

УДК 519.21

А.В. Зорин

МИНИМИЗАЦИЯ СТОИМОСТИ РАЗГРУЗКИ ДЛЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ПРОЦЕССА ОБСЛУЖИВАНИЯ С РАЗДЕЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Рассматривается процесс обслуживания формируемых в случайной среде конфликтных потоков по алгоритму разделения времени с переналадками. Длительности обслуживаний и переналадок имеют экспоненциальное распределение. Построена математическая модель в виде счетной цепи Маркова с непрерывным временем. Для оценки загруженности системы обслуживания предлагается использовать функционал стоимости достижения заданной области с запретом. Он является обобщением функционалов Чжуна для однородных счетных цепей Маркова с дискретным временем [2]. Ищется управление, минимизирующее этот функционал.

Ключевые слова: *обслуживание с разделением времени и переналадками, случайная среда, загрузка системы обслуживания, функционалы Чжуна, счетная цепь Маркова с непрерывным временем.*

Повторное обслуживание присутствует во многих реальных управляющих системах: в системах обработки информации, системах управления конфликтными транспортными потоками на пересечениях магистралей, системах таможенного досмотра в крупных аэропортах, системах управления комплексами микросварки и т. д. При этом следует учитывать возможность простоя обслуживающего устройства при осуществлении переналадок (переориентаций прибора, жёлтого света светофора, переключения) и изменяющуюся во времени вероятностную структуру промежутков времени между поступлениями требований входных потоков. Другим источником повторного обслуживания требований могут служить поломки прибора. Первые математические модели повторного обслуживания возникли при изучении алгоритмов разделения времени в многозадачных вычислительных комплексах. В работе [1] рассматривалась система обслуживания пуассоновского потока неоднородных требований по алгоритму с разделением времени без переналадок. В качестве экономического критерия эффективности управления принималась средняя стоимость пребывания всех требований в единицу времени. Управление с относительными приоритетами оказалось оптимальным, и был предложен алгоритм назначения оптимальных приоритетных индексов для каждого класса требований. Ветвящиеся потоки вторичных требований добавлены в работу [2]. В работах [3, 4] обслуживающее устройство кроме обслуживания требований осуществляло также внутренние переналадки. В качестве экономического критерия выбиралась ожидаемая стоимость пребывания всех требований в системе за один такт её функционирования. Было установлено, что, несмотря на различие в целевых функционалах, оптимальное управление принадлежит классу управлений с относительными приоритетами и для выбора приоритетных индексов можно воспользоваться аналогичным предложенному в [1] алгоритмом. Система массового обслуживания в классе алгоритмов с разделением времени и переналадками для формируемых в случайной среде входных потоков и целевой

функцией вида средней стоимости пребывания всех требований за такт изучалась в [5].

На практике важно уметь оценивать загрузку системы обслуживания. Под загрузкой чаще всего понимают долю времени, в течение которого система занята обслуживанием требований. Однако для ряда реальных систем обслуживания такое определение не вполне однозначно, поскольку не учитывает возможности фиксированного ритма функционирования систем обслуживания (например, при обслуживании конфликтных транспортных потоков) и наличия периодов переналадок и управления конфликтными потоками (системы управления транспортными потоками, системы обработки информации по алгоритму разделения времени, и т. д.). В частности, неизвестно точное выражение для загрузки системы обслуживания с разделением времени и переналадками, функционирующей в случайной среде [5]. В ряде работ для оценки загрузки системы используется функционал достижения с запретами, называемый *функционалом Чжуна* [6]. В настоящей работе мы расширим понятие функционала Чжуна на счетные цепи Маркова с непрерывным временем.

