

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 681.513.3

Е.А. Андриенко, Д.В. Домбровский

АДАПТИВНЫЕ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ОБЪЕМЫ ТОРГОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Рассматривается задача управления инвестиционным портфелем с учетом ограничений на объемы торговых операций. Целью управления является превышение в среднем капитала индексного портфеля. Предлагается использовать методологию управления с прогнозирующей моделью для синтеза управления с обратной связью при ограничениях.

Ключевые слова: *Инвестиционный портфель, прогнозирующее управление.*

Проблема управления инвестиционным портфелем (ИП) является одной из основных в управлении финансами и представляет как теоретический, так и практический интерес. Выделяют два основных подхода к ее решению. Классический подход, предложенный в [1, 2], и последующие его модификации [3 – 5], исходят из предположения о том, что при формировании своего портфеля инвестор, с одной стороны, хотел бы минимизировать риск портфеля (обычно дисперсию портфеля или связанные с ней меры риска), с другой – получать желаемую доходность (либо в двойственной постановке – максимизировать доходность при ограниченном риске). При этом задача оптимизации структуры портфеля (определения оптимальных долей вложений в различные виды активов) решается в статической постановке (однопериодные модели) и в зависимости от выбора функции риска и способов учета неопределенности сводится к решению задач квадратичного, стохастического или линейного программирования [1 – 5].

Второй подход основан на построении динамических моделей ИП и использовании для выбора оптимальной структуры портфеля методов теории стохастического управления [6 – 17]. Классическая оптимизационная проблема в динамической постановке заключается в определении стратегии управления ИП, максимизирующей некоторую интегральную функцию полезности, зависящую от уровня текущего потребления и конечного богатства, которая имеет достаточно условный характер и обычно подбирается из класса функций, для которых можно получить приемлемое аналитическое решение [6]. За исключением весьма ограниченного набора функций полезности, такой подход приводит к трудной проблеме численного решения уравнений динамического программирования [7]. Используются также и другие критерии оптимизации портфеля, в частности в [9] критерий, чувствительный к риску. В работах [10 – 14] задача управления ИП формулируется как динамическая задача слежения за капиталом некоторого гипотетического эталонного портфеля, имеющего задаваемую инвестором желаемую доходность.

В работе [14] рассматривается так называемая задача активного управления, целью которой является превышение в среднем капитала некоторого индексного (базового) портфеля. Индексный портфель состоит из различных видов акций в заданных постоянных долях, пропорциональных объемам этих активов на рынке, и отражает состояние и структуру рынка в целом [15, 16]. Достаточно полный обзор методов оптимизации ИП в динамической постановке с использованием различных критериев дан в [17].

Известно, что реальные модели должны учитывать ограничения на объемы торговых операций, таких как покупка-продажа отдельных видов финансовых активов, «продажа без покрытия» [16], заем средств по безрисковой ставке. В динамических моделях учет подобных ограничений приводит к проблеме, известной как «проклятие размерности», если решать задачу с помощью классических методов, например динамического программирования [6, 7].

В данной работе для решения задачи управления ИП при ограничениях предлагается использовать метод прогнозирующего управления, получивший широкое признание и применение в практике управления сложными технологическими процессами при наличии ограничений [12, 13, 18]. Решается задача активного управления. Получены оптимальные стратегии управления с обратной связью, расчет которых включает решение последовательности задач квадратичного программирования. Представлены результаты численного моделирования, подтверждающие эффективность и работоспособность предложенного подхода.

