МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

Международной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 28–30 мая 2020 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательство Томского государственного университета
2020

ББК 22.17–22.19
УДК 519.2, 519.7, 519.8
Т78

Т78 Труды Томского государственного университета. – Т. 305. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы Международной научной конференции. Томск, 28–30 мая 2020 г. / под общ. ред. И.С. Шмырина. – Томск : Издательство Томского государственного университета, 2020. – 322 с.

ISBN 978-5-94621-970-9

Сборник содержит материалы Международной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», проводившейся 28–30 мая 2020 г. на базе Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. Материалы сгруппированы в соответствии с работавшими на конференции секциями.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов.

УДК 539.3.004
ББК 22,25.22.251.22.62

ISBN 978-5-94621-970-9

2. *Falin G.I., Artalejo J.R., Martin M.* On the single server retrial queue with priority customers // Queueing Systems. 1993. V. 14. P. 439-455.
3. *Artalejo J.R., Phung-Duc T.* Markovian retrial queues with two way communication // Journal of Industrial & Management Optimization. – 2012. – Vol. 8, no. 4. – P. 781–806.
4. *Phung-Duc Tuan, Rogiest Wouter.* Two way communication retrial queues with balanced call blending // International Conference on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications / Springer. – 2012. – P. 16–31.
5. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ. 2006. – 117 с.
6. *Nazarov A., Paul S., Lizyura O.* Heavy outgoing call asymptotics for retrial queue with two way communication and multiple types of outgoing calls //Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2019. Vol. 27, № 1. P. 5-20.

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И НЕОРДИНАРНЫМ ПУАССОНОВСКИМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ

Назаров А.А.[1], Рожкова С.В.[1,2], Титаренко Е.Ю.[1,2]
[1]*Томский государственный университет*
[2]*Томский политехнический университет*
nazarov.tsu@gmail.com, rozhkova@tpu.ru, teu@tpu.ru

Введение

Системы массового обслуживания с повторными вызовами (RQ-системы) широко используются в различных областях. В таких системах запрос, поступивший в систему и заставший прибор занятым, покидает систему на некоторое случайное время (уходит на орбиту), а затем повторяет попытку попасть на обслуживание [1,2].

На практике довольно часто встречаются СМО, в которых уже получившая обслуживание заявка требует повторного сервиса в зависимости от качества полученного обслуживания, внешних факторов и т.д. Подобные ситуации имеют место в мультиагентных системах, где получившая удовлетворительное обслуживание заявка требует повторного сервиса у этого же агента. Функционирование таких систем достаточно точно описывается СМО с обратной связью [3,4]. Среди моделей обратной связи выделяют два типа: мгновенная и отсроченная. В первом случае некоторые заявки после первичного обслуживания мгновенно возвращаются на повторное, во втором случае заявки, прежде чем поступить на повторное обслуживание, ожидают на орбите.

В данной работе исследуется одноканальная RQ-система массового обслуживания с экспоненциальным обслуживанием, неординарным пуассоновским входящим потоком, с мгновенной и отсроченной обратной связью.

1. Постановка задачи

Рассмотрим RQ-систему массового обслуживания $M^n/M/1$ (рис. 1), на вход которой поступает пуассоновский неординарный поток заявок с параметром λ и заданными вероятностями q_ν появления ν заявок в группе, при этом $\nu > 1$, $q_0 = 0$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu = 1$. Если обслуживающий прибор свободен, то одна заявка из группы поступает на обслуживание, остальные переходят на орбиту, туда же попадают заявки, поступившие в момент, когда прибор занят. Продолжительность обслуживания заявки имеет экспоненциальное распределение с параметром μ.

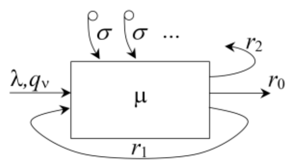

Рис. 1. Система массового обслуживания $M^n/M/1$ с обратной связью

После обслуживания заявка с вероятностью r_0 покидает систему, с вероятностью r_1 мгновенно поступает на повторное обслуживание, с вероятностью r_2 переходит на орбиту. Очевидно, что $r_0 + r_1 + r_2 = 1$. На орбите заявки ожидают повторного обслуживания в течение времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром σ, после чего повторяют попытку занять прибор. В случае неудачной попытки заявки остаются на орбите.