1. Постановка задачи на содержательном уровне

В систему поступают $m < \infty$ конфликтных потоков требований $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$. Потоки формируются в случайной среде с двумя состояниями: $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$. При состоянии среды $e^{(k)}$, $k = 1, 2$, поток Π_j , $j = 1, 2, \dots, m$, пуассоновский с интенсивностью $\lambda_j^{(k)}$. Требования потока Π_j помещаются в накопитель O_j бесконечного объема. Требования выбираются на обслуживание в порядке поступления. Обслуживающее устройство имеет $n = 2m + 1$ состояние $\Gamma^{(0)}, \Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(2m)}$. В состоянии $\Gamma^{(r)}$, $1 \leq r \leq m$, обслуживается требование из очереди O_r . После состояния $\Gamma^{(r)}$ прибор переходит в состояние $\Gamma^{(r')}$ с $r' = r + m$. В состоянии $\Gamma^{(r')}$ осуществляется акт переналадки и управления и требования не обслуживаются. Если в момент окончания акта переналадки и управления очереди пусты, прибор переходит в состояние $\Gamma^{(0)}$ ожидания поступления требований. При поступлении требования начинается его обслуживание и состояние прибора становится $\Gamma^{(j)}$, если первое требование поступило по потоку Π_j . Если по окончании акта переналадки и управления длины очередей описываются ненулевым вектором $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, то на обслуживание выбирается требование из очереди O_j , где $j = h(x)$ – заданное отображение неотрицательной целочисленной решетки $X = \{0, 1, \dots\}^m$ на множество $\{0, 1, \dots\}$, удовлетворяющее ограничениям: $h(x) = j$ влечет $x_j > 0$ и прообразом точки 0 является только нулевой вектор $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in X$. Длительности обслуживаний и переналадок независимы и имеют экспоненциальные распределения. Средняя длительность пребывания в состоянии $\Gamma^{(r)}$ равна β_r , средняя длительность переналадки и управления в состоянии $\Gamma^{(m+r)}$ равна β_r . Случайная внешняя среда синхронизирована с обслуживающим устройством. Смена состояния случайной среды может происходить только в моменты окончания обслуживания и актов переналадок и управления. Вероятность смены состояния $e^{(k)}$ на состояние $e^{(l)}$ равна $a_{k,l}$, $k, l = 1, 2$. Итак, процесс смены состояния случайной среды не является марковским. После обслуживания требование из O_j может с вероятностью $p_{j,r}$ поступить на повторное обслуживание в очередь O_r , а с вероятностью $p_{j,0} = 1 - \sum_{r=1}^m p_{j,r}$ покидает систему. Таким образом, кроме потоков первичных

требований, в систему поступают потоки вторичных требований и суммарные входные потоки требований имеют сложную вероятностную структуру. Стоимость пребывания одного требования в очереди O_j в единицу времени задана и равна c_j . Считаем заданным разбиение множества X значений очередей на непустые непересекающиеся подмножества X_0, X_+, X_- , $X = X_0 \cup X_+ \cup X_-$. Множество X_0 интерпретируется как множество допустимых длин очередей, множество X_+ – как множество желательных длин очередей, наконец, множество X_- – как множество запрещенных длин очередей. Целью статьи на содержательном уровне является математическая формулировка и численное исследование алгоритма $h(\cdot)$, минимизирующего условную среднюю стоимость достижения множества X_+ из допустимого множества X_0 при условии непопадания в запрещенное множество X_- .

2. Математическая модель и задача оптимизации

Все объекты считаются заданными или конструируются на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, где Ω – пространство описаний ω элементарных исходов, $\mathbf{F}$ – σ -алгебра событий $A \subset \Omega$, $\mathbf{P}$ – вероятность. Введем следующие случайные величины и случайные элементы: $\chi(t) \in \{e^{(1)}, e^{(2)}\}$ – состояние внешней случайной среды в момент $t \geq 0$, $\Gamma(t) \in \Gamma = \{\Gamma^{(0)}, \Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(2m)}\}$ – состояние обслуживающего устройства в момент t , $\kappa_j(t)$ – число требований в очереди O_j в момент t , $\kappa(t) = (\kappa_1(t), \kappa_2(t), \dots, \kappa_m(t))$.

Поскольку течение процесса

$$\{(\Gamma(t), \kappa(t), \chi(t)); t \geq 0\} \quad (1)$$

после момента t определяется только моментом окончания акта прибора, продолжающегося в момент t , поступлением требований после момента t и состояниями случайной среды после момента t , то при заданном начальном распределении случайный процесс (1) является марковским со счетным числом состояний с фазовым пространством

$$S = \{(\Gamma(0), \mathbf{0}, e^{(k)}): k = 1, 2\} \cup \{(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}): r = 1, 2, \dots, m; x \in X, x_r > 0; k = 1, 2\} \cup \{(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}): r = m+1, m+2, \dots, 2m; x \in X; k = 1, 2\}.$$

