Астрономия и геодезия, 1998, вып.16, с. 75-88

УДК 523.64-44-17+523.683

ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА ЧАСТИЦ ПРИ РАСПАДЕ ТЕЛА НА ОРБИТЕ

Г.О. Рябова

Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики, Томск

E-mail: ryabova@urania.tomsk.su

Поступила в редакцию 15.10.97 г.

В астрономии существуют классы объектов, которые представляют собой потоки, имеющие общее начало: метеороидные потоки, фрагменты космических аппаратов и т.д. Предлагается полуаналитический метод для нахождения плотности такого потока в произвольном поперечном сечении. Эволюция орбит частиц не учитывается. Метод основан на статистическом подходе и использовании компьютерной алгебры. Он дает существенный выигрыш компьютерного времени по сравнению с прямым численным моделированием.

Исследование структурных характеристик и динамики ансамбля частиц, образовавшихся при распаде некоего небесного тела, — это задача, которая имеет множество приложений в астрономии. Далее речь будет идти о выбросах пылевых частиц из ядра кометы, но очевидно, что с незначительными изменениями метод может быть использован в задачах о разрушении ИСЗ и других подобных. Цель настоящей работы — получить распределение плотности потока частиц, образовавшихся при дезинтеграции родительского тела, в произвольной плоскости, пересекающей поток.

Существуют два принципиально различных подхода к решению данной задачи. Первый, который можно назвать численным моделированием, заключается в том, что моделируется выброс определенного количества частиц, после чего изучаются характеристики

полученного таким образом потока. Метод численного моделирования достаточно прост в реализации, но неэкономичен с точки зрения компьютерного времени.

Другой подход состоит в том, чтобы рассматривать поток как нечто целое, некоторую совокупность, описываемую с помощью математических функций. Этот подход иначе можно назвать статистическим. Предлагаемый в данной работе метод является одной из возможных реализаций статистического подхода. Он основан на нахождении вероятности того события, что орбита частицы, выброшенной из ядра кометы, пройдет через определенную точку заданной произвольной плоскости. Задача решается в рамках невозмущенной задачи двух тел, т.е. эволюция орбит не учитывается, негравитационные эффекты (кроме светового давления) в представленном варианте также не учитываются. Для частного случая, а именно распределения плотности орбит частиц вдоль отрезка линии узлов дезинтегрируемого тела в плоскости эклиптики (если задача планетоцентрическая, то в плоскости экватора), несколько раньше удалось найти аналитическое решение (Рябова, 1987). Здесь же получено общее решение, но полуаналитическое. Основное достоинство предлагаемого метода по сравнению с методом прямого численного моделирования — существенное сокращение затрат компьютерного времени. Недостатком, который при дальнейшем развитии метода может быть устранен, является ограниченность области применения: дезинтеграция тела происходит в одной точке его орбиты, облако фрагментов уже распределилось вдоль орбиты, но вместе с тем орбиты фрагментов практически не подверглись изменению.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть объект (будем называть комету или разрушающийся КА именно так) находится на орбите с элементами $a_o, e_o, i_o, \Omega_o, \omega_o$ (обозначения общепринятые). В точке с истинной аномалией v_{oi} происходит дезинтеграция и образуется поток фрагментов (частиц). Скорость объекта в этой точке $\mathbf{V}_e = \{V_{ex}, V_{ey}, V_{ez}\}$, вектор положения $\mathbf{r}_e = \{x_e, y_e, z_e\}$. Обозначим совокупность исходных элементов орбиты объекта следующим образом: $P = \{a_o, e_o, i_o, \Omega_o, \omega_o, v_{oi}\}$. Скорость выброса частицы $\mathbf{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, а ее гелиоцентрическая скорость $\mathbf{V} = \{V_x, V_y, V_z\}$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_e + \mathbf{c}$. Элементы орбиты частицы a, e, i, Ω, ω,

