточное покрытие исследуемой области. Посчитаны максимальные, минимальные и средние концентрации примеси в зоне дыхания (до 2 м от земли) и в каньоне в целом.

Физико-математическая постановка задачи

Рассматривается стационарное турбулентное движение в приземном слое воздуха над неоднородной подстилающей поверхностью с элемен-

[™] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-02-2020-1479/1.

тами крупномасштабной шероховатости, которые представляют собой здания (рис. 1).



Рис. 1. Иллюстрация физической постановки задачи

Математическая модель включает в себя осредненные по Рейнольдсу уравнения неразрывности, уравнения Навье – Стокса, переноса примеси [2, 3] и теплообмена:

$$\begin{split} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} &= 0,\\ \frac{\partial \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} + gi \frac{(\overline{T} - T_0)}{T_0},\\ \frac{\partial \overline{T} \overline{u}_j}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{T' u'_j}}{\partial x_j},\\ \frac{\partial \overline{C} \overline{u}_j}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{C' u'_j}}{\partial x_j} + S, \ i, j = 1, 2, 3. \end{split}$$

Здесь, \overline{u}_i , u'_j – осредненные и пульсационные проекции вектора скорости на оси координат; \overline{p} – давление; ρ – плотность; ν – кинемати-

ческая вязкость воздуха; \overline{T} – осредненная температура; \overline{C} – осредненное значение концентрации примеси; S – функция, описывающая распределение точечных и линейных источников примеси; $\overline{u'_iu'_j}$ – тензор напряжений Рейнольдса; a, D – температуропроводность и коэффициент диффузии; $g_i(0,0,g)$ – компоненты ускорения свободного падения.

Замыкание описанной системы уравнений проводится с использованием градиентно-диффузионной гипотезы Буссинеска [2]:

$$\overline{u'_{i}u'_{j}} = -v_{T} \left(\frac{\partial \overline{u}_{i}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial \overline{u}_{j}}{\partial x_{i}} \right) + \frac{2}{3}k\delta_{ij},$$
$$\overline{T'u'_{j}} = -\frac{v_{T}}{Pr_{T}}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_{j}},$$
$$\overline{C'u'_{j}} = -\frac{v_{T}}{Sc_{T}}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_{j}}.$$

Для вычисления турбулентной вязкости используется двухпараметрическая $k - \varepsilon$ -модель турбулентности, учитывающая влияние сил плавучести [4]:

$$\mathbf{v}_{T} = C_{\mu} \frac{k^{2}}{\varepsilon},$$

$$\frac{\partial k \overline{u}_{j}}{\partial x_{j}} = \frac{\partial}{\partial x_{j}} \left(\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_{T}}{\sigma_{k}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_{j}} \right) + P + G - \varepsilon,$$

$$\frac{\partial \varepsilon \overline{u}_{j}}{\partial x_{j}} = \frac{\partial}{\partial x_{j}} \left(\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_{T}}{\sigma_{z}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{j}} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P + C_{\varepsilon 3} G) - -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^{2}}{k},$$

$$P = -\overline{u'_{i} u'_{j}} \frac{\partial \overline{u}_{i}}{\partial x_{j}}, \quad G = \beta g_{j} \frac{\mathbf{v}_{T}}{P r_{T}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_{j}},$$

где v_T – турбулентная вязкость, k – кинетическая энергия турбулентности, ε – диссипация турбулентной кинетической энергии. Коэффициенты модели турбулентности $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_z = 1.22$, $C_{\varepsilon 1} = 1.44$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, $C_{\varepsilon 3} = \tanh(|u_2|/|u_1|)$, $C_{\mu} = 0.09$, $Sc_T = 0.5$, $Pr_T = 0.9$.