Марковский процесс (1) является однородным. Обозначим $q(r, x, k; r', w, l)$ – интенсивность перехода из состояния $(\Gamma^{(r)}, x, k) \in S$ в $(\Gamma^{(r')}, w, l) \in S$. Пусть $q(r, x, k) = -q(r, x, k; r, x, k)$, $\delta_{s,s'}$ – символ Кронекера. Для $s = 0, 1, \dots, m$ введем постоянные векторы $y^{(s)} = (\delta_{1,s}, \delta_{2,s}, \dots, \delta_{m,s}) \in X$, причем $y^{(0)} = \mathbf{0}$.

Теорема 1. Интенсивности перехода марковского процесса (1) имеют вид

$$q(0, \mathbf{0}, k) = \lambda_1^{(k)} + \lambda_2^{(k)} + \dots + \lambda_m^{(k)},$$

для $r = 1, 2, \dots, m$, $s = 0, 1, \dots, m$, $x \in X$, $x_r > 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, $r' = h(x)$

$$q(r, x, k) = \beta_r^{-1} + \lambda_1^{(k)} + \lambda_2^{(k)} + \dots + \lambda_m^{(k)},$$

$$q(m+r, x, k) = \bar{\beta}_r^{-1} + \lambda_1^{(k)} + \lambda_2^{(k)} + \dots + \lambda_m^{(k)},$$

$$q(0, \mathbf{0}, k; r, y^{(r)}, k) = \lambda_r^{(k)},$$

$$q(r, x, k; r, x + y^{(j)}, k) = \lambda_j^{(k)},$$

$$q(r, x, k; m+r, x - y^{(r)} + y^{(s)}, l) = a_{k,l} \beta_r^{-1} p_{r,s},$$

$$q(m+r, x, k; m+r, x+y^{(j)}, k) = \lambda_j^{(k)},$$

$$q(m+r, x, k; r', x, l) = a_{k,l} \bar{B}_r^{-1}.$$

Прочие интенсивности равны нулю.

Из вида интенсивностей перехода следует, что марковский процесс (1) имеет только устойчивые непоглощающие состояния и консервативную инфинитезимальную матрицу. Будем считать процесс (1) сепарабельным и измеримым [7, с. 211]. Пусть стоимость пребывания процесса (1) в состоянии $(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)})$ в единицу времени равна $c(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) \geq 0$ и фазовое пространство разложено на три непересекающихся подмножества: $S_0 \neq \emptyset$ – множество допустимых состояний, $S_+ \neq \emptyset$ – множество финальных состояний и S_- – множество запрещенных состояний (запрещенное множество). Введем случайную величину

$$\eta(\omega) = \inf \{t \geq 0: (\Gamma(t), \kappa(t), \chi(t)) \in S_+, (\Gamma(t'), \kappa(t'), \chi(t')) \notin S_-, 0 \leq t' \leq t\}$$

– момент достижения финального множества S_+ без захода в запрещенное множество S_- . Обозначим $\Omega(r, x, k) = \{\omega: \Gamma(0) = \Gamma^{(r)}, \kappa(0) = x, \chi(0) = e^{(k)}\}$. Тогда стоимость $\zeta(\omega)$ достижения финального множества S_+ без захода в запрещенное множество S_- может быть вычислена как

$$\zeta(\omega) = \int_0^{\eta(\omega)} c(\Gamma(t), \kappa(t), \chi(t)) dt. \quad (2)$$

Средняя стоимость достижения финального множества S_+ из допустимого состояния $(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) \in S_0$ без захода в запрещенное множество S_- при функции переключения $h(\cdot)$ определяется тогда как

$$\mathbf{E}(\zeta | \Omega(r, x, k) \cap \{\omega: \eta < \infty\}).$$

Здесь $\mathbf{E}$ – символ математического ожидания.