Пусть далее некоторая плоскость пересекает поток частиц. Орбита каждой частицы "прокалывает" эту плоскость дважды. Будем относить все дальнейшие рассуждения к какому-либо одному узлу (безразлично к какому) и считать, что орбита частицы пересекает плоскость в точке $\{x_s, y_s, z_s\}$. Объект пересекает плоскость в точке $\{x_c, y_c, z_c\}$, имея истинную аномалию v_c. Поскольку плотность распределения точек пересечения орбит частиц с плоскостью есть величина двумерная, следует перейти к координатам на плоскости. Пусть $\{x_{sp}, y_{sp}\}$ – координаты точки пересечения плоскости орбитой частицы в прямоугольной системе координат, связанной с плоскостью, — случайные величины. Требуется найти $f(x, y)$ – плотность распределения вероятностей случайной величины $\{x_{sp}, y_{sp}\}$, если известна плотность распределения $f_c(\mathrm{c}) = f_c(c, T, \Phi) = f_c(c) f_t(T) f_\Phi(\Phi)$, где $f_c(c)$, $f_t(T)$, $f_\Phi(\Phi)$ – плотности распределения вероятностей значений скорости выброса частиц c и углов T и Φ, определяющих направление выброса. Вычислив $f(x_{sp}, y_{sp})$, мы практически получаем вероятность того,что орбита частицы пройдет через точку $\{x_{sp}, y_{sp}\}$. Если в этой точке находится КА, то столкнется ли частица с КА, зависит от того, находится ли она в окрестности данной точки своей орбиты. Будем считать, что частицы уже распределились вдоль орбиты, т.е. облако частиц уже замкнулось. Тогда вероятность столкновения есть

$$\nu = \frac{ds}{V_{sp} p},$$

где V_{sp} – скорость частицы в точке $\{x_{sp}, y_{sp}\}$, p – орбитальный период, ds – малый отрезок траектории частицы. Точку $\{x_{sp}, y_{sp}\}$ пересекает множество орбит, отсюда соотношение

$$Q(x_{sp}, y_{sp}) \propto f(x_{sp}, y_{sp})\nu,$$

где Q – поток частиц через точку, ν – среднее значение величины ν. Пробное численное моделирование, где объектом являлась комета Галлея, а КА — это КА "Вега-1", показало, что ν варьирует в пределах всего нескольких процентов , поэтому его влияние можно не учитывать. Отсюда следует, что $Q \propto f(x_{sp}, y_{sp})$. Однако очевидно, что для каждого нового объекта ν следует тщательно оценивать. Так выглядит постановка задачи.

Путь ее решения вкратце можно описать следующим образом. Функция распределения случайной величины $\{x_{sp}, y_{sp}\}$ есть

$$F(x, y) = \iiint\limits_{\substack{x_{sp}<x \\ y_{sp}<y}} f_e(e) f_t(T) f_\Phi(\Phi)\, d\Phi\, dT\, de. \qquad (1)$$

Правые части уравнений, выражающих зависимости x_{sp} и y_{sp} от начальных условий, можно представить в виде степенных рядов по малому параметру e. Оказалось, что первые два члена ряда уже дают хорошую точность аппроксимации. Благодаря этому обстоятельству появилась возможность записать пределы интегралов (1) в явном виде. Имея $F(x, y)$, находим требующуюся величину

$$f(x, y) = F(x + dx, y + dy) + F(x, y) - F(x + dx, y) - F(x, y + dy). \quad (2)$$

Здесь x и y — координаты в прямоугольной системе координат, связанной с плоскостью.

Ниже следует подробное описание метода, который, вообще говоря, сводится к нахождению области интегрирования и пределов интеграла (1).

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Используются три гелиоцентрические системы координат.

1) Стандартная эклиптическая гелиоцентрическая прямоугольная система координат.