1. Модель инвестиционного портфеля

Рассмотрим инвестиционный портфель (ИП), состоящий из n рисковых ценных бумаг (обыкновенные акции) и безрискового финансового актива (банковский счет или надежные облигации). Динамика капитала инвестиционного портфеля $V(k)$ описывается уравнением [13]:

$$V(k+1) = [1 + r_1(k)]V(k) + \sum_{i=1}^n [\eta_i(k) - r_1(k)]u_i(k) - [r_2(k) - r_1(k)]u_{n+1}(k), \quad (1)$$

где $\eta_i(k)$ – доходность рискового актива i -го вида, $r_1(k)$ – доходность безрискового актива, $r_2(k)$ – ставка по займу безрискового актива, $u_i(k)$ – объем капитала, вложенного в i -й вид акций, $u_{n+1}(k) \geq 0$ – объем заемных средств,

$$u_0(k) = V(k) - \sum_{i=1}^n u_i(k) + u_{n+1}(k) \geq 0$$

– капитал, помещенный в безрисковый актив. Начальное значение $V(0)$ известно. Управляющими являются переменные $u_i(k)$, $i = \overline{1, n+1}$, на которые наложены следующие ограничения:

$$u_i^{\min}(k) \leq u_i(k) \leq u_i^{\max}(k), \quad i = \overline{1, n}; \quad (2)$$

$$0 \leq u_{n+1}(k) \leq u_{n+1}^{\max}(k); \quad (3)$$

$$0 \leq V(k) - \sum_{i=1}^n u_i(k) + u_{n+1}(k) \leq u_0^{\max}(k), \quad (4)$$

где $u_i^{\max}(k) \geq 0$, $i = \overline{0, n+1}$. Если нижняя граница $u_i^{\min}(k) < 0$, то для акций i -го вида допустимо участие в операции «продажи без покрытия» [16] на сумму не больше, чем $|u_i^{\min}(k)|$; если $u_i^{\min}(k) \geq 0$, то операции продажи без покрытия для акций i -го вида запрещены; $u_i^{\max}(k)$ определяют максимальный объем капитала, который можно вкладывать в акции i -го вида; $u_{n+1}^{\max}(k)$ – максимальный размер займа безрискового актива; $u_0^{\max}(k)$ – максимальный объем капитала, который можно вкладывать в безрисковый актив.

Отметим, что величины $u_i^{\min}(k)$, $i = \overline{1, n}$, и $u_j^{\max}(k)$, $j = \overline{0, n+1}$, на практике часто зависят от величины общего капитала ИП, что можно учесть, положив $u_i^{\min}(k) = \gamma'_i V(k)$, $u_j^{\max}(k) = \gamma''_j V(k)$, где γ'_i и γ''_j – постоянные коэффициенты.

Для описания эволюции цен рискованных финансовых активов используем модель вида

$$S_i(k+1) = S_i(k) \left[1 + \mu_i(k) + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(k) w_j(k) \right], \quad (5)$$

где $S_i(k) \geq 0$ – цена ценной бумаги i -го вида в момент времени k , $i = \overline{1, n}$, $\mu_i(k)$ – ожидаемая доходность на интервале $k+1$, $\sigma_{ij}(k)$ – элементы матрицы волатильности $\|\sigma_{ij}(k)\|$ размерности $n \times n$, $w_j(k)$ – белый шум с нулевым средним и единичной дисперсией ($j = \overline{1, n}$). Модель (5) является дискретной аппроксимацией (с точностью до второго порядка малости) непрерывной модели цен, так называемой модели геометрического броуновского движения [19]. Доходность рискованного актива i -го вида для модели цен (5) имеет вид

$$\eta_i(k) = \mu_i(k) + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(k) w_j(k).$$

2. Управление инвестиционным портфелем

Рассмотрим задачу активного управления. Предположим, что задан некоторый базовый портфель, который содержит набор финансовых активов в заданных долях в соответствии со структурой и состоянием рынка в целом [15, 16]. При пассивном управлении [16] инвестор формирует ИП, распределяя капитал в тех же пропорциях. Активное управление заключается в том, чтобы превосходить доходность индексного портфеля путем перераспределения инвестиций.