При сделанных предположениях относительно марковского процесса (1) ее реализации с вероятностью 1 являются кусочно-непрерывными и имеют разрывы лишь первого рода. Пусть $\tau_0 = 0$ и $\tau_1, \tau_2, \dots$ – моменты скачков процесса (1). Рассмотрим вложенную цепь Маркова

$$\{(\Gamma_i, \kappa_i, \chi_i); i = 1, 2, \dots\} \quad (3)$$

с $\Gamma_i = \Gamma(\tau_i + 0)$, $\kappa_i = \kappa(\tau_i + 0)$, $\chi_i = \chi(\tau_i + 0)$. Хорошо известно [4], что вероятность перехода цепи (3) из состояния $(r, x, k) \in S$ в состояние $(r', w, l) \in S$ равна $q(r, x, k; r', w, l)(q(r, x, k))^{-1}$ при $(r, x, k) \neq (r', w, l)$ и равна 0 при $(r, x, k) = (r', w, l)$, а величина $\tau_{i+1} - \tau_i$ при фиксированном $(\Gamma_i, \kappa_i, \chi_i) = (\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)})$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $q(r, x, k)$. Далее, момент η совпадает с моментом скачка τ_θ , со случайным номером $\theta = \min \{i: (\Gamma_i, \kappa_i, \chi_i) \in S_+, (\Gamma_v, \kappa_v, \chi_v) \notin S_-, 0 \leq v \leq i\}$. Вероятность $f(r, x, k) = \mathbf{P}(\{\omega: \eta < \infty\} | \Omega(r, x, k))$, $(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) \in S_0$, называется табу-вероятностью [6]. Напомним, что решение системы линейных уравнений, найденное методом последовательных приближений с нулевыми начальными условиями, называется главным решением [8, с. 33]. Следующая теорема непосредственно выводится из теоремы 1 из [6] с учетом вида переходных вероятностей цепи Маркова (3). Содержательный смысл следующих ниже теорем 2, 3 заключается в указании на те из ограниченных решений бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, которые несут интересующий нас вероятностный смысл.

Теорема 2. Табу-вероятности $\{f(r, x, k); (\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) \in S_0\}$ достижения с запретом являются главным решением системы линейных уравнений

$$q(r, x, k)f(r, x, k) = \sum_{(\Gamma^{(s)}, w, e^{(l)}) \in S_+} q(r, x, k; s, w, l) + \sum_{(\Gamma^{(s)}, w, e^{(l)}) \in S_0} f(r, x, k)q(r, x, k; s, w, l), \quad (\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) \in S_0.$$

Теорема 3. Условные средние стоимости достижения с запретом при $f(r, x, k) \neq 0$ задаются выражением

$$\mathbf{E}(\zeta \mid \Omega(r, x, k) \cap \{\omega: \eta < \infty\}) = G(r, x, k)(f(r, x, k))^{-1},$$

где величины $G(r, x, k)$, $(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) \in S_0$, являются главным решением системы линейных уравнений $(0 \cdot \infty = 0)$

$$q(r, x, k)G(r, x, k) = c(r, x, k)f(r, x, k) + \sum_{(\Gamma^{(s)}, w, e^{(l)}) \in S_0} G(r, x, k)q(r, x, k; s, w, l). \quad (4)$$

Доказательство. Используя вложенную цепь Маркова (3), стоимость достижения финального множества S_+ без захода в запрещенное множество S_- можно привести к виду

$$\zeta = \sum_{v=0}^{\theta-1} c(\Gamma_v, \kappa_v, \chi_v)(\tau_{v+1} - \tau_v).$$

Построим последовательность случайных величин

$$\zeta^{(N)} = \sum_{v=0}^{(\theta-1) \wedge N} c(\Gamma_v, \kappa_v, \chi_v)(\tau_{v+1} - \tau_v),$$