2) Связанная с секущей плоскостью. Плоскость XY системы параллельна секущей плоскости. Направление осей выбирается применительно к конкретной задаче. Подчеркнем, что система именно гелиоцентрическая, что связано с необходимостью сохранения вида уравнений при переходе между системами. Направление осей выбирается применительно к конкретной задаче. Условимся, что координаты, приведенные ко второй системе, помечаются индексом "p". Тогда

$$\mathbf{r}_{sp} = TR_{12}\mathbf{r}_s. \qquad (3)$$

где $\mathbf{r}_p$ — некий вектор в первой системе, а $^1R_{12}$ - матрица преобразования от первой системы ко второй.

3) Связанная с разрушающимся объектом. Ось Z перпендикулярна плоскости орбиты объекта и направлена в сторону северного полюса. Направление остальных осей выбирается применительно к конкретной задаче. $^1R_{13}$ — матрица преобразования от первой системы к третьей.

В том случае, когда рассматривается задача, связанная с объектами на орбите планеты, в качестве первой системы используется, естественно, планетоцентрическая экваториальная система.

РАЗЛОЖЕНИЕ $X_{SP}(P,C)$ И $Y_{SP}(P,C)$ В РЯД

Итак, уравнение секущей плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{4}$$

Плоскость может быть любой за исключением плоскости эклиптики, которая представляет особый случай. Здесь и далее используем основную систему координат. Систему уравнений, описывающую траекторию частицы, запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \frac{b_1\cos(u) - b_2\sin u}{1 + b_6\cos u + b_7\sin u}, \\ y &= \frac{b_3\cos(u) - b_4\sin u}{1 + b_6\cos u + b_7\sin u}, \\ z &= \frac{b_5\sin u}{1 + b_6\cos u + b_7\sin u}, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= p\cos\Omega, & b_5 &= p\sin i, \\ b_2 &= p\sin\Omega\cos i, & b_6 &= e\cos\omega, \\ b_3 &= p\sin\Omega, & b_7 &= e\sin\omega, \\ b_4 &= p\cos\Omega\cos i, \\ p &= a(1-e^2), \\ u &= v + \omega. \end{aligned}$$

Для того, чтобы найти координаты точек пересечения орбиты частицы с плоскостью, подставим (5) в (4) и решим полученное уравнение относительно u. В результате получим

$$\sin u = -\frac{(D-E)+(-F\pm\sqrt{F^2+E^2-D^2}}{E(D-E)+F(-F\pm\sqrt{F^2+E^2+D^2})},$$
$$\cos u = -\frac{D(D-E)+F(-F\pm\sqrt{F^2+E^2-D^2}}{E(D-E)+F(-F\pm\sqrt{F^2+E^2+D^2})}. \qquad (6)$$

Здесь

$$E = Ab_1 + Bb_3 + Db_6,$$
$$F = -Ab_2 + Bb_4 + Cb_5 + Db_7,$$

а знак $\pm$ указывает на два возможных решения, т.е. на два узла. Подставив (6) в (5), получим

$$x_s = x_s(b_1,\ldots,b_7),$$
$$y_s = y_s(b_1,\ldots,b_7), \qquad (7)$$
$$z_s = z_s(b_1,\ldots,b_7).$$

Приведем уравнения (7) к виду

$$x_s = \frac{\sum\limits_0^\infty x_i c^i}{\sum\limits_0^\infty d_i c^i},\ y_s = \frac{\sum\limits_0^\infty y_i c^i}{\sum\limits_0^\infty d_i c^i},\ z_s = \frac{\sum\limits_0^\infty z_i c^i}{\sum\limits_0^\infty d_i c^i}. \qquad (8)$$

Для этого запишем необходимые нам формулы, связывающие элементы орбиты с координатами и скоростью:

$$\sin^2 i = \frac{(y_e V_z - z_e V_y)^2 - (x_e V_z - z_e V_x)^2}{\mu p}, \quad \cos i = \frac{x_e V_y - y_e V_x}{\sqrt{\mu p}},$$
$$\sin^2\Omega = \frac{(y_e V_z - z_e V_y)}{\sqrt{\mu p}\sin i}, \quad \cos\Omega = \frac{x_e V_z - z_e V_x}{\sqrt{\mu p}\sin i}, \qquad (9)$$
$$\sin\omega = \frac{z_e(p-r_e)}{e r_e^2 \sin i} - \frac{[x_e(x_e V_z - z_e V_x) + y_e(y_e V_z - z_e V_y)](\mathbf{r_e}\cdot\mathbf{V})}{\sqrt{\mu} e r_e^2 \sin^2 i}.$$