Для задания значений скорости, турбулентных параметров, трения и теплового потока вблизи твердой поверхности используется метод пристеночных функций [5]. В модели не учитывается осаждение примеси на стенах, крышах и подстилающей поверхности, поэтому на границах производные от концентрации по нормали к поверхности задаются равными нулю. Краевые условия на выходе потока из расчетной области и на открытой верхней границе – это равенство нулю производных по нормали. При задании граничных условий на входе используются равномерные профили скорости k, ε , \overline{T} , \overline{C} .

При расчете течений вокруг зданий использовался метод фиктивных областей, суть которого заключается в том, что значения векторных и скалярных величин в области преграды равны нулю и на границах фиктивных конечных объемах нет потоков диффузии [2].

Аппроксимация дифференциальной задачи и численный метод решения

Дискретизация дифференциальной задачи выполнена методом конечного объема на структурированной декартовой сетке. Аппроксимация конвективных членов уравнений переноса выполняется с использованием противопотоковой схемы MLU Ван Лира [6]. Аппроксимация диффузионных членов осуществляется с использованием центральноразностной схемы второго порядка. Результатом дискретизации является разностная схема второго порядка аппроксимации по пространству. Для согласования полей скорости и давления использовался метод SIMPLE [7]. Разработана итерационная вычислительная процедура для согласования поля скорости и давления и последовательного решения систем сеточных уравнений – неявных дискретных аналогов адвективно-диффузионных уравнений нелинейной задачи на основе метода неполной факторизации Булеева. Более подробное описание аппроксимации и численного метода решения на примере двумерной задачи представлено в работе [2, 3].

Исследование сеточной сходимости

При моделировании течения геометрические характеристики уличного каньона, высота (H) и ширина (W) принимались 20 м, а глубина (L) 30 м. Моделирование течения проводилось на неравномерной сетке, построенной путем сгущения сеточных элементов в приграничных областях, а также в областях, где наблюдалась сложная структура течения.

Экспериментальным путем было выбрано оптимальное сеточное покрытие, которое достаточно точно описывает структуру течения и не требует высоких производительных мощностей.

При исследовании сеточной сходимости за основу было выбрано сеточное покрытие, состоящее из набора конечных элементов, покрывающих область вне каньона в соотношении: 1 конечный элемент к 1 м. и имеющее сгущение в области каньона в соотношении: 2 к 1. Далее это покрытие сгущалось в два раза во всех областях соответственно либо разрежалось в два раза. Таким образом было построено 3 варианта сеточного покрытия с условными названиями: S (Standard), E (Enlarged) и R (Reduced). На основе этих трех вариантов было составлено оптимальное сеточное покрытие I (Improved), которое показало наилучший результат по соотношению точности моделирования ко времени проведения расчетов. Данное покрытие имело сгущение до 2 конечных элементов на 1 м каньона и в области 10 м в каждую сторону от границы каньона. У стен уличного каньона и крыш зданий строилась полоса из 5 ячеек с размером 0.1 м в направлении по нормали к поверхности. Последнее сделано для попадания безразмерной величины v+ в рекомендуемый диапазон от 30 до 300.

Для всех вариантов сеточных покрытий проводилось моделирование до получения установившегося решения. Контроль получения установившегося решения выполнялся по наблюдению значений горизонтальной и вертикальной компонент скорости и давления в центре каньона (рис. 2). Установление турбулентного течения в каньоне наблюдается после 2000 итераций.



Рис. 2. Сходимость итерационного процесса

На рис. 3 (слева) представлен график изменения значения горизонтальной компоненты скорости вдоль горизонтальной линии, соединяющей крыши зданий, образующих уличный каньон. На рис. 3 (справа) представлен график изменения горизонтальной компоненты скорости вдоль по вертикальной линии от центра каньона до высоты в 30 м.