Динамика капитала индексного портфеля $\tilde{V}(k)$ описывается следующим уравнением [14]:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(k+1) = & \left[1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\mu_i(k) + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(k) w_j(k) \right) + \right. \\ & \left. + \left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) r_1(k) \right] \tilde{V}(k), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, – доля капитала ИП, вложенная в i -й рисковый актив, $1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \geq 0$ – доля капитала ИП, вложенная в безрисковый актив. В начальный момент капитал $\tilde{V}(0) = V(0)$ задан.

В общем случае индексный и инвестиционный портфели могут содержать различные виды акций. Если i -й вид акций включается в индексный портфель, но не включается в ИП, то $u_i^{\min}(k) = u_i^{\max}(k) = 0$. Если i -й вид акций включен в ИП, но не включен в индексный портфель, то $\alpha_i = 0$.

Для управления портфелем синтезируем стратегии с прогнозирующей моделью. Критерий качества управления со скользящим горизонтом (функция риска) имеет вид

$$J(k + p/k) = E \left\{ \sum_{i=1}^p [V(k+i) - (1+\beta)\tilde{V}(k+i)]^2 + \sum_{i=0}^{p-1} u^T(k+i/k) R(k+i) u(k+i/k) / V(k), \tilde{V}(k) \right\}, \quad (7)$$

где $E\{\dots/\dots\}$ – оператор условного математического ожидания,

$$u(k+i/k) = [u_1(k+i/k), \dots, u_n(k+i/k)] \quad (i = \overline{0, p-1})$$

– векторы прогнозирующих управлений, p – горизонт прогноза, $R(k+i) > 0$ – весовые матрицы, параметр $\beta \geq 0$ характеризует склонность инвестора к риску.

Прогнозирующие управления определяются по следующему правилу: на каждом шаге k минимизируем функционал (7) по последовательности программных управлений $u(k/k), \dots, u(k+p-1/k)$, зависящих от состояния системы в момент k . В качестве управления в момент k берем $u(k) = u(k/k)$. Тем самым получаем управление $u(k)$ как функцию состояния $V(k)$, т. е. управление с обратной связью. Чтобы получить управления $u(k+1)$ на следующем шаге, процедура повторяется для текущего момента $k+1$.

Теорема. Оптимальное управление на шаге k , минимизирующее критерий (7) на траекториях системы (1), (6) при фиксированном горизонте прогнозирования p с учетом ограничений на управления (2) – (4), определяется уравнением

$$u(k) = [I_{n+1}, 0_{n+1}, \dots, 0_{n+1}] U(k),$$

где I_n – единичная матрица размерности n , 0_n – квадратная нулевая матрица размерности n , $U(k) = [u^T(k/k), u^T(k+1/k), \dots, u^T(k+p-1/k)]^T$ – вектор прогнозирующих управлений, который определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием

$$Y(k+p/k) = 2z^T(k)G(k)U(k) + U^T(k)H(k)U(k), \quad (8)$$

при ограничениях

$$u^{\min}(k) \leq \bar{S}(k)U(k) \leq u^{\max}(k), \quad (9)$$

где

$$z(k) = [V(k), \tilde{V}(k)]^T;$$

$$u^{\min}(k) = [u_1^{\min}(k), \dots, u_n^{\min}(k), 0, -V(k)]^T; \quad (10)$$

$$u^{\max}(k) = [u_1^{\max}(k), \dots, u_{n+1}^{\max}(k), u_0^{\max}(k) - V(k)]^T; \quad (11)$$