$$\cos\omega = \frac{(p - r_e)[x_e(x_e V_x - z_e V_x) + y_e(y_e V_x - z_e V_y)] + pz_e(\mathbf{r_e} \cdot \mathbf{V})\mu^{-1/2}}{\sqrt{p}\, r_e^2 \sin^2 i}.$$

Здесь μ — гравитационная постоянная. Для экономии места рассмотрим во всех подробностях преобразования и вывод соответствующих формул только для x_s, ибо для y_s и z_s они аналогичны.

Компоненты вектора скорости выброса частицы имеют вид

$$\begin{aligned} c_x &= cl_x = c\cos T, \\ c_y &= cl_y = c\sin T\cos\Phi, \\ c_x &= cl_z = c\sin T\sin\Phi, \end{aligned} \tag{10}$$

где l_x, l_y, l_z — направляющие косинусы; T — угол между вектором $\mathbf{c}$ и осью X, $T \in [0, \pi]$; Φ - угол между осью Y и проекцией вектора $\mathbf{c}$ на плоскость YZ, $\Phi \in [0, 2\pi]$.

Введем также следующие обозначения:

φ — угол между векторами $\mathbf{V}_e$ и $\mathbf{c}$,
ψ — " $\mathbf{c}$ и $\mathbf{r}_e$,
ϑ — " $\mathbf{r}_e$ и $\mathbf{V}_e$.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= (V_{ex}l_x + V_{ey}l_y + V_{ez}l_z)/V_e, \\ \cos\psi &= (x_e l_x + y_e l_y + z_e l_z)/r_e, \\ \cos\vartheta &= (x_e V_{ex} + y_e V_{ey} + z_e V_{ez})/r_e V_e. \end{aligned} \tag{11}$$

И тогда

$$(\mathbf{r_e} \cdot \mathbf{V}) = r_e V_e \cos\vartheta + r_e c\cos\psi = r_o + r_1 c, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \mu p &= r_e^2 V^2 - (\mathbf{r_e} \cdot \mathbf{V})^2 = \\ &= r_e^2 V_e^2(1 - \cos^2\vartheta) + 2r_e^2 V_e(\cos\phi - \\ &\quad -cos\vartheta\cos\psi)c + r_e^2(1 - \cos^2\psi)c^2 = \\ &= p_o + p_1 c + p_2 c^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Произведя ряд подстановок: (11) — (12), (13) — (9) — (7) и учитывая, что

$$\begin{aligned} V_x &= V_{cx} + l_x c, \\ V_y &= V_{cy} + l_y c, \\ V_z &= V_{cz} + l_z c, \end{aligned} \tag{14}$$

получим искомые выражения (8). Оставим в числителе и знаменателе члены до первой степени относительно c

$$x_s = \frac{x_o + x_1 c}{d_0 + d_1 c}. \tag{15}$$

Ошибка аппроксимации зависит от конкретной конфигурации орбит и должна быть тщательно исследована. В некоторых случаях, видимо, придется увеличить степень разложения. Все выражения, приводимые далее, относятся только к первой степени.

Коэффициенты x_o и d_o зависят от элементов орбиты кометы, а коэффициенты x_1, d_1 также и от направления выброса, т.е. $x_o = x_o(P)$, $d_o = d_o(P)$, $x_1 = x_1(P, T, \Phi)$, $d_1 = d_1(P, T, \Phi)$. Для получения их применялась система компьютерной алгебры REDUCE. Приводить здесь коэффициенты нецелесообразно из-за громоздкости (всего около 600 членов). Вывод их не представляет особой трудности.

НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ (1)

Теперь получим пределы интегралов (1) в явном виде. Решая (15) относительно c, получаем

$$c_x^* = c_x^*(x_s, T, \Phi) = \frac{d_o^2 x_s - d_o x_o}{d_o x_1 - x_o d_1}.$$

Физический смысл $c_x^*(x_s, T, \Phi)$ — это скорость выброса, при которой частица пересекает плоскость (4) в точке с координатой x_s для фиксированных углов T и Φ. Запишем эту функцию также в том виде, который нам понадобится далее, перегруппировав члены в знаменателе так, чтобы выделить l_x, l_y, l_z:

$$c_x^*(x_s, T, \Phi) = \frac{d_o^2(x_s - x_c)}{A_x \cos T + B_x \sin T \cos \Phi + C_x \sin T \sin \Phi} \tag{16}$$

Коэффициенты A_x, B_x, C_x являются постоянными для заданных начальных условий: $A_x = A_x(P)$, $B_x = B_x(P)$, $C_x = C_x(P)$. При переходе к координатам на секущей плоскости (во вторую систему, но углы T и Φ целесообразно перевести в третью систему, так как распределение векторов скорости выброса, как правило, имеет некоторую симметрию, упрощающую запись функций распределения) уравнения (15) и (16) сохраняют свой вид, что легко показать с помощью (3). Причем

$$\begin{pmatrix} x_{op} \\ y_{op} \\ z_{op} \end{pmatrix} = TR_{12} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{1p} \\ y_{1p} \\ z_{1p} \end{pmatrix} = TR_{12} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_{xp} & B_{xp} & C_{xp} \\ A_{yp} & B_{yp} & C_{yp} \\ A_{zp} & B_{zp} & C_{zp} \end{pmatrix} = TR_{12} \begin{pmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{pmatrix} TR_{13}^T,$$

где TR_{13}^T — транспонированная матрица TR_{13}. Коэффициенты d_o и d_1 остаются прежними. Таким образом,

$$c_x^*(x_s, T, \Phi) = \frac{d_o^2(x_{sp} - x_{op})}{A_{xp}\cos T + B_{xp}\sin T\cos\Phi + C_{xp}\sin T\sin\Phi} \qquad (16')$$

Отметим еще раз, что углы T и Φ теперь отсчитываются в третьей системе координат. Это выглядит запутанным, но на деле упрощает уравнения. Далее нам понадобится и производная

$$\frac{\partial c_x^*(x_{sp}, T, \Phi)}{\partial x_{sp}} = \frac{A_{xp}\cos T + B_{xp}\sin T\cos\Phi + C_{xp}\sin T\sin\Phi}{(x_{1p} - x_{sp}d_1)^2}. \qquad (17)$$

Рассмотрим поведение функций $c_x^*(x_{sp}, T, \Phi)$ и $x_{sp}(c, T, \Phi)$ в области их определения. Отметим, что область $\{T, \Phi\}$ делится на две части. В одной из них с увеличением скорости выброса при фиксированном его направлении x_{sp} уменьшается ($\partial c_x^*/\partial x_{sp} < 0$), а в другой — увеличивается ($\partial c_x^*/\partial x_{sp} > 0$). Будем условно называть эти подобласти области $\{T, \Phi\}$ и соответственно координату x_{sp} внутренней и внешней. Очевидно, что существует верхняя граница скорости выброса , т.е.

