УДК 514.142.2+514.174.6

В.А.Клячин

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УСЛОВИЯ ДЕЛОНЕ

Настоящая заметка посвящена условию, аналогичному условию Делоне для построения триангуляций поверхностей в евклидовом пространстве, а также триангуляции в пространствах Финслера. Классическое условие Делоне гласит, что описанная сфера вокруг n -мерного симплекса не содержит вершин других симплексов из данного набора триангуляции [1]. В основе алгоритмов построения триангуляции с условием Делоне лежит теорема о пустой сфере. Это теорема утверждает, что локальное выполнение условия Делоне влечет выполнение глобального условия. Другими словами, если для двух симплексов триангуляции, имеющих общую $(n-1)$ -мерную грань, описанные сферы не содержат вершин, противолежащих данной $(n-1)$ -мерной грани, то это справедливо и для произвольных двух симплексов триангуляции. В данной работе представлено условие, налагаемое на семейство выпуклых множеств, для которого справедливо аналогичное утверждение, т.е. условие, при выполнении которого из локального свойства вытекает глобальное.

Ключевые слова: триангуляция Делоне, выпуклая оболочка, симплекс.

1. Алгоритм построения триангуляции Делоне

Пусть в пространстве $\mathbf{R}^n$ задан конечный набор точек M . Триангуляцией множества M называется разбиение выпуклой оболочки этого множества на n -мерные симплексы с вершинами в точках из M , у которых внутренности не пересекаются. Симплексом S в вершинах $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}^n$ мы называем выпуклую оболочку точек x_i . Симплекс S называется невырожденным, если векторы $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0$ линейно независимы. В дальнейшем, будем рассматривать только такие наборы точек P_i , для которых любой симплекс в вершинах из P_i является невырожденным.

Прежде чем переходить к формулировкам указанных результатов, приведем схему алгоритма построения триангуляции Делоне в классическом варианте (см. [2]). Данная схема позволяет понять существенность теоремы о пустой сфере в указанном алгоритме. Мы следуем книге Шикина Е.В. и Борескова А.В. «Компьютерная графика. Полигональные модели» [2], модифицируя представленный там алгоритм на многомерный случай.

Прежде всего, дадим одно свойство сфер, описанных вокруг симплексов. Рассмотрим два симплекса S_1 и S_2 , имеющих общую $(n-1)$ -мерную грань G . Пусть A и B вершины симплексов, не принадлежащие грани G . Тогда, если сфера, описанная вокруг S_1 , не содержит внутри себя вершину B симплекса S_2 , то сфера, описанная вокруг S_2 , не содержит внутри себя вершины A . Действительно, пусть Σ_i – сфера, описанная вокруг S_i . Пусть $\Sigma_i^\pm$ – части, на которые разбиваются эти сферы и лежащие в полупространствах $\Pi^\pm$, определяемых плоскостью Π , содержащей грань G . Будем предполагать, что вершина $B \in \Pi$, значит, $B \in \Sigma_2^-$. Поэтому Σ_1^- лежит

внутри Σ_2^- . Если предположить, что вершина A лежит внутри Σ_2 , то получается, что и вся сфера Σ_1 лежит внутри сферы Σ_2 , касаясь этой сферы в n точках – вершинах грани G . Откуда следует, что сферы Σ_2 и Σ_1 совпадают. Это противоречит тому, что точка A , по предположению, лежит внутри сферы Σ_2 .

Алгоритм состоит из ряда шагов, выполняющихся в цикле. Заметим, что в [3] проведен анализ других существующих алгоритмов, некоторые из которых используют теорему о неполноте сферы.

- Строится выпуклая оболочка данной системы точек P_i , $i=1,2,\dots,N$. Предполагается, что никакие n точек данного семейства не лежат на одной гиперплоскости. В предположении, что никакие $(n+1)$ точек не лежат на одной сфере, триангуляция Делоне строится единственным способом.

- Выбирается n точек из данного семейства, лежащие на границе выпуклой оболочки $\text{conv}(P)$, такие, что $(n-1)$ -мерный симплекс G_0 с вершинами в этих точках также лежит на границе выпуклой оболочки.

- Ориентируем этот симплекс относительно внешней нормали к границе выпуклой оболочки $\text{conv}(P)$. Находим точку из семейства P_i , такую, что описанная сфера вокруг полученного симплекса не содержит других точек из P_i .

- Выбираем произвольную грань построенного симплекса, отличную от G_0 . Ориентируем эту грань нормалью, направленной в сторону уже построенного симплекса, содержащего эту грань. Из оставшихся точек находим точку из семейства P_i , такую, что сфера, описанная вокруг нового симплекса, построенного на вершинах грани G_0 и найденной точке, не содержит необработанных точек семейства P_i . Свойство описанных сфер, приведенное в начале данного пункта статьи, и «фундаментальная теорема» Вороного-Делоне [1] обеспечивают «пустоту сфер» относительно и уже включенных в триангуляцию точек.