$G(k), H(k), \bar{S}(k)$ блочные матрицы

$$G(k) = [G_1(k) \dots G_p(k)]; \quad (12)$$

$$H(k) = \begin{bmatrix} H_{11}(k) & \dots & H_{1p}(k) \\ \dots & \dots & \dots \\ H_{p1}(k) & \dots & H_{pp}(k) \end{bmatrix}; \quad (13)$$

$$\bar{S}(k) = [S(k) \quad 0_{(n+2) \times (n+1)(p-1)}], \quad (14)$$

блоки которых определяются следующими соотношениями:

$$G_s(k) = \left\{ \prod_{j=0}^{s-2} A_0(k+j) \right\} L_{12}(p-s);$$

$$H_{is}(k) = \begin{cases} B_0^T(k+i-1) \left\{ \prod_{j=i}^{s-2} A_0(k+j) \right\} L_{12}(p-s), & i < s, \\ L_{22}(p-i) + R(k+i-1), & i = s, \\ H_{si}^T, & i > s; \end{cases}$$

$$S(k) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$0_{(n+2) \times (n+1)(p-1)}$ – нулевая матрица размерности $(n+2) \times (n+1)(p-1)$;

$$\prod_{j=i}^{i-1} A_0(k+j) = 1,$$

$$Q(s+1) = L_{11}(s) + C^T \cdot C, \quad Q(0) = C^T \cdot C; \quad (15)$$

$$L_{11}(s) = \sum_{j=0}^n A_j(k+p-1-s) Q(s) A_j(k+p-1-s); \quad (16)$$

$$L_{12}(s) = \sum_{j=0}^n A_j(k+p-1-s) Q(s) B_j(k+p-1-s); \quad (17)$$

$$L_{22}(s) = \sum_{j=0}^n B_j^T(k+p-1-s) Q(s) B_j(k+p-1-s), \quad (18)$$

где
$$A_0(k) = \text{diag} \left(1 + r_1(k), \quad 1 + r_1(k) + \sum_{i=1}^n \alpha_i (\mu_i(k) - r_1(k)) \right); \quad (19)$$

$$B_0(k) = \begin{bmatrix} \mu_1(k) - r_1(k) & \dots & \mu_n(k) - r_1(k) & r_1(k) - r_2(k) \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (20)$$

$$A_j(k) = \text{diag} \left(0, \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_{ij}(k) \right); \quad (21)$$

$$B_j(k) = \begin{bmatrix} \sigma_{1j}(k) & \dots & \sigma_{nj}(k) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (22)$$

$$C = [1, -(1+\beta)].$$

Доказательство. Введя вектор $z(k+i) = [V(k+i), \tilde{V}(k+i)]^T$, можно переписать систему уравнений (1), (6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} z(k+i+1) &= A_0(k)z(k+i) + B_0(k)u(k+i/k) + \\ &+ \sum_{j=1}^n A_j(k)w_j(k)z(k+i) + \sum_{j=1}^n B_j(k)w_j(k)u(k+i/k), \end{aligned} \quad (23)$$

с начальным условием $z(k) = [V(k), \tilde{V}(k)]^T$, где $A_0(k), B_0(k), A_j(k), B_j(k), j = \overline{1, n}$, определяются уравнениями (19) – (22) соответственно.

Критерий (7) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} J(k+p/k) &= E \left\{ \sum_{i=1}^p z^T(k+i) C^T C z(k+i) + \right. \\ &\left. + \sum_{i=0}^{p-1} u^T(k+i/k) R(k+i) u(k+i/k) \middle/ V(k), \tilde{V}(k) \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Выражая последовательно все $z(k+i), i = \overline{1, p}$, через $z(k)$ с использованием уравнения системы (23) и подставляя результат в критерий (24), получим

$$\begin{aligned} J(k+p/k) &= z^T(k) L_{11}(p-1) z(k) + \\ &+ 2z^T(k) \left[\sum_{r=1}^{p-1} \left\{ \prod_{s=0}^{r-1} A_0(k+s) \right\} L_{12}(p-r-1) u(k+r/k) \right] + \\ &+ 2 \sum_{r=0}^{p-2} \sum_{j=r+1}^{p-1} u^T(k+r/k) B_0^T(k+r) \left\{ \prod_{s=r+1}^{j-1} A_0(k+s) \right\} L_{12}(p-1-j) u(k+j/k) + \\ &+ \sum_{r=0}^{p-1} u^T(k+r/k) [L_{22}(p-1-r) + R(k+r)] u(k+r/k), \end{aligned} \quad (25)$$

где $Q(s), L_{11}(s), L_{12}(s), L_{22}(s)$ определяются по формулам (15) – (18).