$$c_x^*(x_s, T, \Phi) < C_l. \qquad (18)$$

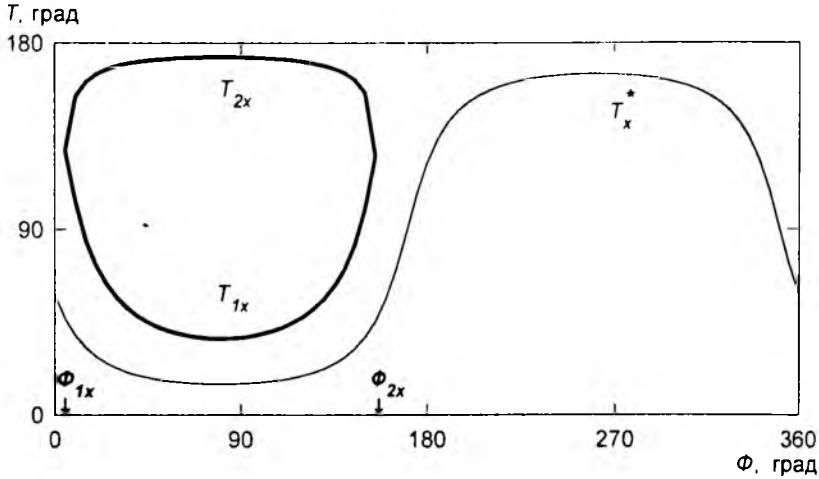

Рис. 1. Область допустимых значений T и Φ для некоторой внутренней x_{sp} окантурена утолщенной линией, верхняя часть которой есть функция $T_{2x}(x_{sp}, \Phi)$, а нижняя часть — функция $T_{1x}(x_{sp}, \Phi)$. На оси абсцисс отмечены границы изменения Φ — это две величины: $\Phi_{1x}(x_{sp})$ и $\Phi_{2x}(x_{sp})$. Тонкой сплошной линией изображена сепаратриса $T_x^*(\Phi)$, разделяющая области $(\partial c_x^*/\partial x_{sp} < 0)$ и $(\partial c_x^*/\partial x_{sp} > 0)$, находящиеся соответственно сверху и снизу от сепаратрисы. Для каждого направления (T, Φ) из окантуренной области имеется такое $c \in [0, C_L]$, что оно удовлетворяет уравнению (15). Для (T, Φ), расположенных вне этой области, но выше сепаратрисы, решение (15) можно найти, но здесь $c > C_L$. Для (T, Φ), расположенных ниже сепаратрисы, решения не существует

Рис. 1 иллюстрирует сказанное выше. На нем изображена область допустимых значений T и Φ для некоторой внутренней x_{sp}: для каждого направления $\{T, \Phi\}$ из этой области имеется такое $c \in [0, C_L]$, что оно удовлетворяет уравнению (15). Границы изменения величины T есть функции $T_{1x}(x_{sp}, \Phi)$ и $T_{2x}(x_{sp}, \Phi)$, а границы изменения Φ — это две величины: $\Phi_{1x}(x_{sp})$ и $\Phi_{2x}(x_{sp})$. Они определяются из условия (18). Область допустимых значений является односвязной: она уменьшается при увеличении $|x_{sp} - x_{cp}|$; при уменьшении $|x_{sp} - x_{cp}|$ она увеличивается и в конце концов полностью совпадает с областью

$(\partial c_x^*/\partial x_{sp} <> 0)$. Знак неравенства зависит от того, где находится x_{sp} — во внутренней области или во внешней.

Сепаратрису $T_x^*(\Phi)$, разделяющую области, находим из уравнения

$$\frac{\partial c_x^*}{\partial x_{sp}} = 0.$$

Отсюда

$$T_x^*(\Phi) = \arctan\left(\frac{-A_{xp}}{B_{xp}\cos\Phi + C_{xp}\sin\Phi}\right). \qquad (19)$$

Для функций $c_y^*(y_s, T, \Phi)$ и $y_{sp}(c, T, \Phi)$ рассуждения аналогичны.

Область интегрирования (1) определяется совокупностью граничных условий $x_{sp} < x$, $y_{sp} < y$, $0 < c < C_L$. Можно выразить это иначе. Область интегрирования (1) является пересечением областей S_x: $x_{sp} < x$, $0 < c < C_L$ и S_y: $y_{sp} < y$, $0 < c < C_L$ (т.е. $S_x \cap S_y$). Тогда, если $x_{sp} < x_{cp}$ (т.е. x_{sp} – внутренняя), то S_x такова:

$$\Phi \in [\Phi_{1x}, \Phi_{2x}],\ T \in [T_{1x}, T_{2x}],\ c \in [c_{1x}, c_{2x}] = [c_x^*, C_L].$$