Обозначим $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t. Т.к. полученный случайных процесс $\{i(t)\}$ немарковский, то марковизируем его, введя дополнительную переменную $n(t)$, которая определяет состояние прибора следующим образом:

$$n(t) = \begin{cases} 0, \text{если прибор свободен;} \\ 1, \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Тогда двумерный процесс $\{i(t), n(t)\}$ будет марковским. Ставится задача исследования числа заявок на орбите в момент времени t.

2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Обозначим $P_n(i,t) = P\{i(t) = i, n(t) = n\}$, $n = 0,1$, $i = 0,1,2\ldots$, тогда для распределения вероятностей получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma)P_0(i,t) + \mu r_0 P_1(i,t) + \mu r_2 P_1(i-1,t),$$

$$\frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} = (i+1)\sigma P_0(i+1,t) + (\mu r_1 - \mu - \lambda)P_1(i,t) + \sum_{\nu=1}^{i+1}\lambda q_\nu P_0(i-\nu+1,t) + \sum_{\nu=1}^{i}\lambda q_\nu P_1(i-\nu,t).$$

Для стационарного распределения вероятностей $P_n(i) \equiv P_n(i,t)$ перепишем систему в виде

$$\begin{aligned} &-(\lambda + i\sigma)P_0(i) + \mu r_0 P_1(i) + \mu r_2 P_1(i-1) = 0, \\ &(i+1)\sigma P_0(i+1) + (\mu r_1 - \mu - \lambda)P_1(i) + \sum_{\nu=1}^{i+1}\lambda q_\nu P_0(i-\nu+1) + \sum_{\nu=1}^{i}\lambda q_\nu P_1(i-\nu) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

3. Решение системы методом характеристической функции

Введем частичные характеристические функции числа заявок на орбите $H_n(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui}P_n(i)$ и характеристическую функцию числа заявок в группе $h(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{ju\nu}q_\nu$, где $j = \sqrt{-1}$, и, учитывая, что

$$\frac{\partial H_n(u)}{\partial u} = \sum_{i=0}^{\infty} ij e^{jui}P_n(i),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{i} q_\nu e^{jui}P_1(i-\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu e^{ju\nu}\sum_{i=0}^{\infty} e^{jui}P_1(i) = h(u)H_1(u),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{i+1} q_\nu e^{jui}P_0(i-\nu+1) = e^{-ju}\sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu e^{ju\nu}\sum_{i=0}^{\infty} e^{jui}P_0(i) = e^{-ju}h(u)H_0(u),$$

преобразуем систему (1) к виду

$$
\begin{aligned}
&-\lambda H_0(u)+\mu r_0 H_1(u)+\mu r_2 e^{ju} H_1(u)-\frac{\sigma}{j}\frac{\partial H_0(u)}{\partial u}=0,\\
&\left(\mu r_1-\mu-\lambda\right)H_1(u)+\frac{\sigma}{j}e^{-ju}\frac{\partial H_0(u)}{\partial u}+\lambda e^{-ju}h(u)H_0(u)+\lambda h(u)H_1(u)=0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Данную систему можно решить аналитически. Для этого выразим $H_1(u)$ через $H_0(u)$: $H_1(u)=\dfrac{\lambda(h(u)-1)H_0(u)}{\mu r_0\left(e^{ju}-1\right)-\lambda e^{ju}(h(u)-1)}$, и подставив $H_1(u)$ в первое уравнение системы (2), получим

$$
\left(\frac{\lambda\left(\mu r_0+\mu r_2 e^{ju}\right)(h(u)-1)}{\mu r_0\left(e^{ju}-1\right)-\lambda e^{ju}(h(u)-1)}-\lambda\right)H_0(u)-\frac{\sigma}{j}\frac{\partial H_0(u)}{\partial u}=0 .
$$

Решением этого дифференциального уравнения будет функция

$$
H_0(u)=R_0\exp\left\{\frac{\lambda j}{\sigma}\int_0^u\frac{e^{ju}(h(u)-1)\left(\lambda+\mu r_2\right)+\mu r_0\left(h(u)-e^{ju}\right)}{\mu r_0\left(e^{ju}-1\right)-\lambda e^{ju}(h(u)-1)}du\right\},
$$