- Далее процесс повторяется в цикле, пока не будут все точки включены в триангуляцию. Ориентация граней симплексов необходима для правильной организации этого цикла и поиска новых точек в предыдущем шаге цикла.

2. Теорема о пустоте семейства выпуклых множеств

Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ семейство выпуклых подмножеств $F(x,r)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $r \in \mathbf{R}$, и множество точек $\{P_i\}_{i=0}^N$, расположенных в некоторой области $D \subset \mathbf{R}^n$. Классическое условие Делоне и соответствующая теорема о пустоте сферы получаются как частный случай, если мы положим $F(x,r) = \{y \in \mathbf{R}^n: |y-x| < r\}$.

Пусть S – произвольный невырожденный симплекс. Определим описанное множество (если оно существует) $\Phi(S)$ из семейства $F(x,r)$ как множество, чья граница содержит все вершины симплекса (значит, $\Phi(S)$ содержит весь симплекс в силу выпуклости $F(x,r)$).

Определение 1. Рассмотрим произвольную триангуляцию множества точек P_i . Будем говорить, что триангуляция глобально равномерна относительно семейства $F(x,r)$, если для любого симплекса S этой триангуляции внутренность множества $\Phi(S)$ не содержит вершин других симплексов.

Определение 2. Рассмотрим произвольную триангуляцию множества точек P_i . Будем говорить, что триангуляция локально равномерна относительно семейства

$F(x,r)$, если для любого симплекса S этой триангуляции внутренность множества $\Phi(S)$ не содержит вершин других симплексов, имеющих общую $(n-1)$ -мерную грань.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы для семейства выпуклых множеств $F(x,r)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $r \in \mathbf{R}$, из локальной равномерности следовала глобальная равномерность, достаточно, чтобы указанное семейство обладало свойством: для любого симплекса S существовало и было единственным описанное множество $\Phi(S)$.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую триангуляцию множества точек P_i , обладающую локальным свойством равномерности. Зафиксируем произвольный симплекс S данной триангуляции и вершину A произвольного симплекса, отличного от S . Поступая как и в [1], построим луч OA , соединяющий некоторую внутреннюю точку симплекса S и вершину A и пересекающий границы симплексов по их некоторым $(n-1)$ -мерным граням. Нам необходимо доказать, что вершина A не принадлежит внутренности множества $\Phi(S)$. Пусть $S_1, \dots, S_L$ – последовательность симплексов, которые пересекает луч OA , а $G_1, \dots, G_L$ – соответствующие $(n-1)$ -мерные грани, пересекаемые этим же лучом. Рассмотрим симплекс S_1 . Пусть z_1 – вершина этого симплекса, не принадлежащая симплексу S . Тогда, в силу локальной равномерности, вершина z_1 не принадлежит $\Phi(S)$. Пусть Π_1 – гиперплоскость, содержащая грань G_1 и разбивающая пространство на полупространство Π_1^- , содержащее симплекс S , а также полупространство Π_1^+ . Тогда, вершина A лежит в полупространстве Π_1^+ . Предположим, что вершина A принадлежит симплексу S_2 . Тогда, если предположить, что вершина A лежит в $\Phi(S)$, то она должна принадлежать пересечению $\Phi(S) \cap \Phi(S_1)$. Действительно, если это не так, то на части луча $OA \cap \Pi_1^+$ существуют точки, принадлежащие $\Phi(S) \cap \Phi(S_1)$, и также точки, не принадлежащие этому пересечению. Поэтому найдется точка $B \in \partial\Phi(S) \cap \partial\Phi(S_1) \cap \Pi_1^+$. Построим симплекс S' , вершинами которого являются вершины грани G_1 , а также вершина B . Тогда найдутся два множества из семейства $F(x,r)$, а именно $\Phi(S)$ и $\Phi(S_1)$, описанные около S' . Последнее противоречит единственности описанного множества $\Phi(S')$. Таким образом, $A \in \Phi(S) \cap \Phi(S_1)$. Но это противоречит локальной равномерности триангуляции относительно $F(x,r)$. Аналогично, по индукции мы получаем, что вершина A не может лежать в $\Phi(S)$ при условии, что эта вершина одного из симплексов S_i , $i = 2, \dots, L$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Делоне Б.П. О пустой сфере. К мемуару Георгия Вороного: Пер. с фр. А.Ю. Игумнова // Записки семинара «Сверхмедленные процессы»: Сб. Вып. 1. С. 147 – 153.
2. Шикин Е.В., Боресков А.В. Компьютерная графика. Полигональные модели. М.: Диалог МИФИ, 2000.
3. Скворцов А.В., Мирза Н.С. Алгоритмы построения и анализа триангуляции. Томск, Изд-во Том. ун-та, 2006, 168 с.
4. Ласло М. Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++. М.: Бином, 1997.

Статья принята в печать 12.03.07.