А если $x_{sp} > x_{cp}$, то ситуация сложнее, ибо тогда S_x является объединением двух областей ($S_x = S_{x1} \cup S_{x2}$):

$$S_{x1} : x \in [x_{cp}, x_{sp}],\ c \in [0, c_x^*] \text{ и } S_{x2} : x < x_{cp},\ c \in [0, C_L].$$

Или

$$S_{x1} : \Phi \in [\Phi_{1x}, \Phi_{2x}], \quad T \in [T_{1x}, T_{2x}], \quad c \in [c_{1x}, c_{2x}] = [0, c_x^*],$$
$$S_{x2} : \Phi \in [0, 2\pi], \quad T \in [0, T_x^*] \text{ или } [T_x^*, \pi], \quad c \in [0, C_L].$$

Для S_y рассуждения аналогичны.

Итак, область интегрирования найдена. В самом простом случае, когда x_{sp} и y_{sp} внутренние, это одна связная область, $S_x \cap S_y$ и границы интегрирования можно записать как

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \max(\Phi_{1x}, \Phi_{1y}), & \Phi_2 &= \min(\Phi_{2x}, \Phi_{2y}), \\ T_1 &= \max(T_{1x}, T_{1y}), & T_2 &= \min(T_{2x}, T_{2y}), \\ c_1 &= \max(c_{1x}, c_{1y}) = & c_2 &= \min(c_{2x}, c_{2y}) = C_L, \\ &= \max(c_x^*, c_y^*), \end{aligned} \qquad (20)$$

Границы Φ_1, Φ_2, T_1, T_2 можно найти аналитически из (18), но проще сделать это численно.

Из изложенного следует, что (1) можно записать так:

$$F(x,y) = \int\limits_{\Phi_1}^{\Phi_2}\int\limits_{T_1}^{T_2}\int\limits_{c_1}^{c_2} f_c(c) f_t(T) f_\Phi(\Phi)\, d\Phi\, dT\, dc. \qquad (21)$$

Если x_{sp} и y_{sp} внешние, то мы имеем четыре подобные области $(S_{x1} \cup S_{x2}) \cap (S_{y1} \cup S_{y2})$ и, соответственно, четыре интеграла в правой части, а если только одна из координат внешняя, то две подобные области: $S_x \cap (S_{y1} \cup S_{y2})$ или $(S_{x1} \cup S_{x2}) \cap S_y$, и два интеграла. Однако при вычислении $f(x,y)$ достаточно ограничиться интегрированием только по области $S_{x1} \cap S_{y1}$, ибо все остальные интегралы при подстановке в (2) взаимно уничтожаются. В этом легко убедиться, записав границы интегралов для каждого члена правой части (2) и сравнив их.

Практическое замечание. Если хотя бы одна из координат является внутренней, то можно упростить алгоритм и существенно сократить время вычислений, применяя для вычисления $f(x,y)$ вместо функции распределения вероятностей $F(x,y) = P\{x_{sp} < x, y_{sp} < y\}$ другие функции такого же типа, а именно $F'(x,y) = P\{x_{sp} < x, y_{sp} \geq y\}$, $F''(x,y) = P\{x_{sp} \geq x, y_{sp} < y\}$ и $F'''(x,y) = P\{x_{sp} \geq x, y_{sp} \geq y\}$, где P — вероятность. Этим мы достигаем того, что границы внутреннего интеграла в (21) всегда равны $[0, \min(c_x^*, c_y^*)]$. Формула (2) при этом не меняется.

ПЛОСКОСТЬ ЭКЛИПТИКИ

Случай, когда секущей плоскостью является плоскость эклиптики, — особый. Он важен, ибо к нему относятся все задачи построения профилей метеорных потоков, наблюдаемых на Земле. Вся теория остается той же, меняется только вид некоторых исходных уравнений. А именно:

$$z = 0. \qquad (1')$$

$$x_s = \frac{\pm b_1}{1 \pm b_6}, \qquad y_s = \frac{\pm b_3}{1 \pm b_6}. \qquad (7')$$

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА

Рассмотрим две модели.