Выражение (25) нетрудно записать в матричном виде:

$$\begin{aligned} J(k+p/k) &= z^T(k) [Q(p) - R(k)] z(k) + \\ &+ 2z^T(k) G(k) U(k) + U^T(k) H(k) U(k), \end{aligned} \quad (26)$$

где матрицы $G(k)$ и $H(k)$ имеют вид (12), (13). Ограничения вида (2) – (4) в матричном виде выглядят как (9), где матрицы $u^{\min}(k), u^{\max}(k), S(k)$ имеют вид (10), (11) и (14) соответственно.

Итак, имеем задачу минимизации критерия (26) при ограничениях (9), которая эквивалентна задаче квадратичного программирования с критерием (8) при ограничениях (9).

3. Численное моделирование

Рассмотрим рынок, на котором присутствуют акции четырех видов с ожидаемыми доходностями $\mu_1 = 0,011$, $\mu_2 = 0,009$, $\mu_3 = 0,007$, $\mu_4 = 0,006$ и постоянными волатильностями $\sigma_1 = 0,033$, $\sigma_2 = 0,029$, $\sigma_3 = 0,026$, $\sigma_4 = 0,023$; $w_i(k)$ – независимые последовательности белых гауссовских шумов с нулевыми средними и единичными дисперсиями. На рис. 1 приведена динамика цен акций, по оси абсцисс отложены временные интервалы, а по оси ординат – цены акций.

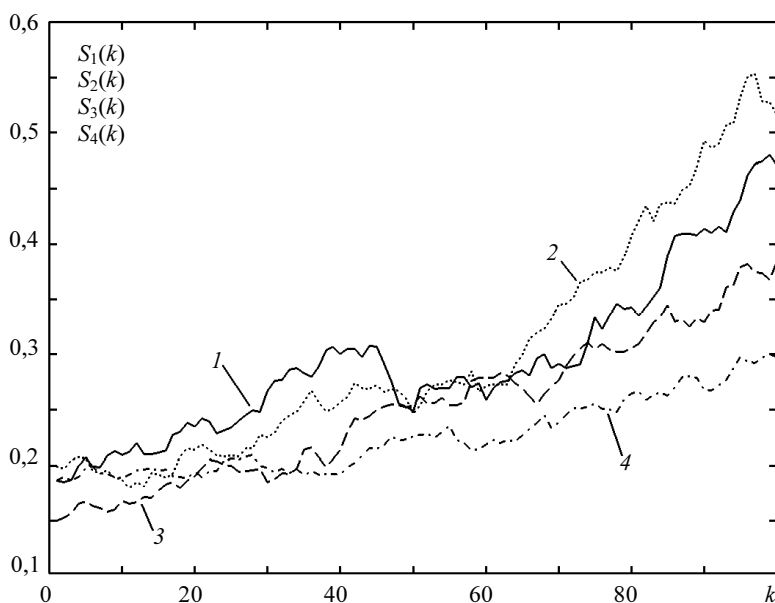


Рис. 1. Динамика цен акций (номер линии соответствует номеру типа акции)

Есть возможность вкладывать капитал в банк по ставке $r_1 = 0,001$ и брать кредит в банке по ставке $r_1 = 0,002$. Инвестор включает в свой ИП акции только первого, второго и третьего типов, поэтому $u_4^{\min}(k) = u_4^{\max}(k) = 0$. На объемы торговых операций наложены следующие ограничения: операции продажи без покрытия для инвестора запрещены $u_i^{\min}(k) = 0$, $i = \overline{1, n}$; объем займа в банке ограничен величиной, равной половине начального капитала ИП $u_{n+1}^{\max}(k) = \frac{1}{2}V(0)$. В начальный момент капитал ИП $V(0) = 1$. Коэффициент превышения $\beta = 0,1$ (10%). Индексный портфель содержит акции только второго, третьего и четвертого типов и характеризуется следующими долями вложений: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0,3$, $\alpha_3 = 0,3$, $\alpha_4 = 0,4$. Матрица весовых коэффициентов в функции риска $R = \text{diag}(0,01; 0,01; 0,01; 0,01; 0,01)$. Задача решается на промежутке $k \in [1; 100]$.