монотонно сходящуюся к случайной величине ζ при $N \rightarrow \infty$, обозначим $I(A) = I(A, \omega)$ индикатор события $A \in \mathbf{F}$. Условное математическое ожидание относительно события $\Omega(r, x, k)$ будем для краткости обозначать символом $\mathbf{E}_{(r, x, k)}$. Обозначим $f^{(i)}(r, x, k)$ вероятность достижения финального множества S_+ без захода в запрещенное множество S_- за i шагов. Последовательно вычисляем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(r, x, k)}(\zeta^{(0)} I(\{\omega: \eta < \infty\})) &= \mathbf{E}_{(r, x, k)}(c(\Gamma_0, \kappa_0, \chi_0)(\tau_1 - \tau_0) I(\{\omega: \eta < \infty\})) = \\ &= c(r, x, k)(q(r, x, k))^{-1} f(r, x, k), \\ \mathbf{E}_{(r, x, k)}(\zeta^{(N+1)} I(\{\omega: \eta < \infty\})) &= \\ &= \mathbf{E}_{(r, x, k)} \left(\sum_{(\Gamma^{(s)}, w, e^{(l)}) \in S} \zeta^{(N+1)} I(\{\omega: \eta < \infty\}) I(\{\omega: \Gamma_v = \Gamma^{(s)}, \kappa_v = w, \chi_v = e^{(l)}\}) \right) = \\ &= \sum_{(\Gamma^{(s)}, w, e^{(l)}) \in S_+} \mathbf{E}_{(r, x, k)}(c(\Gamma_0, \kappa_0, \chi_0)(\tau_1 - \tau_0) I(\{\omega: \Gamma_1 = \Gamma^{(s)}, \kappa_1 = w, \chi_1 = e^{(l)}\})) + \\ &+ \sum_{(\Gamma^{(s)}, w, e^{(l)}) \in S_0} \sum_{i=2}^{\infty} \mathbf{E}_{(r, x, k)}(\zeta^{(N+1)} I(\{\omega: \theta = i\}) I(\{\omega: \Gamma_1 = \Gamma^{(s)}, \kappa_1 = w, \chi_1 = e^{(l)}\})). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{(\Gamma^{(s)}, w, e^{(l)}) \in S_+} \mathbf{E}_{(r, x, k)}(c(\Gamma_0, \kappa_0, \chi_0)(\tau_1 - \tau_0) I(\{\omega: \Gamma_1 = \Gamma^{(s)}, \kappa_1 = w, \chi_1 = e^{(l)}\})) &= \\ &= c(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)})(q(r, x, k))^{-1} f^{(1)}(r, x, k). \end{aligned}$$

Для каждого i , применяя марковское свойство, получим

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}_{(r,x,k)}(\zeta^{(N+1)} I(\{\omega: \theta = i\}) I(\{\omega: \Gamma_1 = \Gamma^{(s)}, \kappa_1 = w, \chi_1 = e^{(l)}\})) = \\
 & = \mathbf{E}_{(r,x,k)} \sum_{v=0}^{(i-1) \wedge (N+1)} c(\Gamma_v, \kappa_v, \chi_v)(\tau_{v+1} - \tau_v) I(\{\omega: \Gamma_1 = \Gamma^{(s)}, \kappa_1 = w, \chi_1 = e^{(l)}, \theta = i\}) = \\
 & = \mathbf{E}_{(r,x,k)}(c(\Gamma_0, \kappa_0, \chi_0)(\tau_1 - \tau_0) I(\{\omega: \Gamma_1 = \Gamma^{(s)}, \kappa_1 = w, \chi_1 = e^{(l)}, \theta = i\}) + \\
 & + \mathbf{E}_{(r,x,k)} \sum_{v=1}^{(i-1) \wedge (N+1)} c(\Gamma_v, \kappa_v, \chi_v)(\tau_{v+1} - \tau_v) I(\{\omega: \Gamma_1 = \Gamma^{(s)}, \kappa_1 = w, \chi_1 = e^{(l)}, \theta = i\}) = \\
 & = c(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) q(r, x, k; s, w, l) (q(r, x, k))^{-1} f^{(i)}(s, w, l) + \\
 & + q(r, x, k; s, w, l) (q(r, x, k))^{-1} \mathbf{E}_{(s,w,l)}(\zeta^{(N)} I(\{\omega: \theta = i\})).
 \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{(\Gamma^{(s)}, w, e^{(l)}) \in S_0} q(r, x, k; s, w, l) (q(r, x, k))^{-1} f^{(i)}(s, w, l) = f^{(i+1)}(r, x, k)$$

и

$$\sum_{i=1}^{\infty} f^{(i)}(r, x, k) = f(r, x, k),$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 q(r, x, k) \mathbf{E}_{(r,x,k)}(\zeta^{(N+1)} I(\{\omega: \eta < \infty\})) & = c(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) q(r, x, k; s, w, l) f(r, x, k) + \\
 & + \sum_{(\Gamma^{(s)}, w, e^{(l)}) \in S_0} q(r, x, k; s, w, l) \mathbf{E}_{(s,w,l)}(\zeta^{(N)} I(\{\omega: \eta < \infty\})).
 \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к пределу по N , получаем равенство (4) в силу теоремы о монотонной сходимости [9, с. 232]. Теорема доказана.