А) Выброс частиц изотропный, а скорости выброса распределены равномерно в диапазоне $[0, C_L]$. Тогда

$$f_c(c) = \frac{1}{C_L}, \qquad f_t(T) = \frac{\sin T}{2}, \qquad f_\Phi(\Phi) = \frac{1}{2\pi}. \tag{22}$$

Подставив (22) в (21), получаем

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi C_L} \int\limits_{\Phi_1}^{\Phi_2} \int\limits_{T_1}^{T_2} \sin T (c_2 - c_1)\, d\Phi\, dT.$$

Б) Выброс частиц в границах конуса с раствором α. Скорости выброса распределены по закону Гаусса. Тогда

$$f_c(c) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \exp\left|\frac{-(c-\tilde{\mu})^2}{2\sigma^2}\right|, \quad f_t(T) = \frac{\sin T}{1-\cos\alpha}, \quad f_\Phi(\Phi) = \frac{1}{2\pi}.$$

Здесь $\tilde{\mu}$ и σ – стандартные параметры нормального распределения.

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi(1-\cos\alpha)} \int\limits_{\Phi_1}^{\Phi_2} \int\limits_{T_1}^{T_2} \sin T \left[\operatorname{erf}\left(\frac{c_2 - \tilde{\mu}}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{c_1 - \tilde{\mu}}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] d\Phi\, dT$$

Напомним, что углы T и Φ отсчитываются в системе координат, связанной с кометой, а значит, ось конуса выброса направлена в данном случае по оси X третьей системы координат, а также что $c_1 = c_1(x, y, \Phi, T)$, $c_2 = c_2(x, y, \Phi, T)$. Для вычисления erf удобно использовать (Справочник, 1979; ф-ла 7.1.26).

Интегралы по T и Φ получаем численно. Все необходимые теоретические сведения имеются в предыдущем разделе, поэтому один из возможных алгоритмов интегрирования излагается очень кратко. Интегрирование по Φ ведем в диапазоне $[0, 2\pi]$ с шагом, выбор которого определяют предварительные исследования точности интегрирования. Итак,

1) задаем очередное Φ;

2) находим $T_x^*(\Phi)$, $T_y^*(\Phi)$ из (19);

3) поскольку знак производных от c_x^* и c_y^* при $T = \pi$ определяется знаком A_{xp} и A_{yp} соответственно, то при $x_{sp} < x_{cp}$

$$[T_{1x}, T_{2x}] \equiv [T_x^*, \pi], \quad \text{если } A_{xp} > 0,$$
$$[T_{1x}, T_{2x}] \equiv [0, T_x^*], \quad \text{если } A_{xp} < 0.$$

Если $x_{sp} > x_{cp}$, то все наоборот. Аналогично ищем $[T_{1y}, T_{2y}]$;

4) находим $[T_1, T_2]$ из (20). Если $T_2 > T_1$, — продолжаем, иначе — возвращаемся к пункту 1;

5) интегрируем численно внутренний интеграл в диапазоне $[T_1, T_2]$. Для каждого очередного T находим c_1 и c_2, используя (16′) и (20).

ЛИТЕРАТУРА

Рябова Г.О. Построение функции распределения плотности метеорного потока в сечении плоскостью эклиптики // Динамика механических систем: Труды всесоюзной школы-семинара. Томск: Изд-во Том. ун-та,1987. С.208-211.

Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган; Пер. с англ. М.: Наука, 1979. 832 с.

FLUX DENSITY OF PARTICLES AT ORBITING BODY DISINTEGRATION

G.O. Ryabova

Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk

There are several classes of objects in astronomy, which could be considered as streams having common origin: meteoroid streams, fragments of artificial satellite etc. A method is proposed to obtain the flux density distribution in an arbitrary cross-section of the stream. Orbital evolution is not taken into account. The method is statistical, semianalytical, using computer algebra. In comparison with direct numerical modelling time of computation decreases considerably.