Рис. 3. Выбор сеточного разрешения

Моделирование течения и проведение параметрических расчетов

Расчеты проводились на описанной выше структурированной декартовой сетке $110 \times 62 \times 100$ по осям Ox, Oy и Oz соответственно. Источник поступления примеси постоянной интенсивности располагался в центре уличного каньона вблизи поверхности. Значение вязкости среды принято $v = 15 \cdot 10^{-6}$ м²/с, что соответствует вязкости воздуха при 20 °C. Граничные условия задавались следующим образом: на входной границе горизонтальная скорость $U_{in} = 1$ м/с; на выходной границе равенство нулю нормальных производных скорости; на верхней стенке – условия скольжения. Начальные условия: продольная скорость равна скорости на входе (1 м/с), а вертикальная скорость и давление равны нулю.

На рис. 4 как результат моделирования представлено векторное поле скорости и контурное поле концентраций. Как видно из векторного поля скорости, поток ветра, проходя над каньоном, воздействует на воздушные массы внутри каньона, приводя их в движения. Таким образом, образуется один большой вихрь внутри каньона, который, в свою очередь, воздействует на источник примеси, приводя примесь в движение. Тем самым начинается процесс выветривания.

Данные о концентрациях, полученные в ходе моделирования, представлены в таблице. Зона дыхания – это зона до 2 м от дна каньона. Из представленных данных видно, что концентрации внутри каньона на порядок выше, чем в каньоне в целом. Это обусловлено тем, что процесс выветривания недостаточно эффективен для данного каньона.

		_		
Максимальная	Минимальная концентрация		Средняя концентрация	
концентрация	Зона дыхания	Каньон	Зона дыхания	Каньон
1.334	0.0000471	0.0000255	0.0009761	0.0003171





на фоне изолиний концентрации примеси

Верификация построенной математической модели

На рис. 5 представлены результаты сравнения рассчитанных нормированных значений концентрации примеси вблизи наветренной и подветренной вертикальных стенок каньона с измерениями Хойдыша и Дэбберти, выполненными в ветровом туннеле [8]. Из рисунка видно, что результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.



Рис. 5. Рассчитанные и измеренные [8] вертикальные профили нормированной концентрации примеси у наветренной (слева) и подветренной (справа) сторон каньона

Заключение

Представлена микромасштабная модель турбулентного движения воздуха и переноса примеси в уличном каньоне. Проведено исследование сеточной сходимости для нахождения оптимального сеточного покрытия. Выполнена верификация разработанной модели на известных экспериментальных данных для переноса примеси при стационарном изотермическом турбулентном пространственном течении в каньоне. Представлены векторное поле скорости и контурное поле концентраций, визуально показывающее структуру течения в рассмотренном уличном каньоне. В дальнейшем планируется исследование структуры течения и характера распространения примеси в уличных каньонах разной геометрии и в зависимости от степени нагрева стен, образующих уличный каньон.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Nuterman R., Starchenko A., Baklanov A. Numerical model of urban aerodynamics and pollution dispersion // Int. J. Environment and Pollution. 2011. V. 44. No. 1–4. P. 385–393.
- 2. Старченко А.В., Нутерман Р.Б., Данилкин Е.А. Численное моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличных каньонах. Томск: Изд. дом Томского гос. ун-та, 2015. 252 с.
- Данилкин Е.А., Старченко А.В. Моделирование распространения выбросов автомобильного транспорта в уличном каньоне // Вычислительные технологии. 2020. Т. 25. № 2. С. 4–21.
- Henkes R. A.W.M., Van Der Flugt F. F., Hoogendoorn C. J. Natural convection flow in a square cavity calculated with low-Reynolds-number turbulence models // Int. J. Heat Mass Transfer. 1991. V. 34. P. 1543–1557.
- Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. V. 3. No. 2. P. 269– 289.
- Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme: II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme // J. Computational Physics. 1974. V. 14. P. 361–370.
- 7. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984. 149 с.
- 8. *Hoydysh W.G., Dabberdt W.F.* Kinematics and dispersion characteristics of flows in asymmetric street canyons // Atmospheric Environment. 1988. V. 22. P. 2677–2689.

Лещинский Дмитрий Викторович, мл. науч. сотр. РМЦ ТГУ; 360flip182@gmail.com