Теорема 3 обобщает теорему 2 из работы [6], в которой изучалось условное среднее для числа шагов до достижения с запретом множества S_+ из состояний множества S_0 для счетной цепи Маркова. Уравнения (3), (4) позволяют для данной функции переключения $h(\cdot)$ вычислить условные средние стоимости достижения с запретом для любого начального состояния из S_0 по формуле

$$\mathbf{E}_{(r,x,k)}(\zeta |\{\omega: \eta < \infty\}) = G(r, x, k) (f(r, x, k))^{-1}. \quad (5)$$

Для сравнения различных функций переключения $h_1(\cdot)$ и $h_2(\cdot)$ при заданном разбиении множества S состояний процесса (1) естественно сравнивать соответствующие наборы (5). В данной работе рассматривается однокритериальная задача с целевой функцией

$$J(h, S_+, S_0, S_-) = \frac{1}{|S_0|} \sum_{(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) \in S_0} G(r, x, k) (f(r, x, k))^{-1}, \quad (6)$$

полученная сверткой критериев (5). Требуется при заданном разбиении $S = S_- \cup S_0 \cup S_+$ решить задачу минимизации

$$J(h_0, S_+, S_0, S_-) = \inf_{h(\cdot)} J(h, S_+, S_0, S_-).$$

Очевидно, решение задачи минимизации критерия (6) в случае конечного множества S_0 может быть найдено методом полного перебора, так как на величину $J(h, S_+, S_0, S_-)$ влияет только выбор управления в конечно множестве точек $x \in X, x \neq \mathbf{0}$,

таких, что $(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) \in S_0$ для некоторых $r \in \{1, 2, \dots, 2m\}$, $k \in \{1, 2\}$. В случае бесконечного множества S_0 нижняя грань может не достигаться. В этом случае естественно говорить об ε -оптимальной функции переключения.

3. Численное исследование задачи оптимизации

В оставшейся части работы положим

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}): (\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) \in S, x \in X_0\}, \\ S_+ &= \{(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}): (\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) \in S, x \in X_+\}, \\ S_- &= \{(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}): (\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) \in S, x \in X_-\} \end{aligned}$$

и будем говорить, что разбиение множества S состояний марковского процесса порождено разбиением $X = X_0 \cup X_+ \cup X_-$ множества состояний очередей. Если разбиение пространства состояний S порождено, например, для некоторых натуральных $N_j, N'_j, j = 1, 2, \dots, m$, множествами вида

$$X_+ = \{x: x_j \leq N_j, j = 1, 2, \dots, m\}, \quad X_- = \{x: x_j > N_j, j = 1, 2, \dots, m\}, \quad (7)$$

или

$$X_+ = \{x: x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq N_1\}, \quad X_- = \{x: x_1 + x_2 + \dots + x_m > N_1\},$$

то данную задачу можно интерпретировать как задачу о минимизации условной средней стоимости разгрузки системы, поскольку множество X_+ на содержательном уровне состоит из малых длин очередей. Аналитическое решение задачи минимизации $J(h, S_+, S_0, S_-)$ в классе всех допустимых функций переключения $h(\cdot)$ не известно. В то же время, легко построить пример разбиения X , для которого множество X_+ желательных длин очередей не достижимо из множества X_0 ни при каком допустимом управлении. Пусть для произвольных натуральных чисел $N_j < N'_j, j = 1, 2, \dots, m$, имеют место равенства

$$X_+ = \{x: x_j \leq N_j, j = 1, 2, \dots, m\}, \quad X_- = \{x: N_j < x_j \leq N'_j, j = 1, 2, \dots, m\}. \quad (8)$$

На рис. 1 приведен пример разбиения (8) множества X для двух очередей, $m = 2$ (и выборе на обслуживание самой длинной очереди). Множество X_+ ограничено штрихпунктирной линией, множество X_+ – штриховой линией, X_- – пунктирной линией. Учитывая соотношения теоремы 1, находим

$$\sum_{(\Gamma^{(s)}, w, e^{(l)}) \in S_+} q(r, x, k; s, w, l) = 0, \quad (\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) \in S_0.$$

Действительно, для достижения S_+ из S_0 необходимо, чтобы за один шаг обе очереди сократились, по крайней мере, на одно требование. По лемме 5 из [6] заключаем, что $f(r, x, k) = 0$ для всех $(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) \in S_0$.