где R_0 – некоторая константа, для нахождения которой запишем характеристическую функцию

$$
\begin{aligned}
H(u)=H_0(u)+H_1(u)=&\frac{\lambda(h(u)-1)+\mu r_0\left(e^{ju}-1\right)-\lambda e^{ju}(h(u)-1)}{\mu r_0\left(e^{ju}-1\right)-\lambda e^{ju}(h(u)-1)}R_0\times\\
&\times\exp\left\{\frac{\lambda j}{\sigma}\int_0^u\frac{e^{ju}(h(u)-1)\left(\lambda+\mu r_2\right)+\mu r_0\left(h(u)-e^{ju}\right)}{\mu r_0\left(e^{ju}-1\right)-\lambda e^{ju}(h(u)-1)}du\right\},
\end{aligned}
$$

и, учитывая условие нормировки $H\left(0\right)=1$, а также $h\left(0\right)=1$, $h'(0)=j\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu q_\nu=j\bar{\nu}$, получим

$$
1=\lim_{u\to 0}H(u)=\lim_{u\to 0}\frac{\lambda(h(u)-1)+\mu r_0\left(e^{ju}-1\right)-\lambda e^{ju}(h(u)-1)}{\mu r_0\left(e^{ju}-1\right)-\lambda e^{ju}(h(u)-1)}R_0,
$$

отсюда $R_0=\dfrac{\mu r_0-\lambda\bar{\nu}}{\mu r_0}$.

Обозначив $\rho=\dfrac{\lambda\bar{\nu}}{\mu r_0}$ – коэффициент загрузки системы, получим

$$
\begin{aligned}
H(u)=&\left(1-\rho\right)\cdot\frac{\left(\bar{\nu}-\rho(h(u)-1)\right)\left(e^{ju}-1\right)}{\bar{\nu}\left(e^{ju}-1\right)-\rho e^{ju}(h(u)-1)}\times\\
&\times\exp\left\{\frac{\lambda j}{\sigma}\int_0^u\frac{e^{ju}(h(u)-1)\left(\lambda+\mu r_2\right)+\mu r_0\left(h(u)-e^{ju}\right)}{\mu r_0\left(e^{ju}-1\right)-\lambda e^{ju}(h(u)-1)}du\right\},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $\bar{\nu}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu q_\nu$ – среднее число заявок в группе. Отсюда видно, что условием существования стационарного режима является $\rho<1$.

В случае ординарного потока

$$
q_\nu=\begin{cases}1, & \nu=1;\\ 0, & \nu\neq 1;\end{cases}\quad \bar{\nu}=1,\ h(u)=\sum_{\nu=1}^{\infty}e^{ju\nu}q_\nu=e^{ju}
$$

характеристическая функция будет иметь вид $H(u)=\left(1-\rho_0\left(e^{ju}-1\right)\right)\cdot\left(\dfrac{1-\rho_0}{1-\rho_0 e^{ju}}\right)^{\frac{1}{\sigma}(\mu r_2+\lambda+\sigma)}$, где коэффициент загрузки системы $\rho_0=\dfrac{\lambda}{\mu r_0}$.

4. Численные результаты

Для нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите $P(i)$ достаточно применить обратное преобразование Фурье к (3): $P(i)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-jui}H(u)du$.

Выражения для нахождения основных характеристик системы, а именно математического ожидания и дисперсии числа заявок на орбите, имеют вид $M\{i(t)\}=-jH'(0)$, $D\{i(t)\}=-H''(0)+\left(\mathrm{H}'(0)\right)^2$.

Рассмотрим систему с параметрами $\lambda=1$, $\sigma=1$, $r_0=0.5$, $r_1=0.3$, $r_2=0.2$, $\nu_1=0.5$, $\nu_2=0.3$, $\nu_3=0.1$, $\nu_4=0.1$, $\nu_5=0$, $\nu_6=0$ ... . Параметр μ подберем так, чтобы коэффициент загрузки системы ρ был равен 0.5, 0.7 и 0.9. Полученные распределения вероятностей числа заявок на орбите показаны на рис. 2.

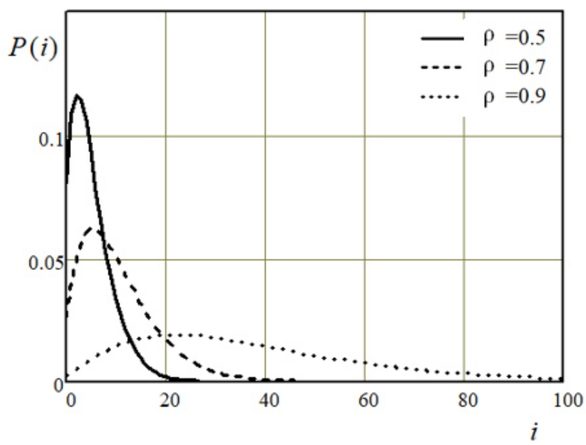

Рис. 2. Распределение вероятностей числа заявок на орбите

В табл. 1 представлены математическое ожидание и дисперсия числа заявок на орбите для рассматриваемой системы с разными коэффициентами загрузки.