Результаты решения представлены на рис. 2 и 3, где на оси абсцисс указаны номера временных интервалов, а по оси ординат – суммы вложений.

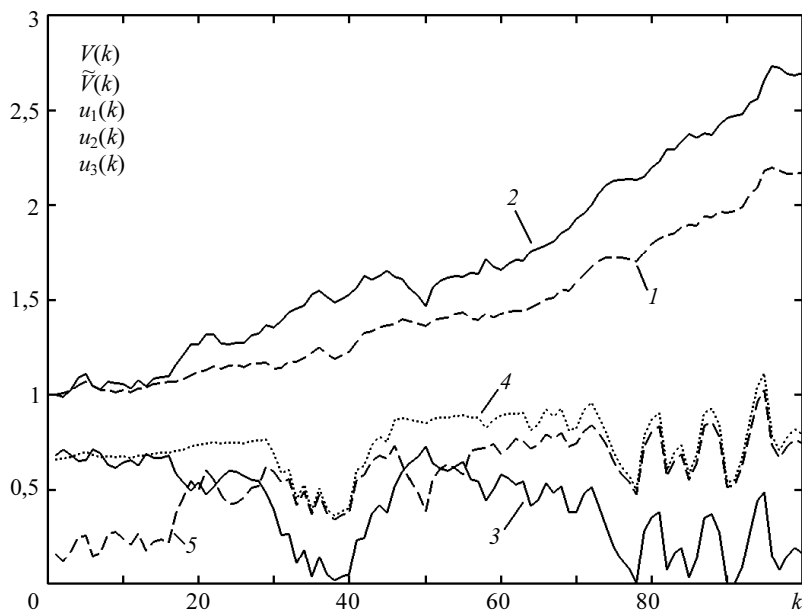


Рис. 2. Динамика портфеля (линия 1 – индексный портфель, 2 – управляемый портфель, 3 – 5 – акции вида 1 – 3 соответственно)

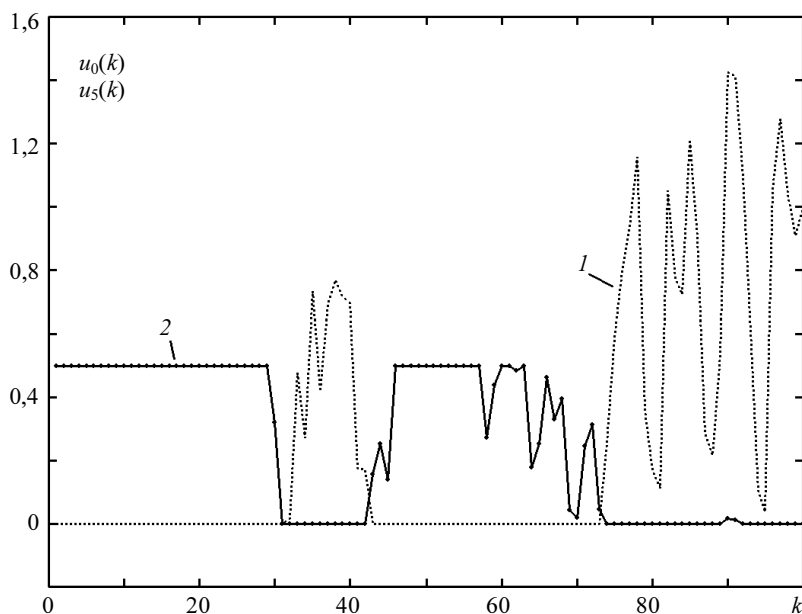


Рис. 3. Динамика банковского счета и займа (линия 1 – банковский счет, 2 – банковский заем)

Заключение

В данной работе рассмотрена задача управления инвестиционным портфелем при ограничениях на объемы торговых операций, таких как инвестирование в отдельные виды финансовых активов, «продажа без покрытия», заем средств по безрисковой ставке. Целью управления портфелем является превышение капитала индексного портфеля, отражающего состояние рынка (активное управление).