Пусть число входных потоков $m = 2$ и разбиение множества X имеет вид (7). Для проведения численных экспериментов мы ограничимся классом экстремальных и пороговых функций переключения, поскольку решение задачи оптимизации полным перебором представляется крайне трудоемким. В то же время, функция переключения, реализующая управление с относительными приоритетами может быть представлена как частный случай пороговой функции переключения. Введем следующие обозначения. Считаем, что $x = (x_1, x_2) \neq \mathbf{0}$ и $a = 0, 1, \dots$. Пусть 1) $h_{\max}(x)$ принимает значение 1 при $x_1 \geq x_2$ и значение 2 при $x_1 < x_2$; 2) $h_{\text{pri},1}(x)$ принимает значение 1 при $x_1 > 0$, значение 2 в остальных случаях; 3) $h_{\text{pri},2}(x)$ принимает значение 2 при $x_2 > 0$, значение 1 в остальных случаях; 4) $h_{\text{thr},1}(x)$ принимает

значение 1 при $x_2 = 0$ или $x_1 \geq a$, значение 2 при $x_2 > 0$ и $x_1 < a$; 5) $h_{thr,2}(x)$ принимает значение 1 при $x_1 > 0$ и $x_2 \geq a$, значение 2 при $x_1 = 0$ или $x_2 > a$. Функция переключения $h_{\max}(\cdot)$ соответствует обслуживанию самой длинной очереди (см. рис. 1), $h_{pri,1}(\cdot)$ и $h_{pri,2}(\cdot)$ – обслуживанию с относительными приоритетами, $h_{thr,1}(x)$ и $h_{thr,2}(x)$ – обслуживанию приоритетного типа с ненулевым пороговым значением a для приоритетной очереди (см. рис. 2). На рис. 1, 2 окрашивание точки $x = (x_1, x_2)$ в белый цвет соответствует выбору управления $h(x) = 1$, а в черный – управлению $h(x) = 2$. Легко видеть, что $h_{pri,1}(\cdot)$ совпадает с $h_{thr,1}(x)$, а $h_{pri,2}(\cdot)$ совпадает с $h_{thr,2}(x)$ при $a = 1$. При данном выборе стоимостей c_1, c_2 пребывания одного требования единицу времени в очередях O_1, O_2 соответственно имеем: $c(\Gamma^{(r)}, x, e^{(k)}) = c_1 x_1 + c_2 x_2$. Таким образом, мы вычисляем суммарное время пребывания всех требований в системе до момента разгрузки.

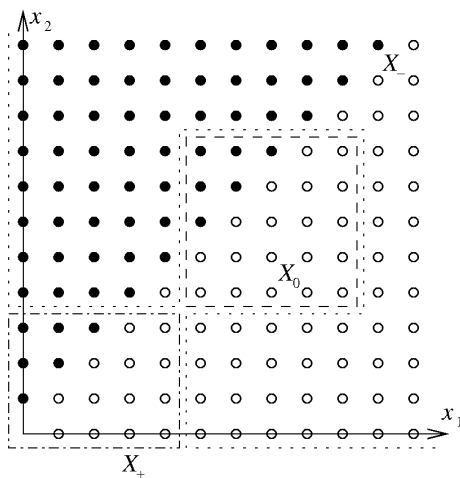


Рис. 1. Вид разбиения множества X типа (8) и функция переключения $h_{\max}$

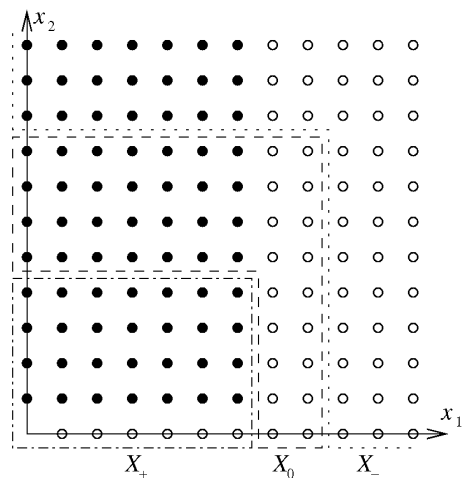


Рис. 2. Вид разбиения множества X типа (7) и пороговая функция переключения $h_{thr,1}$ при $a = 6$