Таблица 1

Основные характеристики системы

ρ	$M\{i(t)\}$	$D\{i(t)\}$
0.5	5.207	18.117
0.7	10.589	61.963
0.9	38.300	656.086

Заключение

В работе исследована RQ-система с обратной связью и неординарным пуассоновским входящим потоком. Получено выражение для характеристической функции, что позволяет определить основные вероятностные характеристики числа заявок на орбите. Кроме того, представлены численные результаты и получено стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А.А.* Теория массового обслуживания / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. Томск: Изд-во НТЛ, 2005. с. 228.

2. *Клименок В.И., Тарамин О.С.* Двухфазная система обслуживания с групповым марковским потоком и повторными вызовами // Автоматика и телемеханика. 2010. Т. 71, № 1. С. 3–17.

3. *Шкленник М.А., Моисеева С.П.* Исследование потоков в неоднородной бесконечнолинейной системе массового обслуживания с обратной связью //Марчуковские научные чтения – 2017. Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук. Новосибирск. 25 июня – 14 июля 2017 г. Новосибирск: Омега Принт, 2017. С. 161.

4. *Klimenok V., Kim C.S., Tsarenkov G.V., Breuer L., Dudin A.N.* The BMAP/G/1 → ·/PH/1/M tandem queue with feedback and losses // Performance Evaluation. 2007. V. 64. P. 802–818.

РЕАЛИЗАЦИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ ПЛАТФОРМЫ ИНТЕРНЕТА ВЕЩЕЙ «MICRAN IOT»

Рачис В.А.
Томский политехнический университет
seva-ra4is@mail.ru

Введение

Индустриальный Интернет Вещей (IIoT) – интернет вещей для корпоративного применения, т.е. система объединенных компьютерных сетей и подключенных промышленных объектов с датчиками и ПО для сбора и обмена данными, с возможностью удаленного контроля и управления в автоматизированном режиме, без участия человека (рис. 1) [1].

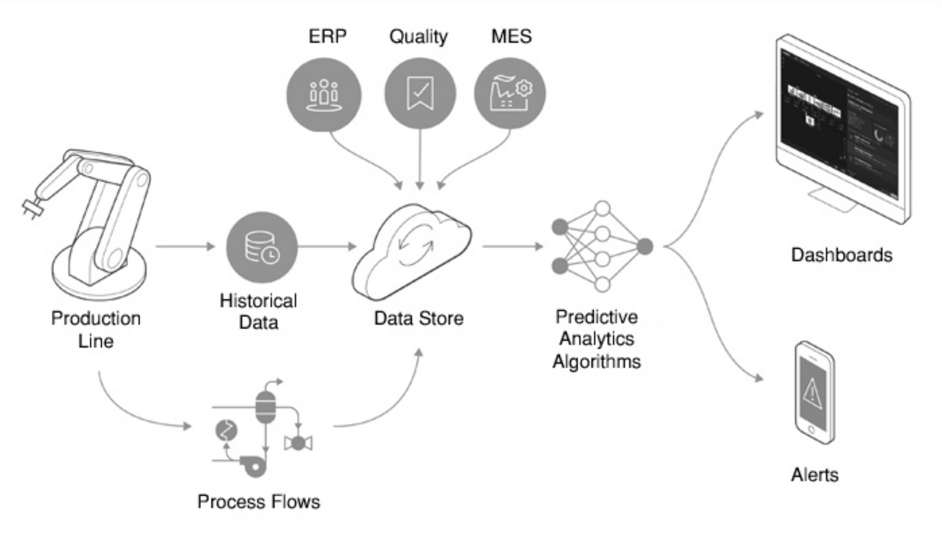

Рис. 1. Индустриальный Интернет вещей (IIoT) [2]

Принцип работы технологии заключается в следующем: первоначально устанавливаются датчики, исполнительные механизмы, контроллеры, человеко-машинные интерфейсы на ключевые части оборудования, после чего осуществляется сбор информации позволяющей получить оценку состояния предприятия. Могут быть предотвращены внеплановые простои, поломки, сокращение техобслуживания и сбоев в управлении цепочками поставок, тем самым позволяя предприятию функционировать более эффективно.