Для синтеза оптимальных стратегий адаптивного управления применялся метод прогнозирующего управления, который позволяет получить управление с обратной связью при ограничениях на управляющие переменные.

Результаты численного моделирования подтверждают работоспособность и эффективность предложенной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Markowitz H. Portfolio Selection // J. Finance. 1952. V. 7. № 1. P. 77 – 91.
2. Tobin J. Liquidity Preference as Behavior Towards Risk // Review of Economic Studies. 1958. V. 26. No. 1. P. 65 – 86.
3. Young M.R. A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution // Management Science. 1998. V. 44. No. 5. P. 673 – 683.
4. Golub B., Holmer M., McKendall R., Pohiman I., Zenios S.A. A Stochastic Programming Model for Money Management // Europ. J. Operation. Res. 1995. V. 85. P. 282 – 296.
5. Dupakova J. Portfolio Optimisation via Stochastic Programming: Methods of Output Analysis // Math. Methods Operat. Res. 1999. No. 50. P. 245 – 270.
6. Merton R.C. Continuous-time finance. Cambr. Ma. Blackwell, 1990.
7. Kushner H.J. Consistency Issues for Numerical Methods for Variance Control with Applications to Optimization in Finance // IEEE Trans. on Automatic Contr. 1999. V. 44. No. 12. P. 2283 – 2296.
8. Li D., Ng W.-L. Optimal Dynamic Portfolio Selection: Multi-Period Mean-Variance Formulation // Math. Finance. 2000. No. 10. P. 387 – 406.
9. Bielecki J.R., Pliska S.R. Risk-Sensitive Dynamic Asset Management // Appl. Math. Optim. 1999. V. 39. P. 337 – 360.
10. Герасимов Е.С., Домбровский В.В. Динамическая сетевая модель управления инвестиционным портфелем при квадратической функции риска // Автоматика и телемеханика. 2002. № 2. С. 119 – 128.
11. Домбровский В.В., Федосов Е.Н. Модель управления инвестиционным портфелем в пространстве состояний на нестационарном диффузионно-скачкообразном финансовом рынке // Автоматика и вычислительная техника. 2002. № 6. С. 13 – 24.
12. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 84 – 97.
13. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозирующей моделью системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2006. № 12. С. 71 – 85.
14. Домбровский В.В., Ляшенко Е.А. Динамическая модель управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке со стохастической волатильностью // Автоматика и вычислительная техника. 2003. № 5. С. 12 – 21.
15. Browne S. Risk-Constrained Dynamic Active Portfolio Management // Management Sci. 2000. V. 46. No. 9. P. 1188 – 1199.
16. Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 1997.

17. *Runggaldier W.J.* On stochastic control in finance. Mathematical Systems Theory in Biology, Communication, Computation and Finance (D. Gilliam and J. Rosental, eds). IMA Book Series (MTNS-2002), Springer Verlag. 2002.
18. *Rawlings J.B.* Tutorial: Model Predictive Control Technology // Proceed. Amer. Control Conf. June. 1999. San Diego. P. 662 – 676.
19. *Tsay R.S.* Analysis of Financial Time Series. John Wiley & Sons, Inc., 2002.

Статья представлена кафедрой математических методов и информационных технологий в экономике экономического факультета ТГУ, кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики ТГУ и оргкомитетом 7-й Российской конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», поступила в научную редакцию 29 сентября 2008 г.