Пусть заданы параметры $a_{1,1} = 0,5$, $a_{2,2} = 0,8$, $\lambda_1^{(1)} = 0,1$, $\lambda_1^{(2)} = 0,2$, $\lambda_2^{(1)} = 0,15$, $\lambda_2^{(2)} = 0,05$, $\beta_1 = 0,375$, $\beta_2 = 0,5$, $\bar{\beta}_1 = 0,125$, $\bar{\beta}_2 = 0,25$, $p_{1,1} = 0$, $p_{1,2} = 0,05$, $p_{2,1} = 0,02$, $p_{2,2} = 0,01$, $c_1 = c_2 = 1$, $N_1 = 5$, $N_1' = 15$, $N_2 = 4$, $N_2' = 10$. Численно решая системы линейных уравнений из теорем 2, 3, находим: $J(h_{\max}) = 205,779$, $J(h_{pri,1}) = 237,444$, $J(h_{pri,2}) = 239,188$, а наименьшее значение 193,852 функционал $J(\cdot)$ достигает на функции переключения $h_{thr,1}$ при $a = 6$ (рис. 2). Заметим, что граница, разделяющая области выбора на обслуживание первой и второй очередей, совпадает с одной из границ вида $x_j > N_j$ множества X_+ . Такой характер оптимального управления в рассматриваемом классе допустимых управлений наблюдался нами практически всегда. Хотя мы не нашли оптимальной функции переключения в классе всех возможных функций переключения, проведенные эксперименты позволяют сделать вывод: приоритетное обслуживание не является наилучшим в задаче разгрузки систем обслуживания с разделением времени и переналадками при выбранном разбиении вида (7).

Заключение

В данной работе рассмотрена задача вычисления средней стоимости достижения марковским процессом заданного множества состояний с запретом посещения выделенного множества состояний при условии, что движение завершается за конечное время. Такая задача возникает естественным образом при оптимизации разгрузки экспоненциальных систем обслуживания конфликтных потоков неоднородных требований. Важным практическим выводом работы является то, что при управлении в классе алгоритмов разделения времени с переналадками с целью уменьшения очередей следует пользоваться функцией переключения порогового, а не приоритетного типа.

Работа выполнена в рамках госбюджетной НИР ННГУ им. Н.И. Лобачевского – национального исследовательского университета по теме № 01201154442 «Создание методов численного анализа и синтеза динамических систем для исследования нелинейной динамики сложных систем и процессов».

ЛИТЕРАТУРА

1. Климов Г.П. Системы обслуживания с разделением времени. I // Теория вероятностей и ее применения. 1974. Т. XIX. № 3. С. 558–576.
2. Китаев А.Ю., Рыков В.В. Системы обслуживания с ветвящимися потоками вторичных требований // Автоматика и телемеханика. 1980. № 9. С. 52–61.
3. Федоткин М.А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. I // Литовский математический сборник. 1988. Т. 28. № 4. С. 783–794.
4. Федоткин М.А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. II // Литовский математический сборник. 1989. Т. 29. № 1. С. 148–159.
5. Федоткин М.А., Зорин А.В. Оптимизация управления дважды стохастическими неординарными потоками в системах с разделением времени // Автоматика и телемеханика. 2005. Т. 66. № 7. С. 102–111.
6. Федоткин М.А. Алгебраические свойства распределений для функционалов Чжуна однородных марковских цепей со счетным множеством состояний // ДАН СССР. 1976. Т. 17. С. 43–46.
7. Чжун К.-Л. Однородные цепи Маркова. М.: Мир, 1964. 426 с.
8. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматлит, 1962. 708 с.
9. Ширяев А.Н. Вероятность: в 2 кн. 3-е изд., перераб. и доп. Кн. 1. М.: МЦНМО, 2004. 520 с.

Зорин Андрей Владимирович
Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского
E-mail: zoav1602@gmail.com

Поступила в редакцию 25 мая 2011 г.